el cuerpo está formado por grupos de pares de partículas. Por consiguiente, W u L son paralelos para todos estos pares así como también para cuerpos rígidos -- que sean simétricos con respecto a su eje de rotación. Por lo tanto, para cuerpos rígidos simétricos se puede escribir en forma vectorial,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\, w, \qquad \text{Ecuación 3-5}$$

donde $\mathbf{L}$ representa la cantidad de movimiento angular total. La ecuación 3-5 se aplica solamente a cuerpos simétricos con respecto al eje de rotación.

Ejemplo 3-2.

Resolver el problema del ej.2-7, cap.2, aplicando directamente la ecuación $\Gamma = \frac{dL}{dt}$

El sistema de la figura 2-13, formado por la rueda M y la masa m, recibe - la acción de dos fuerzas externas, la atracción gravitacional mg que obra sobre la masa m y la fuerza ascendente ejercida por los apoyos del eje del cilindro,- que se tomará como el origen. La tensión en la cuerda es una fuerza interna y - no obra exteriormente sobre el sistema (rueda + peso). Solamente la primera de- esas fuerzas externas ejerce un momento de rotación con respecto al origen y su magnitud es (mg)R.

La cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al origen en un instante cualquiera es:

$$L = I\, w + (m\ )\ R,$$

siendo $I\, w$ la cantidad de movimiento angular del disco (dimétrico) y $(mv)R$ la -- cantidad de movimiento angular (=cantidad de movimiento lineal x brazo de pla-- ca) de la masa que cae, con respecto al origen. Ambos factores que contribuyen- a L apuntan en la misma dirección y sentido, a saber, perpendicularmente al pla no de la figura 2-13 y saliendo de ella.

Aplicando $\Gamma = \frac{dL}{dt}$ (en forma escalar) resulta.

$$(mg)R = \frac{d}{dt}\,(Iw + mvR)$$

$$= I\left(\frac{dw}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$= I\alpha + mRa.$$

Puesto que $a = \alpha R$ y $I = \frac{1}{2} MR^2$, lo anterior se reduce a

$$mgR = \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{a}{R}\right) + mRa$$

donde,

$$a = \frac{2mg}{M + 2\,m}$$

sustituyendo valores se obtiene:

$$a = \frac{2 \times 4.5\,NT}{3kg + 2 \times 0.46kg} = 2.3\ \frac{MT}{seg^2}.$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2.3\ \frac{MT}{seg^2}}{0.20} = 11.5\ \frac{rad}{seg^2}.$$

3.- Conservación de la cantidad de movimiento angular.

El principio de la conservación de la clantidad de movimiento angular dice que, "cuando el momento de rotación externo resultante que obra sobre un sistema es cero, el vector de cantidad de movimiento angular total del sistema se -- conserva constante". Esto es, si se considera que a partir de la expresión ---- $\tau ext. = \frac{dL}{dt}$ la suma de los momentos de rotación externos que obran sobre un sistema de partículas es cero (ext.= o); por lo tanto, $\frac{dL}{dt} = 0$, de manera que L =- una constante.

La cantidad de movimiento angular total Lpara un sistema con n partícula - es:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$$

Si el momento de rotación externo resultante que obra sobre el sistema es- cero, se tiene:

$$L = \text{una constante} = L_0, \qquad \text{Ecuación 3-6.}$$

donde L_0 es el vector de cantidad de movimiento angular total constante. Como - la ecuación 3-6 es una cantidad vectorial, entonces será equivalente a tres e-- cuaciónes escalares, una para cada eje de coordenadas que pase por el punto de- referencia.

Para un cuerpo rígido que gira en torno del eje z que se encuentra fijo en un marco de referencia inercial, se tiene que:

$$L_z = I\,w,$$

donde L_z es la componente de la cantidad de movimiento angular según el eje de- rotación e I el momento de inercia con respecto a ese eje. Cuando no obra nin-- gún momento de rotación externo, L_z debe permanecer constante, y si se presentará un cambio de I, debería haber también un cambio de w para poder compensar este cambio de . Para este caso, el principio de la conservación de la cantidad- de movimiento angular se expresa así:

$$I w = I_0 w_0 = \text{una constante.} \qquad \text{Ecuación 3-7.}$$

La ecuación 3-7 es aplicable a la rotación alrededor de un eje fijo, así - como también alrededor de un eje que pase por el centro de masa del sistema y - que se mueva conservándose siempre paralelo a sí mismo.

En la figura 3-4 se muestra un clavadista, que en el momento de dejar el - trampolín tiene una velocidad angular w_0 con respecto a un eje horizontal que - pasa por el centro de masa, tal que lo haría girar la mitad de una vuelta antes de llegar al agua. Si en ese instante deseará dar vuelta y media, debería tri-- plicar su velocidad angular.

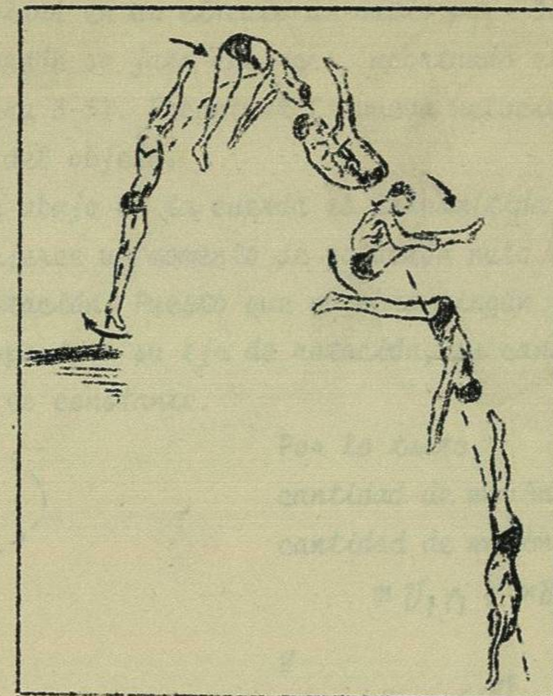

FIGURA 3-4.

Como en este caso no existen fuerzas externas obrando sobre él, excepto -- la gravedad que no provoca ningún momento de rotación con respecto a su centro de masa. Por lo tanto, su cantidad de movimiento angular permanece constante, e $I_o w_o = I w$. Como $w = 3\ w_o$, el clavadista debe cambiar su momento de inercia con respecto al eje horizontal que pasa por su centro de masa del valor inicial I_o a un valor I que es igual a $\frac{1}{3}$ $_o$. Esto lo podra lograr encogiendo sus brazoa y piernas hacia el centro de su cuerpo.

Entre mas grande sea la velocidad angular inicial que lleve el clavadista y cuatro más pueda reducir su momento de inercia, mayor será el número de revoluciones que pueda dar en un tiempo dado.

La energía cinética de rotación del clavadista no es constante.

Ya que hay un aumento de ésta proporcionado por el clavadista, quien hace trabajo al encoger las diversas partes de su cuerpo. Esto se debe a que,

$$I w = I_o w_o$$

$$o$$

$$\frac{1}{2}\ w^2 = \frac{1}{2}\ {}_o w_o^2$$

Ejemplo 3-3.

Un pequeño objeto de masa m = 80 grs. está fijo a un cordón ligero que pasa por un tubo hueco. El tubo se sostiene con una mano y el cordón con la otra.

El objeto se pone a girar en un círculo de radio r_1 = 30 cm con una velocidad - $v_1 = 630\ \frac{cm}{seg.}$. El cordón se jala entonces, acortando el radio de la trayecto-- ria a r_2 = 15cm (figura 3-5). Encontrar la nueva velocidad lineal v_2 y la nueva velocidad angular w_2 del objeto.

La tensión hacia abajo en la cuerda es transmitida como fuerza radial al - objeto. Esta fuerza ejerce un momento de rotación nulo sobre el objeto con res- pecto al centro de rotación. Puesto que no obra ningún momento de rotación so-- bre el objeto con respecto a su eje de rotación, su cantidad de movimiento angu lar en esa dirección es constante.

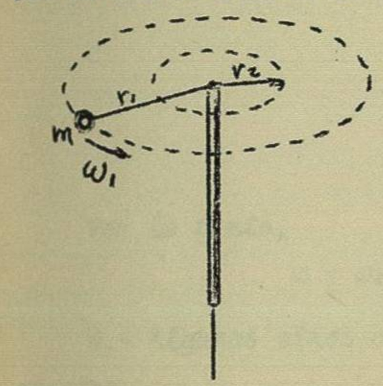

FIGURA 3-5.

Por lo tanto,

cantidad de movimiento angular inicial =

cantidad de movimiento angular final.

$$m v_1 r_1 = m v_2 r_2$$

y

$$v_2 = v_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 630\ \frac{cm}{seg.}\left(\frac{30\ cm}{15\ cm}\right) = 1260\ \frac{cm}{seg},$$

puesto que v_1 es igual a $w_1 r_1$ y v_2 es --- igual a $w_2 r_2$, se tiene,

$$m r_1^2 w_1 = m r_2^2 w_2$$

y

$$w_2 = w_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 ,$$

donde,

$$w_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{630\ \frac{cm}{seg.}}{30\ CM.} = 21\ \frac{rad}{seg},$$

por lo tanto,

$$w_2 = 21\ \frac{rad}{seg}\left(\frac{30cm}{15cm}\right)^2 = 84\ \frac{rad}{seg.}$$

Ejemplo 3-4.

Un estudiante está sentado en un banquillo que puede girar libremente alre dedor de un eje vertical. Sostiene sus brazos extendidos horizontalmente con -- una pesa de 35.6 NT en cada mano. El instructor lo pone a girar con una veloci-- dad angular de 0.50 $\frac{rev}{seg}$. Supóngase que el rozamiento es insignificante y que no ejerce ningún momento de rotación con respecto al eje vertical. Supóngase tam-- bién que el momento de inercia del estudiante permanece constante con un valor- de 5.43kg-mt^2 al acercar sus manos a sus costados y que el cambio del momento - de inercia se deba solamente a que las pesas aproximan al centro. tómese como - distancia original de las pesas al eje de rotación 0.915 MT y como su distancia- final 0.152mt. Encontrar la velocidad angular final del estudiante.

La única fuerza externa es la gravedad que obra pasando por el centro de -masa, y que no ejerce ningún momento de rotación con respecto al eje de rota--- ción. Por lo tanto, la cantidad de movimiento angular con respecto a ese eje se conserva y cantidad de movimiento angular inicial = cantidad de movimiento angular final

$$I_o w_o = I w$$

se tiene que,

$$I = I_{estudiante} + I_{pesas},$$

$$I_o = 5.43 + 2\left(\frac{35.6}{9.8}\right)(0.915)^2 = 11.51 \text{ kg-MT}^2.$$

$$I = 5.43 + 2\left(\frac{35.6}{9.8}\right)(0.152) = 5.6 \text{ kg-MT}^2.$$

$$w_o = 0.50\frac{rev}{seg} \times 2\pi = \frac{rad}{seg.}$$

Por lo tanto,

$$w = w_o\left(\frac{I_o}{I}\right) = \pi\frac{rad}{seg}\left(\frac{11.51}{5.6}\right) = 2\pi \frac{rad}{seg} = 1\frac{rev}{seg.}$$

4.- Algunos otros aspectos de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

La ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular es más fundamental que las leyes de Newton, ya que mientras la primera se aplica en física atómica y nuclear así como en las regiones celestes y macroscópicas; las de-Newton no se aplican a estas regiones atómicas y nucleares.

Para establecer el principio de la conservación se utilizó la tercera ley-de Newton para demostrar que la suma de los momentos de rotación internos era -cero. Se tubo que afirmar que las fuerzas de acción y reacción eran iguales y -opuestas y que estaban dirigidas sobre la línea que une las dos partículas.

Para un sistema de cuerpos que se pueden considerar como partículas, la --ley de la conservación es aplicable siempre y cuando los efectos debidos a la -rotación de los cuerpos individuales se puedan despreciar. Cuando los cuerpos -individuales estpan en rotación, el principio de la conservación es validó si -se incluye la cantidad de movimiento angular debida a esa rotación.

Cuando aplicamos la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular total a la física atómica y nuclear se encuentra que los electrones, protones, mesones y neutrones, tienen cantidad de movimiento angular debida a al--gún movimiento de rotación intrínseco y a un movimiento orbital alrededor de algún punto externo, que debe ser incluida al calcular la cantidad de movimiento-angular total.

Las cantidades de movimiento angulares para los sistemas atómicos, molecu-