ye); la energía potencial debe disminuir (o aumentar), ya que la suma de estas dos energías debe dar siempre un valor constante de $\frac{1}{2} K A^2$.

La energía total de una partícula que tiene un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

De la ecuación 4-15, se puede escribir:

$$K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

y obtener
$$v^2 = \left(\frac{K}{m}\right) (A^2 - x^2), \text{ o sea,}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{K}{m} (A^2 - x^2)}, \qquad \text{Ecuación 4-16}$$

Esta ecuación indica claramente que la velocidad es máxima en el punto de equilibrio x=o, y que es nula en la posición de máxima elongación x= A.

Ejemplo 4-2.

a) Calcular las energías cinética y potencial de la masa del ejemplo 4-1, para la posición que indica la pregunta c; así como la energía total del sistema oscilante. b) Calcular la energía potencial máxima y la energía cinética máxima.

Para esta posición $x = 0.10mt$, $v = -1 \frac{MT}{seg}$ y $a = -3.25 \frac{MT}{seg^2}$

por lo tanto:

a) $$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (0.060) (-1)^2 = 0.030 \text{ NT-MT}.$$

y
$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (1.96) (0.10)^2 = 0.0098 \text{ NT-MT}.$$

Puesto que se conserva la energía total, se puede calcular en cualquier etapa del movimiento. Haciendo uso de los resultados anteriores, se tiene:

b) $E = K+U = 0.030 + 0.0098 = 0.0398$ nt-mt. (masa en x=o.10m).

$U_{max} = \frac{1}{2} K X^2max = \frac{1}{2} (1.96) (0.20) = 0.0392$ nt-mt. (masa en x=A).

$$v_{max} = WA = 5.7 \times 0.20 = 1.14 \text{ mt/seg}.$$

$K_{max} = \frac{1}{2} m v^2 max. = \frac{1}{2} (0.060) (1.14)^2 = 0.039$ nt-mt. (masa en x=o).

5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.

Péndulo simple, péndulo de torsión, y pédulo físico.

El péndulo común es un sistema físico que sufre movimiento oscilatorio. -- Que el movimiento sea armónico simple, o no lo sea, es decir, de forma sendidal depende de si el sistema obedece la ecuación diferencial 4-5 o no lo hace.

A continuación se hará un estudio de anglunos sistemas físicos que se mueven con movimiento armónico simple.

El péndulo simple:

El péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida-

...ía la energía potencial debe disminuir (o aumentar), ya que la suma de estas energías debe dar siempre un valor constante de $\frac{1}{2}K A^2$.

La energía total de una partícula que tiene un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento.

De la ecuación 4-15, se puede escribir:

$$K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} K A^2$$

y obtener

$$v^2 = \left(\frac{k}{m}\right)(A^2 - x^2), \text{ o sea,}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}, \qquad \text{Ecuación 4-16}$$

Esta ecuación indica claramente que la velocidad es máxima en el punto de equilibrio x=0, y que es nula en la posición de máxima elongación x= A.

Ejemplo 4-2.

a) Calcular las energías cinética y potencial de la masa del ejemplo 4-1, en la posición que indica la pregunta c); así como la energía total del sistema oscilante. b) Calcular la energía potencial máxima y la energía cinética máxima.

Para esta posición x = 0.10mt, $v = 1\frac{MT}{seg}$ y $a = -3.25\frac{MT}{seg^2}$

Por lo tanto:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}(0.060)(-1)^2 = 0.030 \text{ NT-MT}.$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2}(1.96)(0.10)^2 = 0.0098 \text{ NT-MT}.$$

Puesto que se conserva la energía total, se puede calcular en cualquier punto del movimiento. Haciendo uso de los resultados anteriores, se tiene:

$$E = K+U = 0.030 + 0.0098 = 0.0398 \text{ nt-mt. (masa en x=0.10m).}$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} K x^2_{max} = \frac{1}{2}(1.96)(0.20) = 0.0392 \text{ nt-mt. (masa en x=A).}$$

$$v_{max} = WA = 5.7 \times 0.20 = 1.14 \text{ mt/seg.}$$

$$K_{max} = \frac{1}{2} m v^2_{max} = \frac{1}{2}(0.060)(1.14)^2 = 0.039 \text{ nt-mt. (masa en x=0).}$$

5.- Aplicaciones del movimiento armónico simple.

Péndulo simple, péndulo de torsión, y péndulo físico.

El péndulo común es un sistema físico que sufre movimiento oscilatorio, -- ya el movimiento sea armónico simple, o no lo sea, es decir, de forma senoidal, depende de si el sistema obedece la ecuación diferencial 4-5 o no lo hace.

A continuación se hará un estudio de algunos sistemas físicos que se mueven con movimiento armónico simple.

El péndulo simple:

El péndulo simple consiste en una masa de pequeñas dimensiones suspendida-

de un hilo inextensible y sin peso. Cuando se separa hacia un lado de su posi-- ción de equilibrio y se abandona a sí misma, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad, con un movimiento periódico y oscilatorio.

La condición para que un cuerpo realice un movimiento armónico es que se - encuentre sometido a una fuerza recuperadora F, directamente proporcional a la-elongación x, y con dirección opuesta. La trayectoria de la masa del péndulo no es una recta, sino un arco de circunferencia de radio L, donde L es la longitud de la cuerda soporte. La elongación se refiere a distancias medidas a lo largo-de este arco (figura 4-8). Por lo tanto, si F=-kx el movimiento será armónico - simple, o bien, como x= Lθ, la condición se escribe F=-k L θ.

En la figura 4-8 se representa un péndulo de longitud L, una partícula de-masa m, formando un ángulo θ con la vertical en el instante en que su elongación es x. Las fuerzas que se ejercen sobre la masa del péndulo son mg, la fuerza gravita--cional, y la tensión en la cuerda T. Elíjase dos ejes, uno en la dirección de-la tangente y otro en la dirección del radio y descompongase el peso en sus compo--nentes según estos ejes. La componente radial de la fuerza mg es la magnitud mg cos θ y la componente tangencial es la - magnitud mgsenθ. Las fuerzas que provocan la aceleración centrípeta necesaria - para conservar la partícula moviendose en el arco del círculo son las componentes radiales. La componente tangencial es la fuerza recuperadora que obra sobre m y que tiende a regresarla a su posición de equilibrio y es,

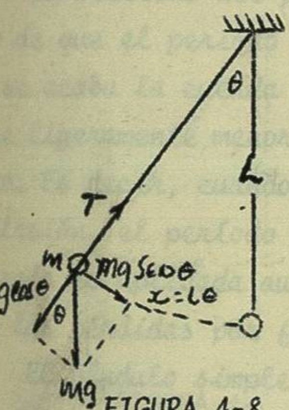

FIGURA 4-8.

$$F = - mgsen\theta. \qquad \text{Ecuación 4-17}$$

Por lo tanto, la fuerza recuperadora no es proporcional de desplazamiento-angular θ, sino a sen θ, y, en consecuencia, el movimiento no es armónico sim--ple. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, sen θ es aproximadamente igual a θ en radianes y la ecuación 4-17 se convierte en,

$$F = - mg\theta,$$

sabiendo que el desplazamiento a lo largo del arco es x = Lθ, se obtiene:

$$F = - mg\frac{x}{L} = - \frac{mg}{L}x .$$

Por lo tanto, la fuerza recuperadora es entonces, para elongaciones pequeñas, proporcional a la elongación y de dirección contraria a ella; que es exactamente el criterio que determina el movimiento armónico simple. La fracción $\frac{mg}{L}$ representa la constante k en F=-kx. El período de un péndulo simple cuando su -

amplitud es pequeña está dado por,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{Ecuación 4-18}$$

Se puede demostrar que la ecuación general del período de una oscilación,- para la elongación angular máxima α, es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{2^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right).$$

El período se puede calcular con toda la aproximación que se desee tomando suficiente número de términos en la serie infinita. Cuando $\alpha = 15°$ (a cada lado de la posición central), el período exacto difiere en menos de 0.5% del período calculado por la ecuación 4-18.

La utilidad del péndulo para la medición del tiempo, está basada en el hecho de que el período es prácticamente independiente de la amplitud. Así, cuando se acaba la cuerda de un reloj, y por tanto, la amplitud de la oscilación se hace ligeramente menor, el reloj indicará todavía un tiempo aproximadamente exacto. Es decir, cuando las fuerzas amortiguadoras reducen la amplitud de la oscilación, el período permanece casi inalterado. En un reloj de péndulo, la --- energía es aplicada automáticamente mediante un mecanismo de escape para compensar las pérdidas por fricción.

El péndulo simple es, también, un dispositivo preciso y adecuado para medir la aceleración de la gravedad g, sin acudir a la caída libre en un cuerpo,- puesto que L y T pueden medirse fácilmente.

Ejemplo 4-3.

Un péndulo simple de 2 mts. de longitud oscila con amplitud de 40cm. a) -- Calcúlese su velocidad en el punto más bajo. b) Calcúlese su aceleración en los extremos de la trayectoria. Primeramente se calcula el período de oscilación a partir de la ecuación 4-18, resultando:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9.8}} = 2.85 \approx 3 \frac{\text{ciclos}}{\text{seg.}}$$

La velocidad en el punto más bajo, es cuando x = 0, y corresponde a la posición de equilibrio donde la velocidad es máxima. Aplicando la ecuación 4-12,- se obtiene:

$$V_{max} = W A = \frac{2\pi}{T} A = \left(\frac{2\pi}{3}\right) 0.40 = 0.837 \frac{mt}{seg.}$$

La aceleración en los extremos de la trayectoria, es cuando x=A, y son los puntos donde la aceleración es máxima. De la ecuación 4-12, se obtiene:

$$a_{max} = W^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 0.40 = 1.75 \frac{mt}{seg^2}$$