26

...ejercidas sobre las partículas del sistema debido a fuerzas internas entre las partículas y b) Por momentos de rotación ejercidos sobre las partículas del sistema debido a fuerzas externas.

La primera causa se puede despreciar basandose en la tercera ley de Newton ... que las fuerzas entre dos partículas no sólo son iguales y opuestas sino que también están sobre la línea que une las dos partículas y por lo tanto el momento de rotación interno total es cero debido a que el momento de rotación resultante para cada par de fuerzas de acción y reacción es cero.

De la segunda causa se puede escribir:

$$\tau_{ext} = dL/dt \qquad \text{Ecuación 2-13}$$

donde τ_{ext}. es la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre el sistema. Esto se puede definir también como: "La rapidez con respecto al tiempo con que cambia la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas con respecto al origen de referencia, es igual a la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre el sistema".

La ecuación 2-13 es válida, ya sea cuando las partículas que constituyen un sistema se encuentren en movimiento unas con respecto a otras, o bien que tengan relaciones espaciales fijas, como el caso de un cuerpo rígido.

La ecuación 2-13 es aplicable solamente cuando τ y L se miden con respecto a un origen con un marco de referencia inercial. Así como también si se escoge como punto de referencia el centro de masa del sistema; aún cuando este punto no esté fijo en este marco de referencia.

No siendo válida si se trata de medir las variables τ y L con respecto a un punto arbitrario del sistema en movimiento, por ejemplo con respecto a una cierta partícula del sistema ya que tal punto se mueve de una manera complicada cuando el sistema de partículas se traslada, da vueltas o cambia su configuración.

4.- Energía cinética de rotación y momento de inercia.

Se ha demostrado que el valor de la velocidad de una partícula de un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo, es: $v = rw$, siendo r la distancia de la partícula al eje, y w la velocidad angular del cuerpo.

La energía cinética de la partícula de masa m es: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2w^2$. La energía cinética total del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas las partículas del mismo:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 w^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 w^2 + \ldots = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right) w^2.$$

Sabiendo que w en un cuerpo rígido es la misma para todas las partículas.

El término $\sum m_i r_i^2$ es la suma de los productos de las masas de las partículas por los cuadrados de sus distancias respectivas al eje de rotación. El resultado se denomina momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación, y se representa por I :

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad \text{Ecuación 2-14}$$

Notándose que el momento de inercia de un cuerpo depende del eje con respecto al cuál este girando, así como de la forma del cuerpo y de la manera como esta distribuida su masa.

Las unidades del momento de inercia pueden ser: kg - MT^2, gr - cm^2 o slug-Ft^2.

La energía cinética del cuerpo en rotación puede escribirse en función del momento de inercia, esto es:

$$K = \frac{1}{2} I w^2 \qquad \text{Ecuación 2-15}$$

cuya forma es ángaloga a la energía cinética de translación de un cuerpo, que es, $K = \frac{1}{2} M v^2$. Esto es, para la rotación alrededor de un eje fijo, el momento de inercia I es ánalogo a la masa, o sea, a la inercia de translación M, y la velocidad angular w es ánaloga a la velocidad lineal v .

Ejemplo 2-3.

En el sistema de la figura 2-7, se muestran tres pequeños cuerpos, que pueden considerarse como masas puntuales, están unidos por barras ligeras rígidas. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema: a) respecto a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por A; b) respecto a un eje que coincide con la barra B C? c) Si el cuerpo gira con una velocidad angular $w = 6 \frac{rad.}{seg.}$, alrededor de un eje que pasa por A y es perpendicular al plano de la figura, ¿ Cuál es la energía cinética de rotación?.

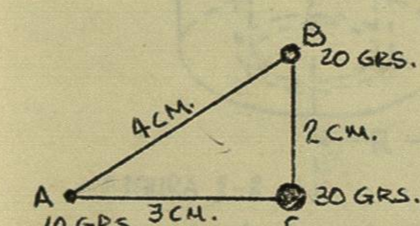


FIGURA 2-7

a) La partícula que se encuentra en A está sobre el eje. Su distancia al mismo es nula y no contribuje a formar el momento de inercia. Por tanto,

$$I = \sum m_i r_i^2 = 20 grs\ (4cm)^2 + 30\ grs\ (3cm)^2$$

$$I = 590\ grs - cm^2.$$

b) Ahora las partículas B y C se encuentran ambas sobre el eje, y el momento de inercia es:

$$I = \sum m_i r_i^2 = 10grs\ (3cm)^2 = 90grs - cm^2.$$

c)

$$K = \frac{1}{2} I w^2 = \frac{1}{2} \times 590 grs - cm^2 \times \left(6 \frac{rad}{seg} \right)^2$$

$$K = 10{,}620 \text{ ergios.}$$

Si ahora se concidera un cuerpo que no está constituido por masas puntuales aisladas, sino que es una distribución continua de materia, la suma expresada en la definición de momento de inercia, $I = \sum m_i r_i^2$, debe calcularse por los métodos del cálculo integral. Supongase que el cuerpo está dividido en elementos infinitesimales de masa dm, y sea r la distancia de cualquiera de uno de ellos al eje de rotación. El momento de inercia se obtiene multiplicando la masa dm de cada uno por el cuadrado de su distancia al eje, y hacer la suma de todos los productos $r^2 dm$ correspondientes al cuerpo entero. Así,

$$I = \int r^2 dm \qquad \text{Ecuación 2-16}$$

Si el cuerpo tiene forma irregular el cálculo de este tipo de integrales puede presentar dificultades considerables; pero para cuerpos de forma sencilla la integración resulta sencilla.

Como ejemplo, calcular el momento de inercia de un cilindro macizo homógeneo respecto a su eje de simetría.

En la figura 2-8, se ha seleccionado como elemento de masa mas conveniente un tubo cilíndrico infinitamente delgado, de radio r, espesor dr y altura L.

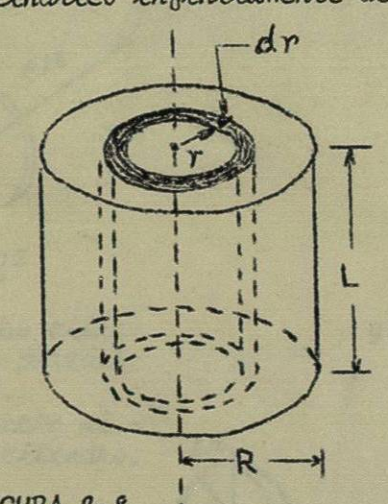


FIGURA 2-8

Si se representa la densidad del material por la letra griega ρ, esto es, la masa por unidad de volumen, resulta:

$$dm = \rho\, dV$$

siendo dV el volumen del tubo cilíndrico, esto es:

$$dV = (2\pi r\, dr)\, L$$

por lo tanto,

$$dm = 2\pi L \rho r\, dr$$

El momento de inercia con respecto al eje cilíndrico, sera:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_0^R \rho r^3 dr.$$

Si el cuerpo no tubiera una densidad constante, se debería conocer ρ en función de r para poder efectuar la inegración. Pero para un sólido homógeneo, ρ es constante, e

$$I = 2\pi L\rho\int_0^R r^3 dr = 2\pi L\rho \frac{R^4}{4} = \rho\pi R^2 L \frac{R^2}{2}$$

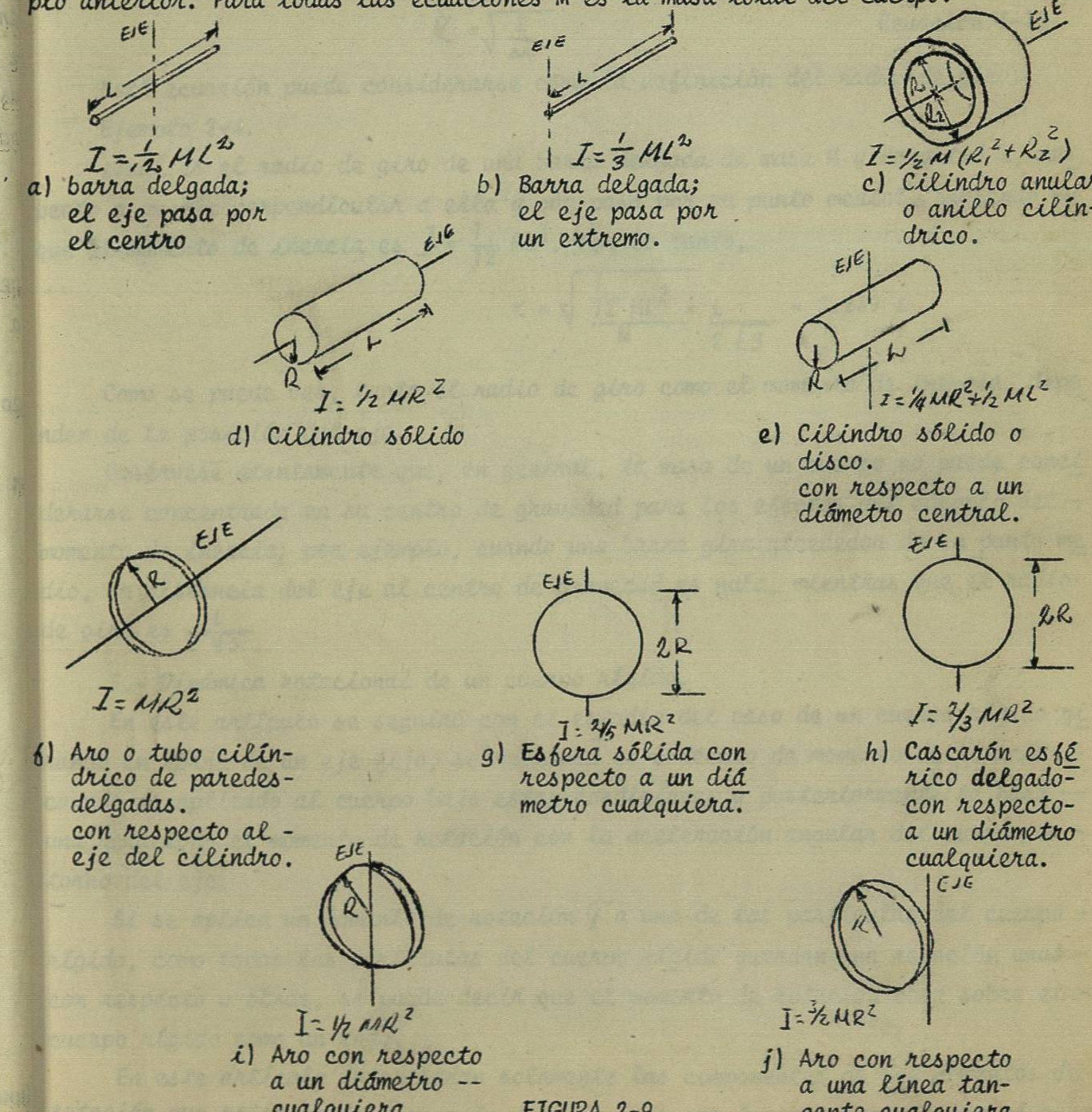
La masa M de todo el cilindro es el producto de su densidad ρ por su volumen $\pi R^2 L$, o sea,

$$M = \rho\pi R^2 L$$

por lo tanto, el momento de inercia será:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

En la figura 2-9, se dá una lista de los momentos de inercia con respecto a diversos ejes, de algunos cuerpos sencillos, pero importantes. Cada uno de los resultados se obtiene por integración de una manera semejante a la del ejemplo anterior. Para todas las ecuaciones M es la masa total del cuerpo.



a) barra delgada; el eje pasa por el centro

b) Barra delgada; el eje pasa por un extremo.

c) Cilindro anular o anillo cilíndrico.

d) Cilindro sólido

e) Cilindro sólido o disco. con respecto a un diámetro central.

f) Aro o tubo cilíndrico de paredes delgadas. con respecto al eje del cilindro.

g) Esfera sólida con respecto a un diámetro cualquiera.

h) Cascarón esférico delgado con respecto a un diámetro cualquiera.

i) Aro con respecto a un diámetro -- cualquiera.

j) Aro con respecto a una línea tangente cualquiera.

FIGURA 2-9

Cualquiera que sea la forma de un cuerpo, siempre es posible encontrar una distancia al eje dado, a la cual podría concentrarse la masa del cuerpo sin modificarse el momento de inercia de éste con respecto a dicho eje. A esta distancia se le llama radio de giro del cuerpo respecto al eje dado, y se representa K.

Si la masa del cuerpo M estuviera concentrada a esta distancia, el momento de inercia sería el de una masa puntual M, a la distancia K del eje, o sea, MK^2; como este producto es igual al momento de inercia I, se tiene:

$$MK^2 = I$$

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}} \qquad \text{Ecuación 2-12}$$

Esta ecuación puede considerarse como la definición del radio de giro.

Ejemplo 2-4.

¿Cuál es el radio de giro de una barra delgada de masa M y longitud L, respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su punto medio? Sabiendo que el momento de inercia es: $I = \frac{1}{12}ML^2$. Por lo tanto,

$$K = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}ML^2}{M}} = \frac{L}{2\sqrt{3}} = 0.288\,L$$

Como se puede ver, tanto el radio de giro como el momento de inercia, dependen de la posición del eje.

Obsérvese atentamente que, en general, la masa de un cuerpo no puede considerarse concentrada en su centro de gravedad para los efectos del cálculo del momento de inercia; por ejemplo, cuando una barra gira alrededor de su punto medio, la distancia del eje al centro de gravedad es nula, mientras que el radio de giro es $\frac{L}{2\sqrt{3}}$.

5.- Dinámica rotacional de un cuerpo rígido.

En este artículo se seguirá con el estudio del caso de un cuerpo rígido girando en torno de un eje fijo, se evaluará el concepto de momento de rotación cuando se está aplicando al cuerpo bajo estas condiciones y posteriormente se hará una relación del momento de rotación con la aceleración angular del cuerpo en torno del eje.

Si se aplica un momento de rotación τ a una de las partículas del cuerpo rígido, como todas las partículas del cuerpo rígido guardan una relación unas con respecto a otras, se puede decir que el momento de rotación obra sobre el cuerpo rígido como un todo.

En este artículo interesarán solamente las componentes de los momentos de rotación que estén en la dirección del eje, por ser las que hacen girar el cuer-

po en torno del eje. Las componentes del momento de rotación perpendiculares al eje, tienden a hacerlo girar. Ahora bien, se ha conciderado que el eje concerva una dirección fija. Por ejemplo, el cuerpo puede estar fijo a un eje que esta - sostenido en una posición fija, por medio de apoyos en cada extremo, al aplicar un momento de rotación que tenga una componente perpendicular al eje que pueda- hacerlo girar, automaticamente los apoyos aplican al eje un contramomento de rotación igual y opuesto, anulando el efecto de esta componente.

En la figura 2-10, se ha considerado un cuerpo rígido que puede girar libremente en torno del eje z . Una fuerza F, obra sobre una partícula que se en-- cuentra en el punto P del cuerpo situado a una distancia r del eje, el momento- de rotación que obra sobre la partícula, actúa sobre el cuerpo rígido como un - todo y se representa por:

$$\tau = r \times F$$

Como r y F son paralelos al plano de la figura, aplicando la regla de la - mano derecha el momento de rotación τ, apuntará perpendicularmente al plano de- la figura y saliendo de ella.

La magnitud de τ esta dada por la ecuación:

$$\tau = r\,F \operatorname{sen}\theta$$

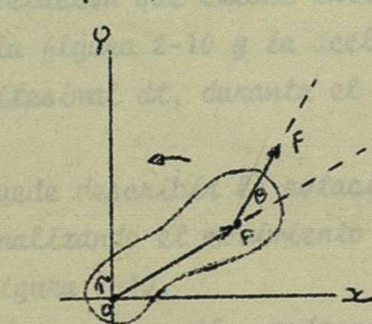


FIGURA 2-10

Ejemplo 2-5.

Una rueda de vagón puede girar libremente en torno de un eje horizontal -- que pasa por O. SE aplica una fuerza de 50 Nt a un rayo en el punto P que está- a 0.305 m del centro. OP forma un ángulo de 30° con la horizontal (eje x) y la- fuerza se encuentra en el plano de la rueda y forma un ángulo de 45° con la horizontal (eje x). ¿Cuál es el momento de rotación aplicado sobre la rueda?.