$T = 4.5\ N$
$I = \frac{1}{2}MR^2$
$\tau = TR$

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \times 4.5\ N}{3kg \times 0.20\ M} = 15\ \frac{rad}{seg^2}$$

La aceleración tangencial de un punto del disco está dada por

$$a = R\alpha = 0.20\,M \times 15\ \frac{rad}{seg^2} = 3\ \frac{M}{seg^2}.$$

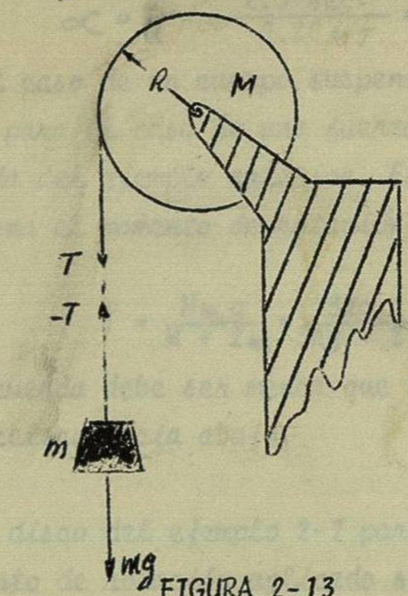

FIGURA 2-13

Ejemplo 2-7.

Supóngase que ahora se suspende un cuerpo de masa m *de la cuerda del ejemplo anterior. Encontrar la aceleración angular del disco y la aceleración tangencial de un punto de lo periferia.*

Si T es la tensión de la cuerda. Puesto que el cuerpo suspendido acelerará hacia abajo, la magnitud de la fuerza de la gravedad, mg, que obra hacia abajo sobre ella deberá exceder a la magnitud de la tensión ascendente de la cuerda sobre el cuerpo, que será T. La aceleración a del cuerpo suspendido es la misma que la aceleración tangencial de un punto en la periferia del disco. De la segunda ley de Newton se tiene,

$$mg - T = ma$$

El momento de rotación del disco es TR y su momento de inercia es $\frac{1}{2}MR^2$. *A partir de la ecuación*

$$\tau = I\alpha$$

se tiene:

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

de la relación $a = R\alpha$, *se puede escribir esta última ecuación así:*

$$2T = Ma$$

desarrollando por simultáneas la primera y última ecuación, se tiene:

$$a = \left(\frac{2m}{M + 2m}\right)g \qquad y \qquad T = \left(\frac{Mm}{M + 2m}\right)g$$

Si $M = 3kg$ y $R = 0.20\,MT$ y considerando que el cuerpo suspendido pasa ---- $mg = 4.5\,Nt$, se obtiene:

$$a = \frac{2Mg}{M + 2m} = \frac{2 \times 4.5\ NT}{3kg + 2 \times 0.46kg} = 2.3\ \frac{MT}{seg^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2.3\ \frac{MT}{seg^2}}{0.20\ MT} = 11.5\ \frac{rad}{seg^2}$$

Nótese que para el caso de un cuerpo suspendido que pesa $4.5\,NT$ las aceleraciones son menores que para el caso de una fuerza de tensión constante de $4.5\,NT$ aplicada sobre la cuerda del ejemplo anterior. Esto se debe a que la tensión en la cuerda que proporciona el momento de rotación es ahora menor que 4.5 , siendo su valor

$$T = \frac{Mmg}{M + 2m} = \frac{3kg \times 4.5\ NT}{3kg + 2 \times 0.46\ kg} - 3.45\ NT$$

La tensión en la cuerda debe ser menor que el peso del cuerpo suspendido - para que este cuerpo acelere hacia abajo.

Ejemplo 2-8.

Suponiendo que el disco del ejemplo 2-7 parta del reposo, calcular el trabajo hecho por el momento de rotación aplicado sobre el disco en 2 seg. Calcular también el incremento de energía cinética rotacional que experimenta el disco.

Como el momento de rotación aplicado es constante, la aceleración angular- resultante es constante. El desplazamiento angular total, en el caso de aceleración angular constante, se obtiene a partir de,

$$\theta = w_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

en la cual,

$$w_o = 0 \qquad \alpha = 11.5\ \frac{rad}{seg^2} \qquad t = 2\ seg.$$

por lo tanto

$$\theta = 0 + \frac{1}{2}\left(11.5\ \frac{rad}{seg^2}\right)(2\ seg)^2 = 23\ rad.$$

+ Para un momento de rotación constante, el trabajo hecho en un desplazamiento angular finito es:

$$W = \tau(\theta_2 - \theta_1)$$

donde

$$\tau = TR = (3.45\,NT)(0.20\,M) = 0.69\,NT\text{-}MT$$

y

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta = 23\ rad.$$

Por consiguiente,

$$W = 0.69\,NT\text{-}MT \times 23rad. = 15.9\,NT\text{-}MT$$

El trabajo dá lugar a un aumento de energía cinética de rotación del disco A partir del reposo, el disco adquiere una velocidad angular w.

La energía de rotación es $\frac{1}{2}I w^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} MR^2)\ w^2$.

w se obtiene a partir de,

$$w = w_o + \alpha t$$

de manera que,

$$w = o + 11.5 \frac{rad}{seg^2} (2 \ seg) = 23 \frac{rad}{seg}$$

entonces,

$$\frac{1}{2} I \ w^2 = \frac{1}{4} (3 \ kg.) \ (0.2Mt)^2 (23 \frac{rad^2}{seg}) = 15.9 \ Nt\text{-}Mt$$

El aumento de energía cinética del disco es igual al trabjo efectuado por la fuerza resultante que obra sobre el disco.

6.- El movimiento cambiando de traslación y de rotación de un cuerpo rígido.

Cuando un cuerpo está rodando, experimenta un movimiento de translación y la vez gira en torno de un eje. Es de esperarse que al analizar el movimiento de los cuerpos que ruedan debiera tratarse como una combinación de un movimiento de translación y de uno de rotación Sin embargo, sería posible considerar el problema de un cuerpo que rueda como si su movimiento fuera de rotación pura.

En la figura 2-14, se muestra un cilindro que rueda en una superficie horizontal. En un instante dado, la parte del cilindro que esta en contacto con la superficie se encuentra en reposo debido a que no se deliza. El eje normal al plano de la figura que pasa por el punto de contacto P se le llama eje instantáneo de rotación. La velocidad lineal de toda partícula del cilindro, en este instante tiene una dirección perpendicular a la línea que une la partícula con P y su magnitud es proporcional a esa distancia. Esto equivale a decir que el cilindro gira en torno de un eje fijo que pasa por P con una velocidad angular w, en ese instante. Por lo tanto, en un instante dado, el movimiento del cuerpo es equivalente a una rotación pura. Así, la energía cinética total se escribe:

$$K = \frac{1}{2} I_p \ w^2, \qquad \text{Ecuación 2-22}$$

donde p es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por P.

Aplicando el teorema de los ejes paralelos, que dice,

$$I_p = I_{cM} + MR^2,$$

donde I_{cM} es el momento de inercia del cilindro de masa M y de radio R con respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa. De la ecuación 2-22 se obtiene:

$$K = \frac{1}{2} I_{cM} \ w^2 + \frac{1}{2} MR^2 w^2, \qquad \text{Ecuación 2-23}$$

Rw es la velocidad con que se mueve el centro de masa del cilindro con respecto al punto fijo P. Si $R\omega = v_{CM}$ la ecuación 2-23 queda:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M\, v^2_{CM}. \qquad \text{Ecuación 2-24}$$

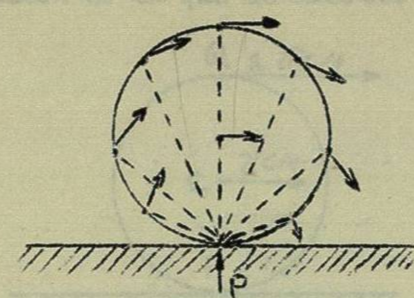

FIGURA 2-14

La velocidad del centro de masa con respecto a P es la misma que la velocidad de P con respecto al centro de masa.

Cualquier línea de referencia del cilindro gira el mismo ángulo en tiempo dado, ya sea que se observe desde un marco de referencia fijo con respecto a la superficie sobre la cuál está rodando el cilindro o desde un marco que tenga un movimiento de translación con respecto a ese marco fijo.

Esto es, la velocidad angular ω del centro de masa con respecto a P tal como la vería alguien que estubiera en P es la misma que la velocidad angular de una partícula colocada en P con respecto a C, tal como la vería alguien que estubiera en C (moviéndose con el cilindro).

La ecuación 2-24, que fué obtenida a base de un movimiento de rotación pura se puede interpretar de otra manera; esto es, el primer término, $\frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$, es la energía cinética que tendría el cilindro si solamente girára en torno de un eje que pasará por su centro de masa, sin movimiento de translación; y el segundo término, $\frac{1}{2} M\, v^2_{CM}$, es la energía cinética que tendría el cilindro si tuviera un movimiento de translación con la velocidad de su centro de masa, sin estar girando.

Como se puede observar la ecuación 2-24 se puede aplicar a cualquier cuerpo que se mueva y gire en torno de un eje perpendicular a su movimiento, ya sea que esté rodando o no sobre una superficie.

Combinados los efectos de la rotación en torno de un eje que pase por el centro de masa y de la translación del centro de masa son equivalentes a una rotación pura con la misma velocidad angular con respecto a un eje que pase por el punto de contacto de un cuerpo que va rodando.

Si la velocidad del centro de masa es v_{CM}, la velocidad angular instantánea con respecto a un eje que pasa por P es $\omega = \frac{v_{CM}}{R}$. Por lo tanto, un punto Q,-