en torno del eje. Las componentes del momento de rotación perpendiculares al eje, tienden a hacerlo girar. Ahora bien, se ha considerado que el eje conserva una dirección fija. Por ejemplo, el cuerpo puede estar fijo a un eje que está sostenido en una posición fija, por medio de apoyos en cada extremo, al aplicar un momento de rotación que tenga una componente perpendicular al eje que pueda hacerlo girar, automáticamente los apoyos aplican al eje un contramomento de rotación igual y opuesto, anulando el efecto de esta componente.

En la figura 2-10, se ha considerado un cuerpo rígido que puede girar libremente en torno del eje Z. Una fuerza F, obra sobre una partícula que se encuentra en el punto P del cuerpo situado a una distancia r del eje, el momento de rotación que obra sobre la partícula, actúa sobre el cuerpo rígido como un todo y se representa por:

$$\tau = r \times F$$

Como r y F son paralelos al plano de la figura, aplicando la regla de la mano derecha, el momento de rotación τ, apuntará perpendicularmente al plano de la figura y saliendo de ella.

La magnitud de τ está dada por la ecuación:

$$\tau = r\ F \operatorname{sen}\theta$$

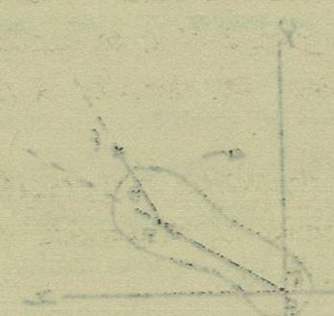

FIGURA 2-10

Ejemplo 2-5.

Una rueda de vagón puede girar libremente en torno de un eje horizontal que pasa por O. SE aplica una fuerza de 50 NT a un rayo en el punto P que está a 0.305 m del centro. OP forma un ángulo de 30° con la horizontal (eje x) y la fuerza se encuentra en el plano de la rueda y forma un ángulo de 45° con la horizontal (eje x). ¿Cuál es el momento de rotación aplicado sobre la rueda?

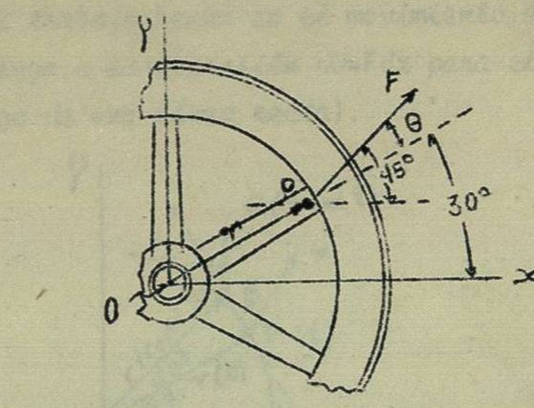

FIGURA 2-11

El ángulo que forma el vector de desplazamiento r y la fuerza aplicada --- F (figura 2-11 es θ, donde

$$\theta = 45° - 30° = 15°$$

Por consiguiente, la magnitud del momento de rotación es:

$$\tau = r F \operatorname{sen}\theta$$

$$= (0.305\ M)\ (50\ NT)\ (\operatorname{sen} 15°) = 3.96\ NT\text{-}MT$$

Analizando ahora la relación que existe entre el momento de rotación aplicado al cuerpo rígido de la figura 2-10 y la aceleración del mismo. Observese - el cuerpo un tiempo infinitesimal dt, durante el cuál gira un ángulo infinitesimal dθ.

Se ha visto que se puede describir la rotación de un cuerpo rígido girando en torno a un eje fijo, analizando el movimiento de un punto cualquiera fijo en el cuerpo, como P en la figura 2-10.

Entonces para una mejor comprención, enfoquese la atención a la figura --- 2-12, en el punto P del cuerpo que esta girando alrededor de un eje pasa por O- y es perpendicular al plano de la figura. Se ejerce sobre el cuerpo en el punto P, una fuerza F; cuando este cuerpo gira un pequeño ángulo dθ, el punto P recorre una distancia dS sobre su trayectoria circular, siendo

$$dS = r\,d\theta$$

El trabajo dW realizado por la fuerza durante esa pequeña rotación es:

$$dW = F.dS = F\cos\phi\, dS = (F\cos\phi)\ (r\,d\theta)$$

Donde $F\cos\phi$ es la componente de F en la dirección de dS. Pero como $(F\cos\phi)\,r$ es la magnitud del momento de rotación instantáneo ejercido por F sobre el cuerpo rígido con respecto al eje perpendicular al plano de la figura -- que pasa por O, de modo que

$$dW = \tau\, d\theta \qquad \text{Ecuación 2-18}$$

Esta expresión es el trabajo hecho en el movimiento de rotación (en torno de un eje fijo) y es análoga a la expresión $dW=Fdx$ para el trabajo efectuado en la translación (a lo largo de una línea recta).

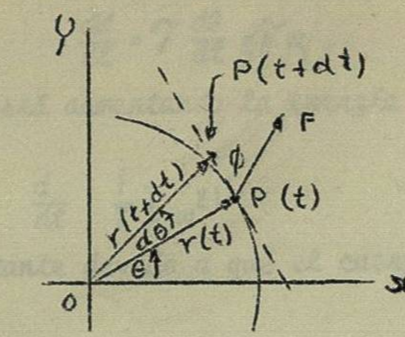

FIGURA 2-12

Para obtener la rapidez con que se hace trabajo en el movimiento de rotación (en torno de un eje fijo), divídase ambos miembros de la ecuación 2-18 entre el intervalo infinitesimal de tiempo dt durante el cuál el cuerpo se desplaza $d\theta$, obteniendo

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{DT}$$

Pero como $\frac{dW}{dt}$ es la derivada respecto al tiempo del trabajo realizado, o sea, la potencia P, y $\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular w, por lo tanto:

$$P = \tau w$$

siendo esta expresión análoga a $P = F\upsilon$ para el movimiento de translación (a lo largo de una línea recta).

Si ahora se aplica un cierto número de fuerzas F_1, F_2 etc; sobre el cuerpo en el plano normal a su eje de rotación, las fuerzas harán un trabajo sobre el cuerpo durante una pequeña rotación $d\theta$ que será:

$$dW = F_1 \cos \phi_1 r_1 d\theta + F_2 \cos \phi_2 r_2 d\theta + \ldots,$$

$$= (\tau_1 + \tau_2 + \ldots)\, d\theta = \tau d\theta,$$

siendo la $r_1 d\theta$ igual a dS_1, el desplazamiento del punto en que está aplicada F_1 y ϕ_1 el ángulo entre F_1 y dS_1, etc. Por lo tanto τ será la magnitud de la componente del momento de rotación resultante con respecto al eje que pasa por 0. Al calcular esta suma, cada momento de rotación se considera positivo o negativo según sea el sentido en que él solo tendería a hacer girar el cuerpo en torno de su eje.

No existe movimiento interno de las partículas dentro de un cuerpo verdaderamente rígido, sólo se mueven con el cuerpo como un todo. Por lo tanto, no puede haber disipación de energía dentro de un cuerpo verdaderamente rígido. --

Por consiguiente, se puede igualar la rapidez con que se esté haciendo trabajo sobre el cuerpo con la rapidez con que está aumentando su energía cinética. La rapidez con que se está haciendo trabajo sobre el cuerpo rígido es:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau w \qquad \text{Ecuación 2-19}$$

La rapidez con que está aumentando la energía cinética del cuerpo rígido - es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I\, w^2\right)$$

Pero como I es constante devido a que el cuerpo es rígido y el eje está fijo. Entonces, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I w^2\right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} w^2 = I w \frac{dw}{dt} = I w \alpha \qquad \text{Ecuación 2-20}$$

Igualando las ecuaciones 2-19 y 2-20, se obtiene:

$$\tau w = I \alpha w$$

o sea,

$$\tau = I \alpha \qquad \text{Ecuación 2-21}$$

Está ecuación se refiere al movimiento de rotación en torno a un eje fijo. El momento de rotación τ, la velocidad angular w y la aceleración angular α, - actúan solo a lo largo del eje en un sentido o en el otro. El caso de translación equivalente es aquel en el cuál la fuerza F que obra sobre un cuerpo, su - velocidad v, y su aceleración a apuntan todas sobre una línea recta dada, en - un sentido o en otro.

Las seis cantidades anteriores son vectores, pero cuando están actuando a lo largo de una línea fija, sólo pueden tener dos sentidos, positivo o negativo Se pueden analizar estos vectores algebraicamente y ocuparse solamente de sus - magnitudes. Así, al derivar la ecuación 2-21, se habrá transformado solamente - la segunda ley de Newton ($F = ma$), escrita en forma escalar adecuado para describir el movimiento rectilíneo, a términos rotacionales. Es decir, así como se puede asociar una fuerza con la aceleración lineal de un cuerpo, de la misma manera se puede asociar un momento de rotación con la aceleración angular de un - cuerpo en torno de un eje dado.

La inercia de rotación I es una medida de la resistencia que un cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de rotación como consecuencia de un momento de rotación dado, así como la inercia de translación, o masa, M, es la medida de la resistencia que un cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de translación bajo la acción de una fuerza dada.

En la tabla 2-1 se hace una comparación del movimiento de translación de -

consecuencia, se puede evaluar la rapidez con que se está haciendo trabajo sobre el cuerpo con la rapidez con que está aumentando su energía cinética. La rapidez con que se está haciendo trabajo sobre el cuerpo rígido es:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega \qquad \text{Ecuación 2-19}$$

La rapidez con que está aumentando la energía cinética del cuerpo rígido es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$$

Pero como I es constante debido a que el cuerpo es rígido y el eje está fijo. Entonces, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}\omega^2 = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I\omega\alpha \qquad \text{Ecuación 2-20}$$

Igualando las ecuaciones 2-19 y 2-20, se obtiene:

$$\tau\omega = I\alpha\omega$$

o sea,

$$\tau = I\alpha \qquad \text{Ecuación 2-21}$$

Está ecuación se refiere al movimiento de rotación en torno a un eje fijo. El momento de rotación τ, la velocidad angular ω y la aceleración angular α, actúan sólo a lo largo del eje en un sentido o en el otro. El caso de translación equivalente es aquel en el cuál la fuerza F que obra sobre un cuerpo, su velocidad v, y su aceleración a apuntan todas sobre una línea recta dada, en un sentido o en otro.

Las seis cantidades anteriores son vectores, pero cuando están actuando a lo largo de una línea fija, sólo pueden tener dos sentidos, positivo o negativo. Se pueden analizar estos vectores algebraicamente y ocuparse solamente de sus magnitudes. Así, al derivar la ecuación 2-21, se habrá transformado solamente la segunda ley de Newton ($F = Ma$), escrita en forma escalar adecuada para describir el movimiento rectilíneo, a términos rotacionales. Es decir, así como se puede asociar una fuerza con la aceleración lineal de un cuerpo, de la misma manera se puede asociar un momento de rotación con la aceleración angular de un cuerpo en torno de un eje dado.

La inercia de rotación I es una medida de la resistencia que un cuerpo opone a cambiar su movimiento de rotación como consecuencia de un momento de rotación dado, así como la inercia de translación, o masa, M, es la medida de la resistencia que un cuerpo ofrece a cambiar su movimiento de translación bajo la acción de una fuerza dada.

En la tabla 2-1 se hace una comparación del movimiento de translación de -

un cuerpo rígido en una trayectoria rectilínea, con el movimiento de rotación - de un cuerpo rígido en torno de un eje fijo.

TABLA 2-1

MOVIMIENTO RECTILINEO		ROTACION EN TORNO DE UN EJE FIJO	
Desplazamiento	x	Desplazamiento angular	θ
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt}$	Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Masa	M	Inercia de rotación	I
Fuerza	$F = Ma$	Momento de rotación	$\tau = I\alpha$
Trabajo	$W = \int F dx$	Trabajo	$W = \int \tau \, d\theta$
Energía cinética	$\frac{1}{2} M v^2$	Energía cinética	$\frac{1}{2} I \omega^2$
Potencia	$P = Fv$	Potencia	$P = \tau\omega$
Cantidades de movimiento lineal	Mv	Cantidad de movimiento angular	$I\omega$

La expresión $\tau = I\alpha$ que es la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, no es la clase más general de movimiento rotatorio en donde el cuerpo puede ser o no rígido y el eje también puede o no estar fijo en un marco de referencia inercial. Para este caso general se aplica la ecuación 2-13, o sea, -- $\tau_{ext.} = dL/dt$. Según se había ya indicado, esta expresión equivale a la segunda ley de Newton del movimiento general de translación de un sistema de partículas o sea, $F_{ext.} = dP/dt$.

Ejemplo 2-6.

Un disco uniforme de radio $R = 0.20$ m y masa $M = 3$kg está montado en un -- eje sostenido en unos apoyos fijos sin rozamiento, como se muestra en la figura 2-13. En el borde de la rueda se enrolla una cuerda ligera y se aplica una fuerza constante $T = 4.5\ N\tau$ hacia abajo sobre la cuerda. Encontrar la aceleración - angular de la rueda y la aceleración tangencial de un punto del borde.

El momento de rotación en torno del eje central es $\tau = TR$ y el momento de - inercia del disco con respecto al eje central es $I = \frac{1}{2} MR^2$. De la ecuación

$$\tau = I\alpha$$

Tenemos:

$$TR = \frac{1}{2} MR^2\alpha$$

de donde,