El péndulo de torsión:

El péndulo de torsión se representa en la figura 4-9 y consiste en un disco supendido de un alambre fijo al centro de masa del disco. La línea Op es la posición de equilibrio del disco. Al hacer girar el disco hasta el punto Q, el alambre se tuerce y ejerce un momento de rotación sobre el disco, tendiendo a regresarlo al punto P.

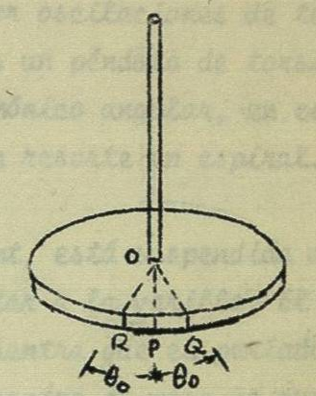


FIGURA 4-9

El péndulo de torsión obedece a la ley de Hooke, ya que para pequeñas torsiones el momento restaurador es proporcional a la torsión, o sea, al desplazamiento angular. Por lo tanto, para el momento restaurador se escribe,

$$\Gamma = -k\theta, \qquad \text{Ecuación 4-19}$$

donde k es la llamada constante de torsión del sistema, y depende de las propiedades del alambre. El signo menos se debe a que el momento de rotación tiene dirección opuesta al desplazamiento angular θ. La ecuación 4-19 es la condición del movimiento armónico angular simple.

La ecuación del movimiento para este sistema es:

$$\Gamma = I\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

sustituyendo la ecuación 4-19 se tiene:

$$-k\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o sea,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\,\theta \qquad \text{Ecuación 4-20}$$

La solución de la ecuación 4-20 es una oscilación armónica simple. En virtud de que la ecuación 4-20 para el movimiento armónico angular simple es similar en forma a la ecuación 4-6 del movimiento armónico lineal, de inmediato se puede escribir la solución para la vibración de torsión, teniendo como coordenada el ángulo θ, se tiene:

$$\theta = \theta_0 \cos\,(\omega t + \delta\,), \qquad \text{Ecuación 4-21}$$

siendo θ_0 el máximo desplazamiento angular, o sea, la amplitud de la oscilación angular.

Por analogía con la ecuación 4-9, el período de oscilación es:

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad \text{Ecuación 4-22}$$

Obiamente, puede usarse el período de un péndulo de torsión para medir momentos de inercia, o para determinar la constante de torsión k de cualquier ---

El péndulo de torsión:

El péndulo de torsión se representa en la figura n y consiste en un disco suspendido de un alambre, fi e al centro de masa del disco. La línea Op es la po ición de equilibrio del disco. Al hacer girar el dis o hasta el punto Q, el alambre se tuerce y ejerce un mento de rotación sobre el disco, tendiendo a regre sto al punto P.

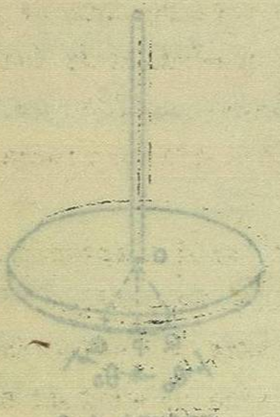


FIGURA 4-9

El péndulo de torsión obedece a la Ley de Hooke, n que para pequeñas torsiones el momento restaurador s proporcional a la torsión, o sea, al desplazamien o angular. Por lo tanto, para el momento restaurador e escribe,

$$\tau = -k\theta, \qquad \text{Ecuación 4-19}$$

onde k es la llamada constante de torsión del sistema, y depende de las propie ades del alambre. El signo menos se debe a que el momento de rotación tiene di ección opuesta al desplazamiento angular θ. La ecuación 4-19 es la condición el movimiento armónico angular simple.

La ecuación del movimiento para este sistema es:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ustituyendo la ecuación 4-19 se tiene:

$$-k\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

sea,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I}\theta \qquad \text{Ecuación 4-20}$$

La solución de la ecuación 4-20 es una oscilación armónica simple. En vir d de que la ecuación 4-20 para el movimiento armónico angular simple es simi r en forma a la ecuación 4-6 del movimiento armónico lineal, de inmediato se ede escribir la solución para la vibración de torsión, teniendo como coordena el ángulo θ, se tiene:

$$\theta = \theta_0 \cos (wt + \delta), \qquad \text{Ecuación 4-21}$$

onde θ_0 el máximo desplazamiento angular, o sea, la amplitud de la oscilación ngular.

Por analogía con la ecuación 4-9, el período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad \text{Ecuación 4-22}$$

Obviamente, puede usarse el período de un péndulo de torsión para medir mo entos de inercia, o para determinar la constante de torsión k de cualquier ---

alambre.

Algunos instrumentos de laboratorio que funcionan por oscilaciones de torsión son, el galvanómetro, la balanza de Cavendish que es un péndulo de torsión El balancín de un reloj es otro ejemplo de movimiento armónico angular, en este caso el momento de rotación restaurador lo proporciona un resorte en espiral.

Ejemplo 4-4.

Una varilla delgada, de masa 0.10kg y longitud 0.10mt, está suspendida mediante un alambre que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. El -- alambre se tuerce y la varilla se pone a oscilar. Se encuentra que el período - es de 2seg. Cuando se suspende en la misma forma por su centro de masa un cuerpo plano de figura de triángulo equilátero, se encuentra que el período es de - 6seg. Ecnontrar el momento de inercia del triángulo con respecto a ese eje.

El momento de inercia de la varilla es $\frac{ML^2}{12}$. Por consiguiente,

$$I_{varilla} = \frac{(0.10kg)\ (0.10m)^2}{12} = 8.3 \times 10^{-5}\ kg\text{-}mt^2.$$

De la ecuación 4-22, se tiene,

$$\frac{T_{varilla}}{T_{triángulo}} = \left(\frac{I_{varilla}}{I_{triángulo}}\right)^{1/2}$$

o sea,

$$I_{triángulo} = I_{varilla}\left(\frac{T_t}{T_v}\right)^2,$$

$$I_{triángulo} = (8.3 \times 10^{-5}\ kg\text{-}mt^2)\left(\frac{6seg}{2seg}\right)^2 = 7.5 \times 10^{-4} kg\text{-}mt^2.$$

El péndulo físico.

El péndulo físico es cualquier péndulo real - que no tiene toda la masa concentrada en un punto, puede ser cualquier cuerpo rígido que oscile en un plano vertical en torno de un eje que pasa por el cuerpo. La figura 4-10, representa un cuerpo de -- forma irregular que puede girar alrededor de un -- eje horizontal sin rozamiento que pasa por P y que se ha separado un ángulo θ de su posición de equilibrio. La posición de equilibrio es, cuando el -- centro de masa del cuerpo C, se encuentra abajo de P, o sea, en la vertical que pasa por ese punto.

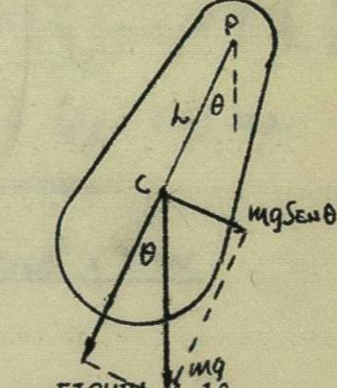


FIGURA 4-10

La distancia del eje al centro de masa es L, el momento de inercia del péndulo respecto al eje de rotación es I, y la masa del péndulo m.

El momento restaurador en la posición representada en la figura es:

$$\tau = -\ mgLsen\theta,$$

y se debe a la componente tangencial de la fuerza de gravedad.

El movimiento del péndulo no es armónico angular simple, puesto que Γ es proporcional a senθ, y no a θ.

Si θ es pequeño se puede reemplazar sen θ por θ, y

$$\Gamma = -mgL\theta.$$

Por lo tanto, el péndulo esta sometido a un par recuperador elástico, con una constante $k=mgL$.

El período de oscilación de un péndulo físico que oscila con pequeña amplitud es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad \text{Ecuación 4-23.}$$

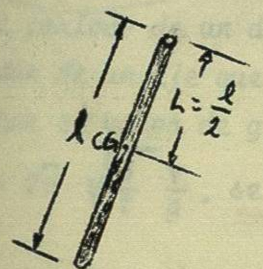
Cuando el péndulo físico, oscila con amplitudes mayores, sigue teniendo un movimiento armónico, pero no simple.

Esta forma de resolver el problema se aplica a un cuerpo de espesor uniforme de forma cualquiera y que el eje de rotación puede estar colocado en un punto cualquiera.

El péndulo físico se utiliza para determinaciones exactas de g.

Ejemplo 4-5.

Supongase que el cuerpo de la figura 4-10 sea una varilla de 1mt de largo que puede girar alrededor de uno de sus extremos. Si la masa de la varilla es = de 1kg, determinar; a) el período T, y b) el momento de inercia I de la varilla



El momento de inercia I, esta dado por,

$$I = \frac{1}{3}\ m\ell^2,$$

de la ecuación 4-23 se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{1/3\ m\ \ell^2}{m\ g\ \ell/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\ \frac{\ell}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\ \frac{1}{9.8}} = 1.65\ \text{seg.}$$

Despejando el valor de I en la ecuación 4-23, se obtiene:

$$I = \frac{T^2 mgL}{4\pi^2} = \frac{(1.65\text{seg})^2 \times 1\text{kg} \times 9.8\text{mt/seg}^2 \times 0.5\text{mt}}{4\pi^2}$$

$$I = 0.338\ \text{kg-mt}^2.$$

Ejemplo 4-6.

En la figura 4-11, se muestra un péndulo físico formado por un disco articulado en la periferia (P), junto a él se encuentra un péndulo simple equivalente que tiene el mismo período.