y se debe a la componente tangencial de la fuerza de gravedad.

El movimiento del péndulo no es armónico angular simple, puesto que Γ es proporcional a $\operatorname{sen}\theta$, y no a θ.

Si θ es pequeño se puede reemplazar $\operatorname{sen}\theta$ por θ, y

$$\Gamma = -mgl\theta.$$

Por lo tanto, el péndulo esta sometido a un par recuperador elástico, con una constante $k = mgl$.

El período de oscilación de un péndulo físico que oscila con pequeña amplitud es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad \text{Ecuación 4-23.}$$

Cuando el péndulo físico, oscila con amplitudes mayores, sigue teniendo un movimiento armónico, pero no simple.

Esta forma de resolver el problema se aplica a un cuerpo de espesor uniforme de forma cualquiera y que el eje de rotación puede estar colocado en un punto cualquiera.

El péndulo físico se utiliza para determinaciones exactas de g.

Ejemplo 4-5.

Supongase que el cuerpo de la figura 4-10 sea una varilla de 1mt de largo, que puede girar alrededor de uno de sus extremos. Si la masa de la varilla es 1kg, determinar: a) el periodo T, y b) el momento de inercia I de la varilla

El momento de inercia I, esta dado por,

$$I = \frac{1}{3} m \ell^2,$$

de la ecuación 4-23 se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{1/3\, m \ell^2}{m g \ell/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{\ell}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{1}{9.8}} = 1.65 \text{ seg.}$$

Despejando el valor de I en la ecuación 4-23, se obtiene:

$$I = \frac{T^2 mgl}{4\pi^2} = \frac{(1.65seg)^2 \times 1kg \times 9.8mt/seg^2 \times 0.5mt}{4\pi^2}$$

$$I = 0.338 \text{ kg-mt}^2.$$

Ejemplo 4-6.

En la figura 4-11, se muestra un péndulo físico formado por un disco articulado en la periferia (P), junto a él se encuentra un péndulo simple equivalente que tiene el mismo período.

Encontrar su período para oscilaciones pequeñas y hallar la longitud del péndulo simple equivalente.

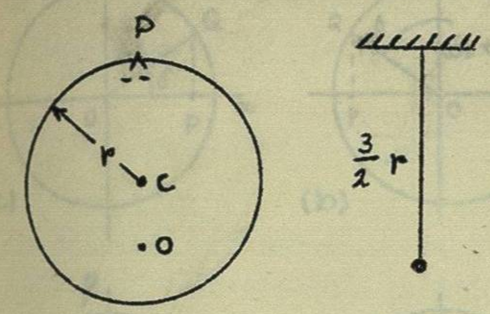


FIGURA 4-11

El momento de inercia de un disco con respecto a un eje que pasa por su centro es $\frac{1}{2} M r^2$, siendo r el radio y M la masa del disco. El momento de inercia con respecto al eje que esta en la periferia es

$$I = \frac{1}{2} M r^2 + M r^2 = \frac{3}{2} M r^2.$$

sustituyendo r en lugar de L en la ecuación 4-23, se obtiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{Mr^2}{Mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{r}{g}}.$$

El péndulo simple que posee el mismo período tiene una longitud,

$$L = \frac{I}{Mr} = \frac{3}{2} r,$$

o sea, las tres cuartas partes del diámetro del disco. El centro de oscilación del disco articulado en P está, por consiguiente, en O, a una distancia $^3/_2\, r$ abajo del punto de apoyo.

Ejemplo 4-7.

El período de un disco de radio 0.102mt que ejecuta oscilaciones pequeñas alrededor de un eje que pasa por su periferia se ha medido y es de 0.784seg. Encontrar el valor de g, la aceleración de la gravedad en ese sitio.

De $T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{r}{g}}$, se obtiene: $\quad g = \frac{6\pi^2 r}{T^2}$

$$g = \frac{6\ {}^2 \times 0.102}{(0.784)^2}\,\frac{mt}{seg^2} = 9.8\,\frac{mt}{seg^2}.$$

6.- Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme.

El movimiento circular uniforme es una combinación de movimientos armónicos simples, fenómeno que ocurre con frecuencia en el movimiento ondulatorio.

La relación entre el movimiento armónico simple en una línea recta y el movimiento circular uniforme, es de importancia ya que describe algunas características del movimiento armónico simple. Ademas da un significado geométrico sencillo de la frecuencia angular w y de la constante de fase δ.

Haciendo uso de un método geométrico sencillo, considerese el tipo de movimiento determinando en la figura 4-12; en donde Q, es un punto que se mueve en-

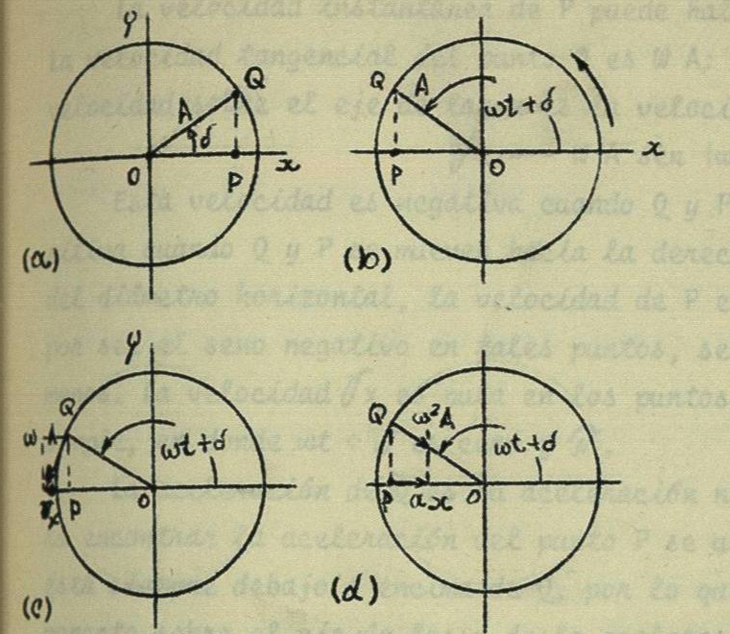


FIGURA 4-12

una circunferencia de radio A, con una velocidad angular constante w $(\frac{rad}{seg})$, y P la proyección de Q sobre el diámetro horizontal. Cuando el punto Q gira en torno del círculo, el punto P se mueve hacia adelante y hacia atrás sobre una recta horizontal, encontrándose siempre en la misma vertical que Q.

Por consiguiente, la elongación de P es siempre igual a la abscisa de Q (figura 4-12b); la velocidad de P es igual en todo instante a la proyección sobre el diámetro horizontal de la velocidad de Q (figura 4-12c); y la aceleración de P es igual a la componente sobre el mismo diámetro de la aceleración de Q (figura 4-12d).

Si los puntos P y Q coinciden en el instante $t = o$, el ángulo formado por el radio OQ y el diámetro horizontal es igual a δ. Al transcurrir un tiempo cualquiera t, el ángulo que forma ahora OQ con el diámetro horizontal es $(wt+\delta)$ si el punto Q se mueve con velocidad angular constante.

Por lo tanto, la elongación de P en cualquier instante t (véase figura 4-12 b) es,

$$x = A \cos (wt + \delta). \qquad \text{Ecuación 4-24}$$

El punto P se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje las x. Es por esto que, el movimiento armónico simple se puede describir como la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

La frecuencia angular w del movimiento armónico simple del punto P es la misma que la velocidad angular del punto Q. La frecuencia del movimiento armónico simple es la misma que el número de revoluciones por unidad de tiempo del punto Q.

Esto es $f = \frac{w}{2\pi}$, o bien, $w = 2\pi f$. El punto P efectúa una vibración completa por cada revolución de Q. Por lo tanto, $T = \frac{2\pi}{w}$, o bien, $w = \frac{2\pi}{T}$.

El ángulo $(wt = \delta)$ se denomina ángulo de fase o, sencillamente, fase del movimiento armónico simple, y es el ángulo que forma OQ con el diámetro horizontal en un tiempo cualquiera t. La amplitud del movimiento armónico simple es una circunferencia de radio A, con una velocidad angular constante w $\left(\frac{rad}{seg}\right)$, y P la proyección de Q sobre el diámetro horizontal. Cuando el punto Q gira entorno del círculo, el punto P se mueve hacia adelante y hacia atrás sobre una recta horizontal, encontrándose siempre en la misma vertical que Q.

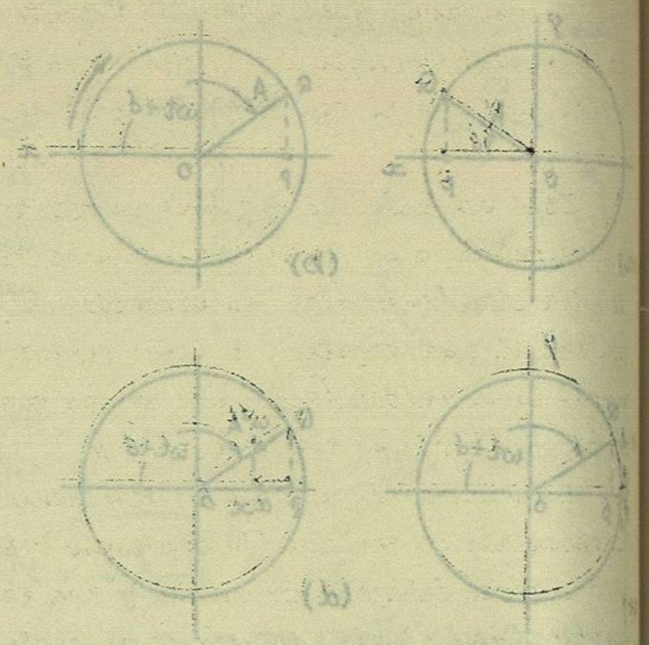


FIGURA 4-12

Por consiguiente, la elongación de P es siempre igual a la abscisa de Q (figura 4-12b); la velocidad de P es igual en todo instante a la proyección sobre el diámetro horizontal de la velocidad de Q (figura 4-12c); y la aceleración de P es igual a la componente sobre el mismo diámetro de la aceleración de Q (figura 4-12d).

Si los puntos P y Q coinciden en el instante $t = o$, el ángulo formado por el radio OQ y el diámetro horizontal es igual a δ. Al transcurrir un tiempo cualquiera t, el ángulo que forma ahora OQ con el diámetro horizontal es $(wt+\delta)$ y el punto Q se mueve con velocidad angular constante.

Por lo tanto, la elongación de P en cualquier instante t (véase figura 4-12 b) es,

$$x = A \cos (wt + \delta). \qquad \text{Ecuación 4-24}$$

El punto P se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Es por esto que, el movimiento armónico simple se puede describir como la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.

La frecuencia angular w del movimiento armónico simple del punto P es la misma que la velocidad angular del punto Q. La frecuencia del movimiento armónico simple es la misma que el número de revoluciones por unidad de tiempo del punto Q.

Esto es $f = \frac{w}{2\pi}$, o bien, $w = 2\pi f$. El punto P efectúa una vibración completa por cada revolución de Q. Por lo tanto, $T = \frac{2\pi}{w}$, o bien, $w = \frac{2\pi}{T}$.

El ángulo $(wt + \delta)$ se denomina ángulo de fase o, sencillamente, fase del movimiento armónico simple, y es el ángulo que forma OQ con el diámetro horizontal en un tiempo cualquiera t. La amplitud del movimiento armónico simple es --

igual al radio de la circunferencia.

La velocidad instantánea de P puede hallarse con ayuda de la figura 4-12c. La velocidad tangencial del punto Q es W A; por lo tanto, la componente de esta velocidad sobre el eje de las x es la velocidad de P. Esto es:

$$v_x = - W A \operatorname{sen} (wt + \delta).$$

Esta velocidad es negativa cuando Q y P se mueven hacia la izquierda y positiva cuando Q y P se mueven hacia la derecha. Cuando Q se halla por debajo -- del diámetro horizontal, la velocidad de P está dirigida hacia la derecha, pero por ser el seno negativo en tales puntos, se precisa anteponer también el signo menos. La velocidad v_x es nula en los puntos extremos del movimiento armónico - simple, en donde $wt + \delta$ es cero y π.

La aceleración de Q es su aceleración normal $w^2 A$ (véase figura 4-12d). Para encontrar la aceleración del punto P se utiliza de nuevo el hecho de que P - está siempre debajo o encima de Q, por lo que su aceleración es igual a la componente sobre el eje de las x de la aceleración del punto Q (figura 4-12d). Por lo tanto,

$$a_x = - w^2 A \cos (wt + \delta).$$

La aceleración a_x es nula en los puntos medios del movimiento armónico simple, en donde $wt + \delta = \frac{\pi}{2}$, o bien, $\frac{3\pi}{2}$.

En conclusión se obtiene que la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro cualquiera da un movimiento armónico simple. Ademas, el movimiento circular uniforme se puede describir como la combinación de dos movi-- mientos armónicos simples que se efectúan sobre rectas perpendiculares, que tienen la misma amplitud y frecuencia pero difieren en fase 90°. Esto significa que el punto Q se puede proyectar también sobre el eje y, obteniendo los mismos resultados con la diferencia de que δ será $\delta - \frac{\pi}{2}$ y entonces $\cos (wt + \delta)$ se transforma en $\operatorname{sen}(wt + \delta)$, quedando la elongación como:

$$y = A \operatorname{sen} (wt + \delta) \qquad \text{Ecuación 4-25}$$

Cuando una componente se encuentra en el punto de máxima elongación, la otra componente se encuentra en el punto de equilibrio. Combinando las componentes de las ecuaciones 4-24 y 4-25, se obtiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A.$$

De igual forma se puede hacer una relación entre las componentes de la velocidad y las componentes de la aceleración, obteniendo las siguientes relaciones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = W A.$$

igual al radio de la circunferencia.

La velocidad instantánea de P puede hallarse con ayuda de la figura 4-12c. La velocidad tangencial del punto Q es W A; por lo tanto, la componente de esta velocidad sobre el eje de las x es la velocidad de P. Esto es:

$$v_x = -W A \text{ sen } (wt + \delta).$$

Esta velocidad es negativa cuando Q y P se mueven hacia la izquierda y positiva cuando Q y P se mueven hacia la derecha. Cuando Q se halla por debajo del diámetro horizontal, la velocidad de P está dirigida hacia la derecha, pero por ser el seno negativo en tales puntos, se precisa anteponer también el signo menos. La velocidad v_x es nula en los puntos extremos del movimiento armónico simple, en donde $wt + \delta$ es cero y π.

La aceleración de Q es su aceleración normal $w^2 A$ (véase figura 4-12d). Para encontrar la aceleración del punto P se utiliza de nuevo el hecho de que P está siempre debajo o encima de Q, por lo que su aceleración es igual a la componente sobre el eje de las x de la aceleración del punto Q (figura 4-12d). Por lo tanto,

$$a_x = -w^2 A \cos (wt + \delta).$$

La aceleración a_x es nula en los puntos medios del movimiento armónico simple, en donde $wt + \delta = \frac{\pi}{2}$, o bien, $\frac{3\pi}{2}$.

En conclusión se obtiene que la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro cualquiera da un movimiento armónico simple. Además, el movimiento circular uniforme se puede describir como la combinación de dos movimientos armónicos simples que se efectúan sobre rectas perpendiculares, que tienen la misma amplitud y frecuencia pero difieren en fase 90°. Esto significa que el punto Q se puede proyectar también sobre el eje y, obteniendo los mismos resultados con la diferencia de que δ será $\delta - \frac{\pi}{2}$ y entonces $\cos (wt + \delta)$ se transforma en $\text{sen}(wt + \delta)$, quedando la elongación como:

$$y = A \text{ sen } (wt + \delta) \qquad \text{Ecuación 4-25}$$

Cuando una componente se encuentra en el punto de máxima elongación, la otra componente se encuentra en el punto de equilibrio. Combinando las componentes de las ecuaciones 4-24 y 4-25, se obtiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = A.$$

De igual forma se puede hacer una relación entre las componentes de la velocidad y las componentes de la aceleración, obteniendo las siguientes relaciones:

$$v = \sqrt{v^2_x + v^2_y} = W A.$$

$$a = \sqrt{a^2_x + a^2_y} = w^2 A.$$

Correspondiendo estas relaciones a las magnitudes del desplazamiento, la velocidad y la aceleración del movimiento circular uniforme.

Ejemplo 4-8.

En el ejemplo 4-1 se considero un cuerpo que ejecutaba un movimiento armónico simple. La ecuación de ese movimiento era:

$$x = 0.20 \cos 5.7t$$

Este movimiento se puede representar también como la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro horizontal.

(a) Dar las propiedades del movimiento circular uniforme correspondiente.

La componente sobre el eje de las x del movimiento circular está dada por,

$$x = A \cos (wt + \delta)$$

Por lo tanto, el círculo de referencia debe tener un radio A = 0.20mts, la fase inicial o constante de fase debe ser $\delta = 0$, y la velocidad angular debe ser $w = 5.7 \frac{rad}{seg}$, para obtener la ecuación $x = 0.20 \cos 5.7t$ para la proyección horizontal.

(b) Mediante el movimiento del punto Q determínese el tiempo requerido para que el cuerpo llegue al punto situado a la mitad de la distancia al centro del movimiento a partir de su posición inicial.

Al moverse el cuerpo la mitad de la distancia hacia adentro, el punto Q se mueve un ángulo $wt = 60°$ (véase figura 4-13). La velocidad angular es constante y de un valor de $5.7 \frac{rad}{seg}$, de manera que el tiempo que se requiere para que se mueva 60° es:

$$t = \frac{60°}{w} = \frac{\pi/3 \text{ radianes}}{5.7 \text{ rad/seg.}} = \frac{\pi}{17.1} \text{ seg.}$$

$$t = 0.183 \text{ seg.}$$

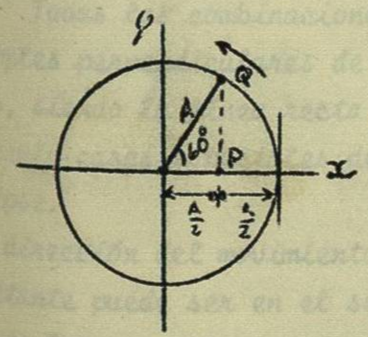


FIGURA 4-13

El tiempo se puede calcular también directamente a partir de la ecuación del movimiento. Así,

$$x = 0.20 \cos 5.7t \quad y \quad x = \frac{A}{2} = \frac{0.20}{2} = 0.10$$

de donde,

$$0.10 = 0.20 \cos 5.7t, \quad \text{o sea,}$$

$$5.7t = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{17.1} = 0.183 \text{ seg.}$$

7.- Combinaciones de movimientos armónicos.

El movimiento que resulta al combinar dos movimientos armónicos simples -- perpendiculares es una suma de dos oscilaciones independientes. Si se considera el caso en el cuál las frecuencias de las vibraciones son iguales, tales como,

$$x = A_x \cos\,(wt + \delta)$$
$$y = A_y \cos\,(wt + \alpha). \qquad \text{Ecuación 4-26}$$

Los movimientos sobre cada eje tienen diferentes amplitudes y constantes - de fase.

Cuando las constantes de fase son iguales, esto es que $\delta = \alpha$, el movimiento resultante es una línea recta. esto se comprueba analíticamente, haciendo -- uso de las ecuaciones 4-26.

$$x = A_x \cos\,(wt + \delta) \qquad\qquad y = A_y \cos\,(wt + \delta),$$

despejando el valor del coseno en la ecuación de x, y sustituyendolo en la ecuación de y, se obtiene:

$$y = \left(\frac{A_y}{A_x}\right) x,$$

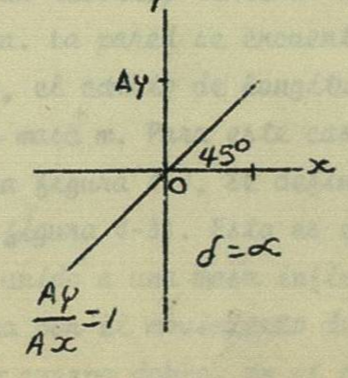
que es la ecuación para una línea recta, de pendiente $\frac{A_y}{A_x}$.

En la figura 4-14 a y b se muestran los movimientos resultantes para los - casos en que, $\frac{A_y}{A_x} = 1$ y $\frac{A_y}{A_x} = 2$. En estos casos, las amplitudes de x y de y alcanzan un máximo al mismo tiempo, así como también alcanzan un mínimo al mismo --- tiempo y sus constantes de fase son iguales, es decir, están en fase.

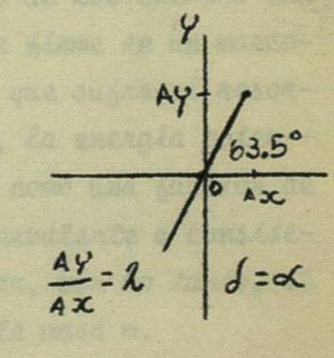
Cuando las constantes de fase no son iguales, el movimiento que resulta no es una línea recta, por ejemplo, si difieren en $\pi/2$, la máxima elongación de x ocurrirá cuando la elongación de y sea cero y viceversa. Si las amplitudes son iguales, el movimiento que resulta es circular y si las amplitudes son diferentes, el movimiento que resulta es elíptico. En la figura 4-14c y d, se muestran los casos en los cuales $\frac{A_y}{A_x} = 1$ y $\frac{A_y}{A_x} = 2$, para $\delta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. En la figura 4-14 e y f, se muestran los casos en los cuales $\frac{A_y}{A_x} = 1$ y $\frac{A_y}{A_x} = 2$, para $\delta = \alpha - \frac{\pi}{4}$.

Todas las combinaciones que se puedan hacer de dos movimientos armónicos - simples perpendiculares de igual frecuencia, corresponden a trayectorias elípticas, siendo la línea recta y el círculo casos especiales de una elipse.

La dirección del movimiento resultante puede ser en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario, todo depende de la componente que lleve la fase adelantada.



(a)



(b)