CAPITULO IV

O S C I L A C I O N E S

1.- Introducción. Oscilaciones.

En el presente capítulo se estudiará el movimiento de un cuerpo cuando la fuerza resultante que actúa sobre él no es constante, sino que varía durante el movimiento. Como esta fuerza puede variar de infinitas maneras, no se pueden -- dar expresiones generales para el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza variable, excepto que la aceleración en un instante cualquiera es igual a la -- fuerza en dicho instante, dividida por la masa del cuerpo. Un caso particular - de variación que se presenta en la práctica con mucha frecuencia, es la fuerza elástica recuperadora que se origina al deformarse un cuerpo, abandonado en estado de deformación.

Algunos ejemplos de esta clase de movimiento son la vibración hacia arriba y hacia abajo que se presenta cuando se estira hacia abajo un cuerpo suspendido de un resorte y se abandona a sí mismo; las vibraciones de las cuerdas de los - instrumentos musicales; las oscilaciones del balancín de un reloj; los átomos - en las moléculas, etc.

Debido a que las ecuaciones de movimiento contienen senos o cosenos, y que las expresiones donde figuran estas funciones se llaman armónicas, este tipo de movimiento vibratorio se llama movimiento armónico.

Así como existen oscilaciones mecánicas también las hay electromagnéticas, tales como, las ondas de radio, las microondas y la luz visible.

En la figura 4-1 se representa una laminilla de acero sujeta verticalmente en un tornillo de banco, en su extremo superior lleva soldada una pequeña masa. Supóngase que la lámina es lo suficientemente larga y el desplazamiento lo bastante pequeño para poder considerar el movimiento rectilíneo. Su póngase además despreciable la masa de la laminilla.

Si se separa el extremo superior de la lámina hacia la derecha una distancia A, y se abandona en esa posición, la masa soldada queda sometida a una fuerza recuperadora ejercida por la lámina de acero y dirigida hacia la posición de equilibrio O. En consecuencia, adquiere una aceleración en la dirección de esta fuerza, y se mueve hacia el centro con velocidad creciente. Como la fuerza aceleradora disminuye cuando el cuerpo se aproxima al centro, la aceleración no será constante.

En este ejemplo, despues de iniciada la oscilación y al transcurrir el --- tiempo la elongación A, la velocidad y la aceleración del cuerpo cambian periódicamente tanto en magnitud como en sentido, y debido a la relación F = ma, en- igual forma cambia la fuerza F que obra sobre el cuerpo.

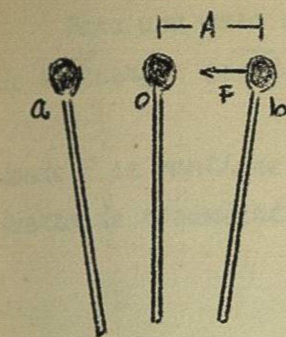

FIGURA 4-1

Cuando el cuerpo alcanza la posición de equilibrio, se anula la fuerza recuperador; pero, a causa de la velocidad adquirida, el cuerpo sobrepasa la posición de equilibrio y continúa su movimiento hacia la izquierda.

En cuanto ha pasado la posición de equilibrio, entra en juego de nuevo la fuerza recuperadora, dirigida ahora hacia la derecha, y, por lo tanto, el cuerpo va perdiendo velocidad con una aceleración negativa cuyo valor absoluto aumenta al aumentar la distancia del cuerpo a O. Debido a esto el cuerpo se detendrá en algún punto situado a la izquierda de O, y repetirá su movimiento en sentido opuesto.

Cada movimiento de vaivén tiene lugar en el mismo tiempo, y el movimiento tiene un alcance $\pm$ A a cada lado de la posición de equilibrio. Si no existiera pérdida de energía por rozamiento el movimiento continuaría indefinidamente una vez iniciado. Al movimiento bajo la acción de una fuerza recuperadora y en ausencia de todo rozamiento, se le llama movimiento armónico simple.

El tipo de movimiento que se repite en intervalos de tiempos iguales se le llama periódico, y si el movimiento es hacia adelante y hacia atrás sobre la misma trayectoria, se le llamo oscilatorio.

Una oscilación o vibración completa es el movimiento efectuado hasta volver al punto de partida, esto es, de <u>a</u> a <u>b</u> y volver a <u>a</u>. El período T del movimiento, es el tiempo empleado en realizar una vibración completa. La frecuencia f. es el número de vibraciones completas realizadas en la unidad de tiempo y es el valor recíproco del período, o sea:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{Ecuación 4-1}$$

La elongación x en un instante dado es la distancia a la posición de equilibrio, en dicho instante. La amplitud A es la elongación máxima.

Si la masa de la figura 4-1 oscila entre los límites fijos x_1 y x_2 con un movimiento armónico, experimenta un vaiven con respecto a su punto de equilibrio en el cuál su energía potencial es mínima. La fuerza recuperadora que actúa sobre la masa en un instante cualquiera se obtiene a partir de la función de energía potencial,

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

siendo nula en la posición de equilibrio O. Cuando la masa se encuentra a la izquierda de O la fuerza apunta hacia la derecha y vicebersa. Esto se muestra en la figura 4-2.

Para una masa que oscila la energía mecánica total E será igual a la suma de su energía cinética y su energía potencial, esto es,

$$E = K + U, \qquad \text{Ecuación 4-2}$$

donde E se mantiene constante, si no obra ninguna fuerza conservativa, como la fuerza de rozamiento.

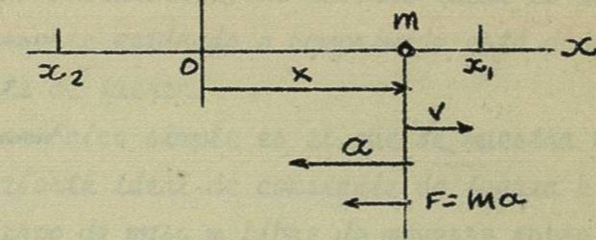

FIGURA 4-2

2.- El oscilador armónico simple.

Cuando una partícula de masa m oscila entre límites iguales, a ambos lados de su posición de equilibrio, tales como -x y x, se le llama oscilador armónico simple y su movimiento se le conoce con el nombre de movimiento armónico simple figura 4-3a.

En la figura 4-3b se representa gráficamente la energía potencial de la -- partícula, la cuál varía de acuerdo con la ecuación,

$$U\ (x) = \frac{1}{2}\,Kx^2, \qquad \text{Ecuación 4-3}$$

donde k es una constante, además se muestra la energía mecánica total. La fuerza que obra sobre la partícula está dada por la ecuación,

$$F\ (x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(\frac{1}{2}\ kx^2)}{dx} = -\ kx, \qquad \text{Ecuación 4-4}$$

y se representa gráficamente en la figura 4-3c.

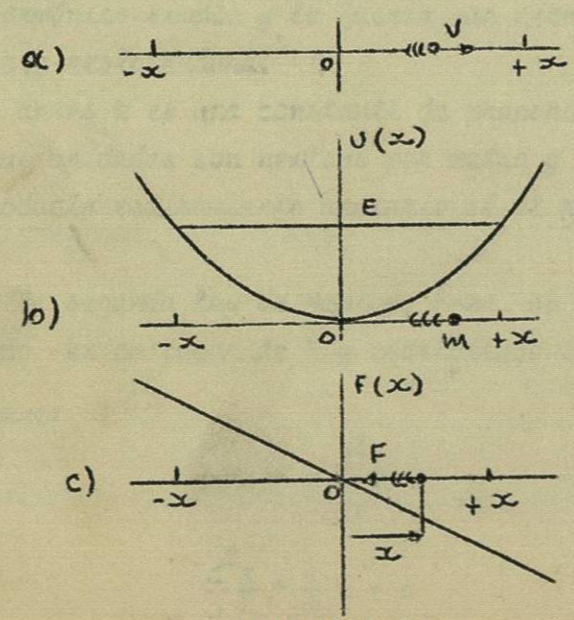

FIGURA 4-3.

En el movimiento armónico simple la energía potencial varía proporcionalmente al cuadrado de la elongación, y la fuerza que obra sobre la partícula es proporcional a la elongación pero con sentido opuesto.

La ecuación 4-3 es la expresión de la energía potencial para un resorte ideal, que se estira o comprime una distancia x. El resorte ideal es aquél en el cuál la fuerza ejercida por el resorte estirado o comprimido está dada por ---- F9x) = - kx, siendo k la constante de fuerza.

Un ejemplo de un oscilador armónico simple es el que se muestra en la figura 4-4, el cuál consiste de un resorte ideal de constante de fuerza k en cuyo - extremo se encuentra unido un cuerpo de masa m libre de moverse sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Cuando el resorte se deja libre toma la posición que se muestra en la figura 4-4a, donde la fuerza ejercida por el resorte es nula.

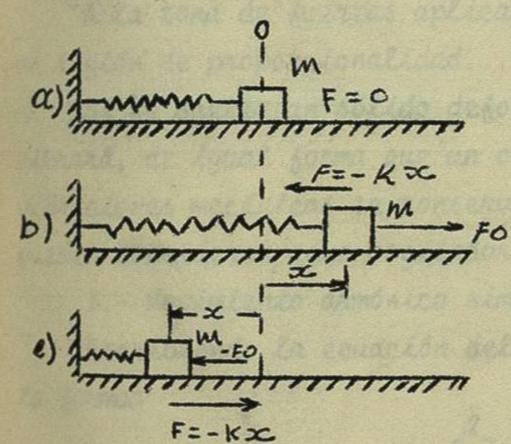

FIGURA 4-4

Si se aplica una fuerza Fo, el resorte se estira una distancia x, hacia la derecha, la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la izquierda y está dada por F = - kx, (difura 4-4b). Bajo la acción de una fuerza -Fo, el resorte se comprime hacia la izquierda una distancia -x, la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la derecha y se dá por F = - kx, figura 4-4c.

El movimiento de la masa que oscila - es un movimiento armónico simple y la fuerza que ejerce el resorte sobre el --- cuerpo es una fuerza restauradora.

Como ya dijo antes k es una constante de proporcionalidad llamada constante del resorte. Sus unidades son newtons por metro y es una medida de la fuerza requerida para producir estiramiento unitario si el resorte fuera completamente extensible.

Si se aplica la segunda ley de Newton, F=ma, al movimiento de la figura -- 4-4, y sustituyendo -kx en lugar de F y escribiendo la aceleración a como $\frac{d^2x}{dt^2}$ ($=\frac{dV}{dt}$), se obtiene:

$$-kx = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x = 0 \qquad \text{Ecuación 4-5}$$

Al desarrollar está ecuación diferencial se sabrá como está relacionada la elongación x con el tiempo t y de esta manera se conocerá el movimiento del cuerpo o partícula. Por esto a la ecuación 4-5 se le conoce como la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

El oscilador armónico simple es importante, ya que en la mayoría de los problemas donde existen vibraciones mecánicas, el problema se reduce al de un oscilador armónico simple, siempre y cuando las vibraciones sean pequeñas. También es importante ya que la ecuación 4-5 se aplica en problemas físicos en mecánica, ó ptica, acústica, circuitos eléctricos y en física atómica.

La ecuación 4-4 fué descubierta por Robert Hooke (1635-1703) y se le conoce como la Ley de Hooke. Esta ley se aplica a todos los cuerpos elásticos siempre que las deformaciones sean pequeñas, cuando la deformación sobrepasa el límite elástico esta ley no se cumple.

A la zona de fuerzas aplicadas donde la Ley de Hooke es válida, se le llama región de proporcionalidad.

Si se suelta un sólido deformado dentro de la región de proporcionalidad, vibrará, de igual forma que un oscilador armónico simple. Por lo tanto, si las vibraciones mecánicas se conservan dentro de la región de proporcionalidad, se pueden considerar como osciladores armónicos simples.

3.- Movimiento armónico simple.

Escribiendo la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \,, \qquad \text{Ecuación 4-6}$$

se podrá encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, para ello se deberá determinar una función $x(t)$ que satisfaga esta relación.

Esto es, se requiere que x sea una función de t, tal que su segunda derivada respecto a t, sea igual al valor negativo de la función misma $(-x)$, multiplicada por una constante $(\frac{R}{m})$.

Esta circunstancia sugiere que x es una función trigonométrica de t. De donde se encuentra que por cálculo, la función seno o la funcion coseno poseen esta propiedad. Por ejemplo, $\frac{d}{dt}\cos t = -\operatorname{sen} t$ y $\frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t = -\cos t$.

Si esta función se multiplica por una constante A, la propiedad no se altera y de igual forma sucede con la función seno.

Como la ecuación 4-6 contiene un factor constante, se puede suponer como solución de la ecuación 4-6, la siguiente:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad \text{Ecuación 4-7.}$$