Al desarrollar está ecuación diferencial se sabrá como está relacionada la elongación x con el tiempo t y de esta manera se conocerá el movimiento del cuerpo o partícula. Por esto a la ecuación 4-5 se le conoce como la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

El oscilador armónico simple es importante, ya que en la mayoría de los problemas donde existen vibraciones mecánicas, el problema se reduce al de un oscilador armónico simple, siempre y cuando las vibraciones sean pequeñas. También es importante ya que la ecuación 4-5 se aplica en problemas físicos en mecánica, ó ptica, acústica, circuitos eléctricos y en física atómica.

La ecuación 4-4 fué descubierta por Robert Hooke (1635-1703) y se le conoce como la Ley de Hooke. Esta ley se aplica a todos los cuerpos elásticos siempre que las deformaciones sean pequeñas, cuando la deformación sobrepasa el límite elástico esta ley no se cumple.

A la zona de fuerzas aplicadas donde la Ley de Hooke es válida, se le llama región de proporcionalidad.

Si se suelta un sólido deformado dentro de la región de proporcionalidad, vibrará, de igual forma que un oscilador armónico simple. Por lo tanto, si las vibraciones mecánicas se conservan dentro de la región de proporcionalidad, se pueden considerar como osciladores armónicos simples.

3.- Movimiento armónico simple.

Escribiendo la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple, en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \qquad \text{Ecuación 4-6}$$

se podrá encontrar la posición de la partícula en función del tiempo, para ello se deberá determinar una función $x(t)$ que satisfaga esta relación.

Esto es, se requiere que x sea una función de t, tal que su segunda derivada respecto a t, sea igual al valor negativo de la función misma $(-x)$, multiplicada por una constante $(\frac{R}{m})$.

Esta circunstancia sugiere que x es una función trigonométrica de t. De donde se encuentra que por cálculo, la función seno o la funcion coseno poseen esta propiedad. Por ejemplo, $\frac{d}{dt}\cos t = -\operatorname{sen} t$ y $\frac{d^2}{dt^2}\cos t = -\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t = -\cos t$.

Si esta función se multiplica por una constante A, la propiedad no se altera y de igual forma sucede con la función seno.

Como la ecuación 4-6 contiene un factor constante, se puede suponer como solución de la ecuación 4-6, la siguiente:

$$x = A\cos(wt + \delta) \qquad \text{Ecuación 4-7.}$$

Para determinar las constantes A, W y δ, y saber si la ecuación 4-7 es la solución de la ecuación 4-6, es necesario encontrar la segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación 4-7. Esto es, $\frac{dx}{dt} = - W A \text{ sen } (wt + \delta)$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - w^2 A \cos (wt + \delta).$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 4-6, se tiene:

$$- w^2 A \cos (wt + \delta) = - \frac{k}{m} A \cos (wt + \delta),$$

si se supone que la constante w es,

$$w^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{Ecuación 4-8}$$

se encuentra que,

$$x = A\cos (wt + \delta),$$

que es la solución adecuada para la ecuación de un oscilador armónico simple.

Como las constantes A y δ siguen siendo arbitrarias, para cualquier valor de las mismas quedará satisfecha la ecuación 4-6 y se podrá determinar una gran variedad de movimientos para el oscilador, o sea, que ésta ecuación describe un grupo de movimientos posibles con algunas características comunes.

Si en la ecuación 4-7, el tiempo t se aumenta en $\frac{2\pi}{w}$, la función resulta,

$$x = A\cos \left[w(t + \frac{2\pi}{w}) + \delta \right] = A\cos (wt + 2\pi + \delta)$$

$$x = A \cos (wt + \delta).$$

Significando esto, que la función simplemente se repite exactamente igual despues de un tiempo $\frac{2\pi}{w}$. Como $\frac{2\pi}{w}$ es el período T del movimiento y sabiendo que $w^2 = \frac{k}{m}$ se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad \text{Ecuación 4-9.}$$

El período de oscilación es el mismo para todos los movimientos dados por la ecuación 4-6 y se determina por la masa m del cuerpo o partícula que vibra y por la constante de fuerza k. La frecuendia f del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo, y se obtiene por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{Ecuación 4-10.}$$

La frecuencia angular w se encuentra a partir de:

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \qquad \text{Ecuación 4-11.}$$

Al utilizar las ecuaciones 4-9 o 4-10, m debe estar en slugs, kilogramos o gramos y k en $\frac{kg}{mt}$, $\frac{nt}{mt}$ o $\frac{dinas}{cm.}$. La frecuencia f, se expreza en $\frac{ciclos}{seg}$, y el período T, en $\frac{seg}{ciclos}$. Las unidades de la frecuencia angular w son $\frac{radianes}{seg}$.

La elongación x con respecto al punto de equilibrio, tiene un valor máximo A, que es la amplitud del movimiento. Puesto que A no ha sido determinada por -

la ecuación diferencial, son posibles movimientos con diferentes amplitudes, pero todos tienen la misma frecuencia y período. La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.

El término $(wt + \delta)$ se le llama fase del movimiento, y a la constante δ, constante de fase. Si dos movimientos tienen la misma amplitud y frecuencia pero diferente fase. Por ejemplo, si $\delta = -\frac{\pi}{2}$. La ecuación 4-7 resulta:

$$x = A \cos (wt + \delta) = A \cos (wt - 90°) = A \text{ sen } wt.$$

Esto es, la elongación es cero para el tiempo $t = 0$. Si $\delta = 0$, la elongación $x = A \cos wt$ tiene un valor máximo para el tiempo $t = 0$.

La amplitud A y la constante de fase δ de la oscilación se determinan por la posición y la velocidad iniciales de la partícula. Sin embargo, una vez que se inicia el movimiento, la partícula sigue oscilando con una amplitud constante y una constante de fase para una cierta frecuencia fija, a menos que otras fuerzas alteren el sistema.

En la figura 4-5, se representa gráficamente la elongación x en función del tiempo t para diferentes movimientos armónicos simples. La figura 4-5a, representa los movimientos 1 y 2 que tienen igual amplitud y frecuencia, pero de fase diferente cuyo valor es $\delta = \frac{\pi}{4} = 45°$. La figura 4-5b, muestra los movimientos 1 y 3 con igual frecuencia y constante de fase, pero con amplitud diferente que difiere en un factor de 2. La figura 4-5c, representa los movimientos 1 y 4 con igual amplitud y constante de fase, pero con diferente frecuencia, que difiere por un factor de $\frac{1}{2}$ o en período por un factor de 2.

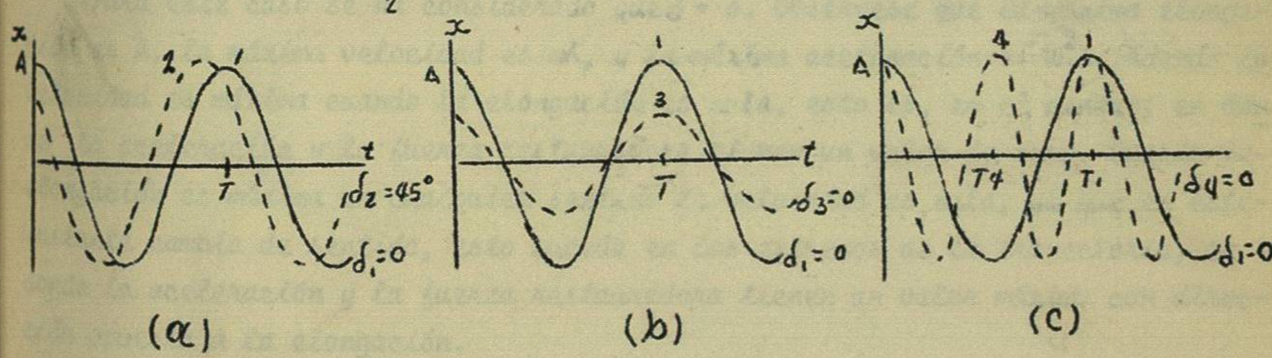


FIGURA 4-5

Para comprender mejor lo que es el movimeinto armónico simple, es conveniente representar la elongación, velocidad y aceleración de la partícula que oscila por medio de gráficas en función del tiempo, como se hace en la figura 4-6; donde se han representado estas cantidades para la curva 1 de la figura 4-5.

Estas cantidades pueden considerarse como representaciones gráficas de las *ecuaciones:*

$$x = A \cos (wt + \delta)$$

$$\mathcal{V} = \frac{dx}{dt} = - wA \operatorname{sen} (wt + \delta) \qquad \text{Ecuación 4-12.}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt} = \frac{d\mathcal{V}}{dt} = - w^2 A \cos (wt = \delta).$$

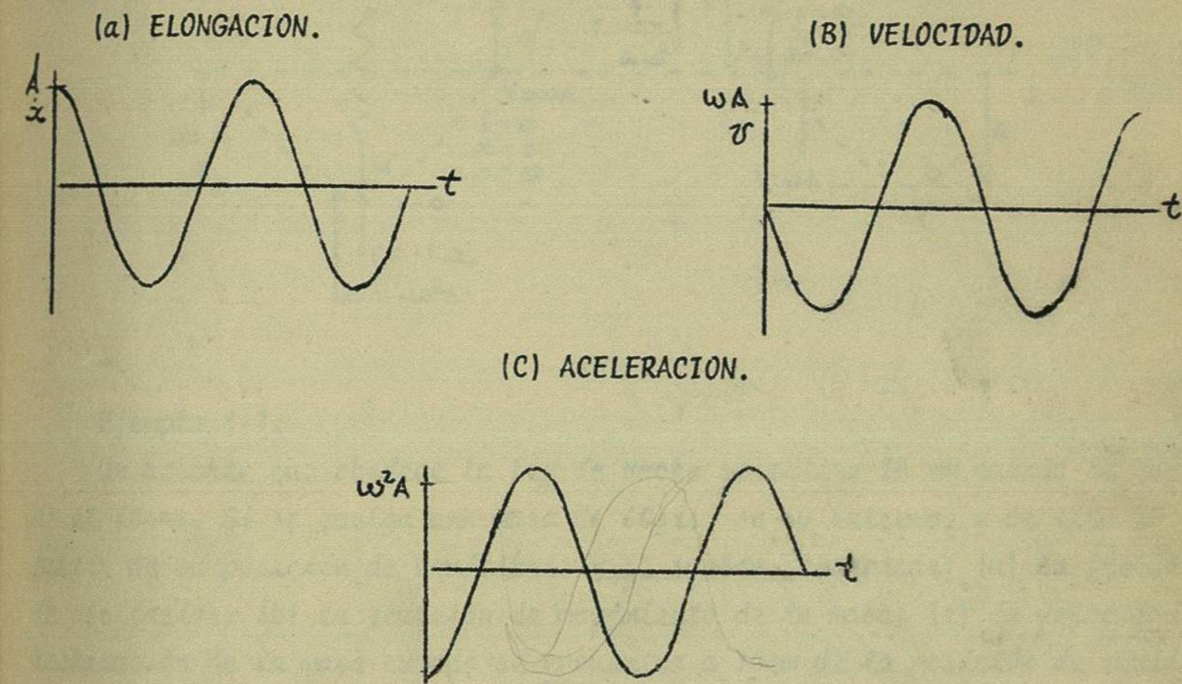


FIGURA 4-6.

Para este caso se ha considerado que δ = o. Obsérvese que la máxima elongación es A, la máxima velocidad es wA, y la máxima aceleración es w^2A. Además la velocidad es máxima cuando la elongación es nula, esto es, en el centro; en donde la aceleración y la fuerza restauradora tienen un valor de cero. Cuando la elongación es máxima en cualquier sentido la velocidad es nula, ya que en este instante cambia de sentido, esto sucede en los extremos de la trayectoria, en donde la aceleración y la fuerza restauradora tienen un valor máximo con dirección opuesta a la elongación.

Cuando la partícula se mueve hacia el punto de equilibrio la velocidad aumenta y disminuye al acercarse a la máxima elongación.

En la figura 4-7, se muestra el movimiento de una partícula que oscila en el extremo de un resorte, y se representan los valores instantáneos de x, v y a, para cuatro instantes.

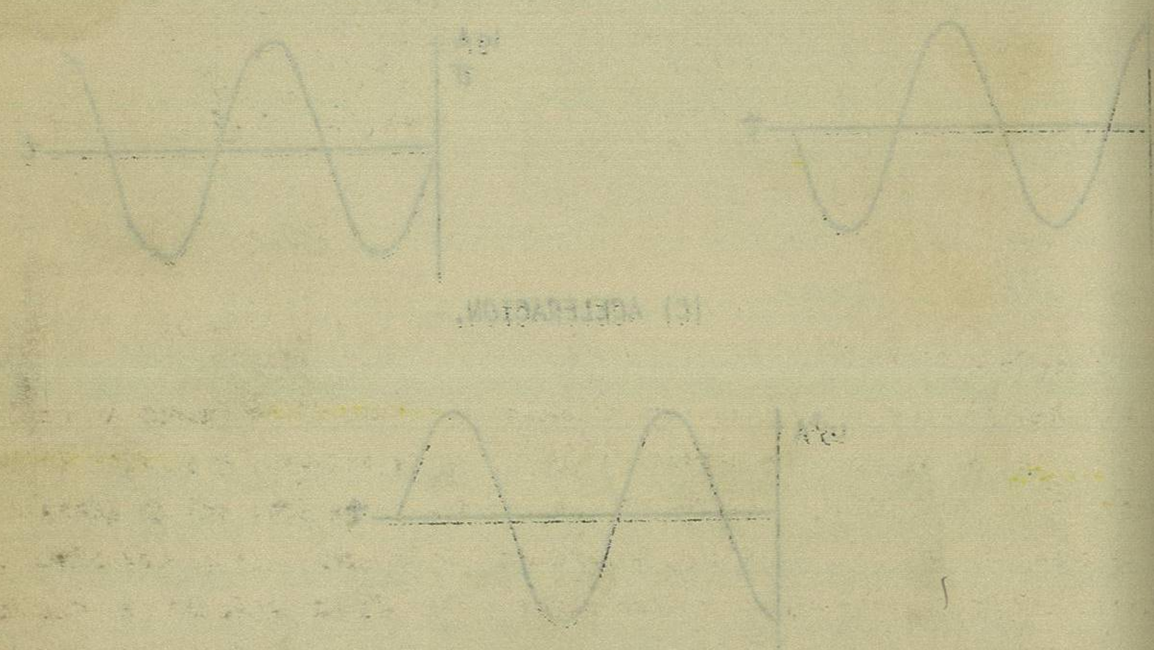
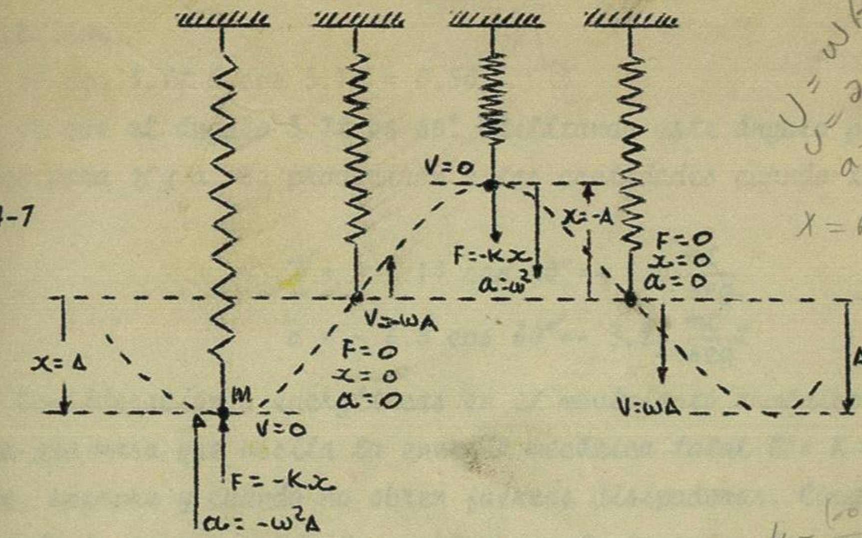


FIGURA 4-7



$V = \omega A$
$V = 2\pi f (.2) = 1.14 \text{ rad/seg}$
$a = \omega^2 A = 6.53$
$x = A \cos \omega t$
$x = .20 \cos \omega t$
$x = .20 \cos (5.71) t$
$\omega = 2\pi f$
$k = \frac{(.04)9.8}{.2} = 1.96 \text{ N/mts}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{.06}{1.96}} = 1.09 \quad f = \frac{1}{T_{seg}} = .91 \text{ ciclos/seg}$

Ejemplo 4-1.

Un resorte que obedece la Ley de Hooke se estira 20 cm cuando se cuelgan de él 40grs. Si se cuelga una masa de 60grs. en su extremo, y se tira 20 cm. a partir de su posición de equilibrio y se suelta, encontrar: (a) la frecuencia de oscilación; (b) la ecuación de movimiento de la masa; (c) la velocidad y la aceleración de la masa cuando se encuentra a 10cm de la posición de equilibrio.

A partir de la relación $k = \frac{F}{x}$, se encuentra la constante k del resorte; en virtud de que 40grs. lo alarga 20cm:

$$K = \frac{F}{x} = \frac{0.040kg \times 9.8 \, mt/seg^2}{0.20mt.} = 1.96 \, \frac{NT}{Mt.}$$

Utilizando las ecuaciones 4-9 y 4-10 se encuentra el período T, y la frecuencia f. De esta manera,

$$a) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.060}{1.96}} \text{ seg} = 1.1 \text{ seg.}$$

y,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.1} = 0.91 \, \frac{ciclos}{seg} \; (\text{o hertz}).$$

La amplitud del movimiento es 0.20mt, y tiene su desplazamiento máximo en t=0. Por lo tanto, x es una función coseno y es,

$$b) \quad x = A\cos \omega t = A\cos 2\pi f t = 0.20 \cos 2\pi \times 0.91t,$$

que da,

$$x = 0.20 \cos 5.7t \text{ mts.}$$

Para encontrar las ecuaciones de velocidad y aceleración, se obtienen la primera y segunda derivada de x con respecto a t. Esto es,

$$c) \quad v = \frac{dx}{dt} = 0.20\,(-5.7 \text{sen} 5.7t) = -1.14 \text{sen } 5.7t. \, \frac{mt}{seg}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -1.14\,(5.7 \cos 5.7t) = -6.5 \cos 5.7t. \, \frac{mt}{seg^2}$$