situado en la parte superior del cilindro, tendrá el doble de la velocidad V_{CM} en ese instante o sea $2\ WR = 2\ V_{CM}$. El punto de contacto P se encuentra instantáneamente en reposo. Por lo tanto, desde el punto de vista de la rotación pura en torno de P, la situación es la que se muestra en la figura 2-15.

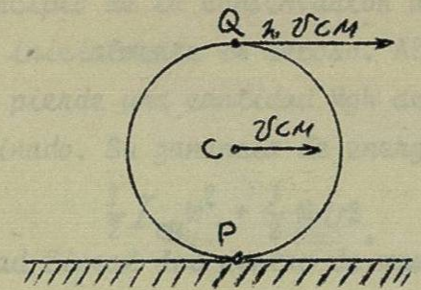

FIGURA 2-15

Considerando el rodamiento como una combinación de una translación del centro de masa y de una rotación alrededor del eje del cilindro que pasa por C. Si sólo se considera la translación, todos los puntos del cilindro tienen la misma velocidad V_{CM} que el centro de masa, como se muestra en la figura 2-16a. En la figura 2-16b, se considera solamente la rotación, el centro se encuentra en reposo, mientras que el punto Q en la parte superior tiene una velocidad + WR en la dirección de las x y el punto P en la parte inferior del cilindro tiene una velocidad - WR en la dirección de las -x.

Combinando estos dos resultados y recordando que $W = \frac{V_{CM}}{R}$, se obtiene:

Para el punto Q $\quad V = V_{CM} + WR = V_{CM} + \frac{V_{CM}}{R} R = 2\ V_{CM}$

Para el punto C $\quad V = V_{CM} + 0 = V_{CM}$

Para el punto P $\quad V = V_{CM} - WR = V_{CM} - \frac{V_{CM}}{R} R = 0.$

Este resultado, se muestra en la figura 2-16c, y es exactamente igual al que se obtuvo desde el punto de vista puramente rotacional en la figura 2-15.

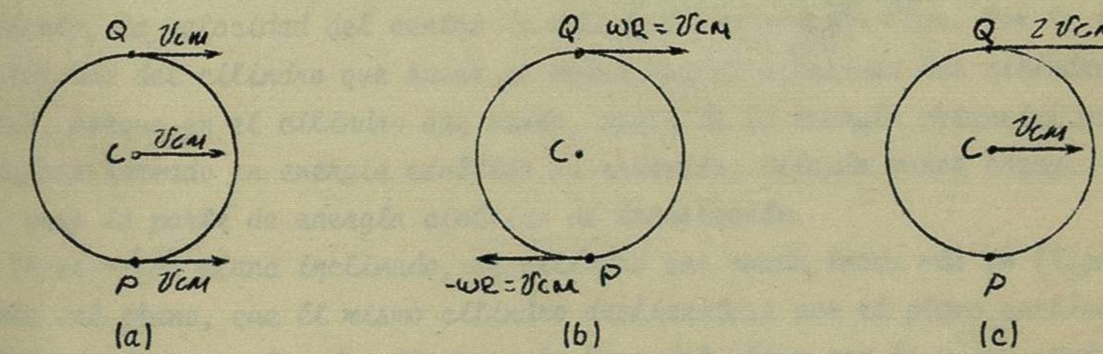

FIGURA 2-16

Ejemplo 2-9.

En la figura 2-17 se representa un cilindro macizo de masa M=3kg. y de radio R=020 MT que baja rodando por un plano inclindado sin deslizar. Encontrar la velocidad de su centro de masa cuando el cilindro llega a la base del plano.

Aplicando el principio de la conservación de la energía y sabiendo que el cilindro se encuentra inicialmente en reposo. Al bajar rodando por el plano inclinado, el cilindro pierde una cantidad Mgh de energía potencial, siendo h la altura del plano inclinado. Su ganancia de energía cinética es igual a

$$\frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M V^2,$$

donde V es la velocidad lineal del centro de masa y w la velocidad angular con respecto al centro de masa en la base del plano.

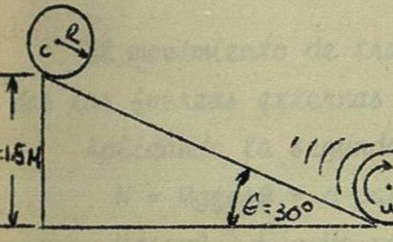

FIGURA 2-17

A partir de la relación.

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{CM} w^2 + \frac{1}{2} M V^2,$$

en donde,

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \quad y \quad w = \frac{V}{R}$$

se tiene,

$$Mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{V}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) M V^2,$$

$$V = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

sustituyendo valores se obtiene,

$$V = \sqrt{\frac{4}{3} \times 9.8 \frac{MT}{seg^2} \times 1.5 MT}$$

$$V = 4.42 \frac{M}{seg.}$$

Si el cilindro hubiera deslizado bajando por el mismo plano inclinado sin rozamiento, la velocidad del centro de masa hubiera sido $V = \sqrt{2gh}$. Por lo tanto, la velocidad del cilindro que rueda es menor que la velocidad del cilindro que desliza, porque en el cilindro que rueda, parte de la energía potencial perdida se ha transformado en energía cinética de rotación, dejando menos energía disponible para la parte de energía cinética de translación.

En el mismo plano inclinado, el cilindro que rueda tarda más en llegar a la base del plano, que el mismo cilindro deslizandose por el plano inclinado sin rozamiento; pero los dos llegan a la base del plano con la misma cantidad de energía.

Ejemplo 2-10.

Resolver el ejmplo 2-9 usando métodos dinámicos.

En la figura 2-18 se muestra el diagrama de fuerzas. Mg es el peso del cilindro que actúa verticalmente hacia abajo y que pasa por el centro de masa, N es la fuerza normal ejercida por el plano inclinado sobre el cilindro, y f es la fuerza de rozamiento estático que obra a lo largo del plano inclinado en el punto de contacto.

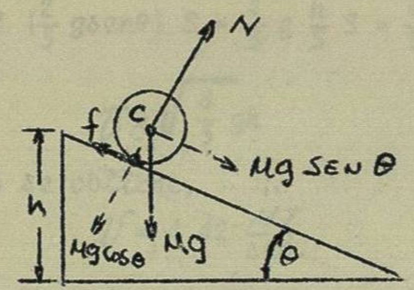

FIGURA 2-18

El movimiento de translación de un cuerpo se obtiene considerando que todas las fuerzas externas obran en su centro de masa.

Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

$N = Mg\cos\theta = 0$ para el movimiento normal al plano inclinado, y

$Mg\,sen\theta - f = Ma$ para el movimiento en el plano inclinado.

Para el movimiento de rotación en torno del centro de masa se aplica la expresión

$$\tau = I_{CM}\alpha$$

Ni N ni Mg pueden producir rotación en torno de C porque sus líneas de acción pasan por C, y tienen brazos de palanca nulos.

La fuerza de rozamiento tiene un brazo de palanca R con respecto a C, de manera que

$$fR = I_{CM}\alpha,$$

pero,

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad y \qquad \alpha = \frac{a}{R}$$

por lo tanto,

$$f = \frac{I_{CM}\alpha}{R} + \frac{Ma}{2}$$

Sustituyendo está expresión en la segunda ecuación de la translación, se tiene,

$$a = \frac{2}{3}\, g\, sen\theta.$$

La aceleración del centro de masa del cilindro que rueda ($\frac{2}{3}\, g sen\theta$) es menor que la aceleración del centro de masa del cilindro que baja deslizando por el plano inclinado ($g sen\theta$).

El centro de masa se mueve con aceleración lineal constante.

La velocidad del centro de masa, a partir del punto de reposo, se obtiene aplicando la relación.

$$v^2 = 2aS,$$

de manera que

$$v^2 = 2\left(\frac{2}{3} g\,sen\theta\right) S = \frac{4}{3} g \frac{h}{S} S = \frac{4}{3} gh.$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

sustituyendo valores se obtiene,

$$v = 4.42 \frac{MT}{seg.}$$

Ejemplo 2-11.

Una esfera y un cilindro, que tienen la misma masa y el mismo radio, parten del punto de reposo y bajan rodando por el mismo plano inclinado. ¿Cuál de los dos cuerpos llegará primero a la base del plano?.

Para una esfera, I_{cM} es igual a $\frac{2}{5} MR^2$. Por el método dinámico, se tiene:

$$Mg\,sen\theta - f = Ma, \quad \text{translación del cM,}$$

$$fR = I_{cM}\alpha = \left(\frac{2}{5} MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right), \text{rotación en torno del cM,}$$

o sea,

$$f = \frac{2}{5} Ma \quad \text{y} \quad a = \frac{5}{7} g\,sen\theta, \text{ esfera}$$

Para el cilindro, del ejemplo 2-10,

$$a = \frac{2}{3} g\,sen\theta, \quad \text{cilindro.}$$

Como la aceleración del centro de masa de la esfera es en todo momento mayor que la aceleración del centro de masa del cilindro. Puesto que ambos parten del reposo en el mismo instante, la esfera será la primera que llegue a la base del plano.