Si el campo no es uniforme, como en el caso de un gran volumen en el espacio cercano a la Tierra, la fuerza no es constante y la trayectoria de un proyectil no es una parábola.

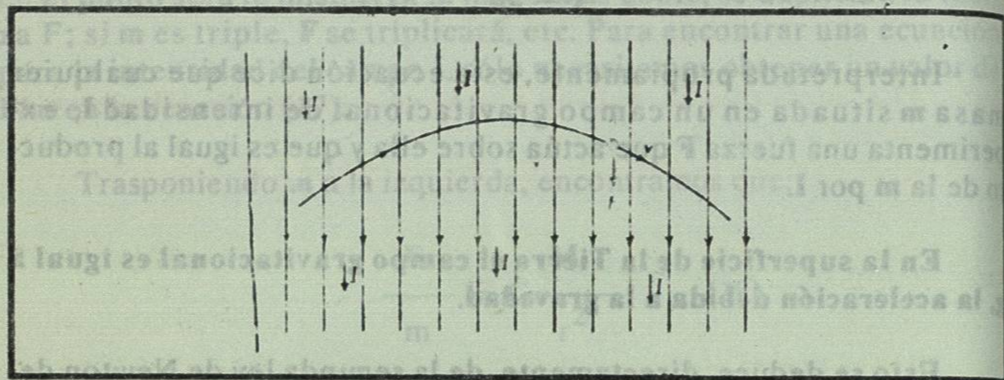

Fig. 8. La trayectoria de un proyectil en un campo gravitacional uniforme en una parábola

2-6 POTENCIA GRAVITACIONAL

Hemos visto que el trabajo realizado para elevar un cuerpo de una masa "m" a una altura "s", está dado por el producto fuerza por distancia.

$$W = Fs \qquad (21)$$

Donde la fuerza F está dada por la segunda ley de Newton, F = mg,

$$W = mgs$$

Como resultado del trabajo realizado sobre un cuerpo, hemos almacenado dentro de él, en virtud de su nueva posición, una cantidad equivalente de energía potencial.

$$E.P. = mgs$$

Al establecer estas ecuaciones, se supone que la intensidad del campo gravitacional g es constante para la distancia "s", a través de la cual actúa la fuerza. Sin embargo, si la distancia es grave, la intensidad del campo no es constante y varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde el centro de la Tierra (véase la ecuación 18).

Para calcular el trabajo realizado por medio de la ecuación (21), y con una fuerza que cambia de modo contínuo, se requiere un procedimiento matemático llamado **cálculo**. El cálculo muestra que el **trabajo realizado** al llevar una masa m desde un punto a la distancia r del centro de M, hasta una distancia tan grande que el campo gravitacional sea tan débil que pueda despreciarse, está dado por:

$$W = Fr \qquad (22)$$

En esta ecuación, F es la fuerza que actúa sobre **m** cuando está en el punto A. (Véase la figura 9). Este resultado sencillo hace fácil expresar el trabajo realizado con ayuda de la ecuación (17). Sustituyendo este valor de F en la ecuación (22), podemos obtener:

$$W = G\frac{Mm}{r} \qquad (23)$$

La energía potencial de una masa en ese mismo punto es, por lo tanto,

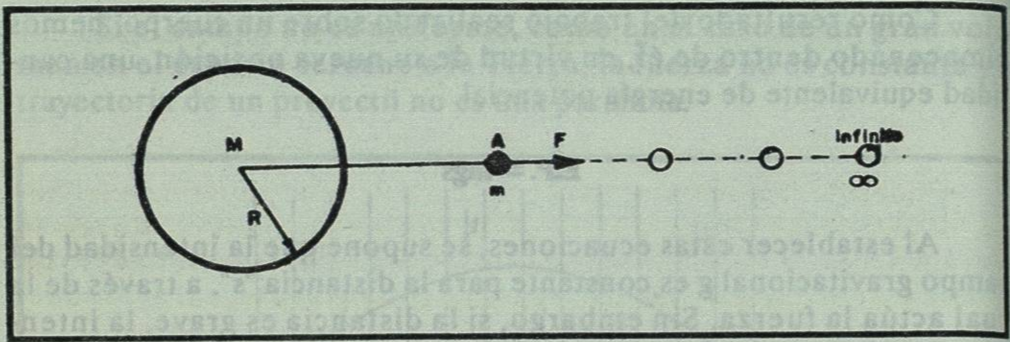

Fig. 9. La fuerza que se necesita para alejar una masa m de la Tierra, disminuye al aumentar la distancia desde la superficie y se vuelve cero en el infinito

$$E.P. = -G\frac{Mn}{t} \qquad (24)$$

El signo "menos" indica que la energía es negativa con respecto al nivel cero, el cual está en el infinito. Cuando $r \longrightarrow \infty$ la $E.P \longrightarrow 0$. Elevar una masa contra el tirón de un campo gravitacional requiere un gasto de energía.

Definimos ahora el potencial gravitacional P de cualquier punto en el espacio en torno de una masa M, como la energía potencial por unidad de masa cualquier masa m, localizada en dicho punto.

$$P = \frac{E.P}{m} \qquad (25)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación (24) por m y sustituyendo en la ecuación (25), obtenemos:

$$P = -\frac{GM}{r} \qquad (26)$$

Cualquier masa m situada en, o cerca de la superficie de la Tierra M, puede ser vista como si estuviera en un agujero, donde la energía potencial es negativa y elevarla fuera en el espacio libre (r infinita y E.P. = 0), requiere una cantidad de energía W.

$$W = -mP \qquad (27)$$

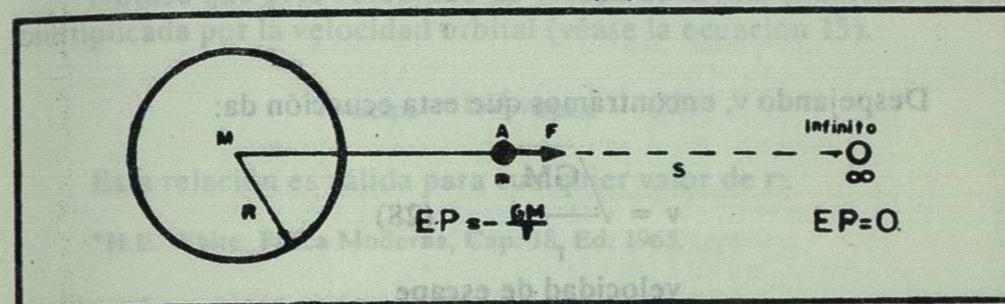

Fig. 10. La energía potencial de una masa m de la Tierra es negativa con respecto a su energía potencial en el infinito.

Por lo tanto, hemos llegaado al resultado muy simple de que la fuerza de cualquier masa esta dada por **mI**, y que su energía potencial es igual a **mP**.

2-7 VELOCIDAD DE ESCAPE.

Un satélite que escapa de la Tierra y nunca regresa, debe haber sido lanzado con una velocidad mayor de la requerida para ponerlo en órbita. Para encontrar la **velocidad mínima de escape**, aprovecharemos el potencial gravitacional dado en la sección precedente.

Para elevar una masa m desde cualquier punto a una distancia r, desde el centro de M, se requiere el gasto de energía en la cantidad dada por la ecuación (27). (Véase la figura 10). Si comunicamos esta energía para dar a la masa una velocidad, la energía total gastada será cinética, + mv^2. Por sustitución directa en la ecuación (27) de + mv^2 en lugar de W, y -GM/r en lugar de P, ver la ecuación (26), obtenemos:

$$1/2\ mv^2 = m\frac{GM}{r}$$

Despejando v, encontramos que esta ecuación da:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (28)$$

velocidad de escape

Si lanzamos la masa m desde la superficie de la Tierra, donde r = R, escribimos:

$$v = 2\sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (29)$$

Si deseamos expresar la velocidad de escape en función de g, en la superficie de la Tierra, podemos igualar la fuerza F dada la ley de Newton de la gravitación con la fuerza F dada por su segunda ley del movimiento:

$$G\frac{Mn}{R^2} = mg$$

de la cual obtenemos:

$$G = gR^2/M \qquad (30)$$

Al sustituir esta expresión por G en la ecuación (29), obtenemos:

$$v = \sqrt{2gR} \quad (31)$$

velocidad de escape desde
la superficie de la Tierra.

Nótese que esta velocidad de escape es la raíz cuadrada de dos multiplicada por la velocidad orbital (véase la ecuación 15).

$$v_{escape} = 1.41\ v_{orbital} \qquad (32)$$

Esta relación es válida para cualquier valor de r:.

*H.E. White. Física Moderna, Cap. 18, Ed. 1965.

Ejemplo 1.

Se dibuja una elipse con dos alfileres colocados a 6 cm de distancia y una cuerda de 10 cm de largo. Calcular: a) el valor del eje mayor, b) el valor del eje menor, c) la excentricidad, d) la distancia de apogeo, y e) la distancia del perigeo.

a) Semieje mayor = 3 cm + 2 cm

= 5 cm

eje mayor = 10 cm

b) Semieje menor = $\sqrt{(15\text{ cm})^2 - (3\text{cm})^2}$

= $\sqrt{(25\text{ cm}^2 - 9\text{ cm}^2)}$

= $\sqrt{16\text{ cm}^2}$

= 4 cm

eje menor = 8 cm

$$\text{Semieje menor} = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

c) $$e = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}}$$

$$= 0.6$$

$$\text{Semieje menor} = 5\text{ cm}\sqrt{1(0 - 6)^2}$$

$$= 5\text{ cm}\sqrt{1 - 0.36}$$

$$= 5\text{ cm}\sqrt{0.64}$$

$$= 5\text{ cm} \cdot 0.8$$

$$= 4\text{ cm}$$

d) $$\text{apogeo} = a(1 + e)$$

$$= 5\text{ cm}\ (1 + 0.6)$$

$$= 5\text{ cm} \times 1.6$$

$$= 8\text{ cm}$$

e) $$\text{perigeo} = a(1 - e)$$

$$= 5\text{ cm}\ (1 - 0.6)$$

$$= 5\text{ cm} \times 0.4$$

$$= 2\text{ cm}$$

Hacerlo inmediatamente.

1.- Se construye una elipse con dos puntos situados a 28 cm uno del otro con una cuerda de 40 cm. Calcular los mismo datos del ejemplo 1. [40 cm, 28.565 cm, 0.7 cm, 34 cm, 6 cm].

2.- Se construye una elipse de 0.9 de excentricidad con una cuerda de 50 cm. Calcular: a) el eje mayor, b) el eje menor, c) el apogeo y d) el perigeo. [50 cm, 21.794 cm, 47.5 cm, 2.5 cm].

Ejemplo 2.

Un satélite está en órbita de la Tierra 1,600 km arriba de la superficie. Calcular a) su velocidad y b) su período de revolución en minutos.

Solución:

a) Por la ecuación 14, tenemos:

$$v = \sqrt{g\frac{R^2}{r}}$$

$$v = R \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$v = \sqrt{127\text{x}10^3\ \frac{\text{km}(6.371\text{x}10^3\text{ km})^2}{\text{h}^2\ 7.971 \times 10^3\text{ km}}}$$

$$v = 25{,}430\text{ km/h}$$

b) Por la ecuación 8, tenemos:

$$T = \frac{2\pi \cdot 7971\text{ km}}{25{,}430\text{ km/h}}$$

$$T = 1.967\text{ h}$$

$$T = 118.16\text{ min}$$

Hacerlo inmediatamente.

3.- Un satélite está en órbita de la Tierra a 2,800 km arriba de la superficie. Calcular: a) su velocidad orbital y b) su período de revolución en minutos. [23,708 km/h, 2.43 h ó 145.8 min].

4.- Un satélite en órbita de la Tierra a 5000 km arriba de la superficie. Calcular: a) su velocidad orbital y b) su período de revolución en minutos].

Ejemplo 3.

Encontrar la intensidad del campo gravitacional sobre la superficie del planeta Marte.

Solución:

Por la ecuación 18-a, tenemos:

$$I = G\frac{M}{r^2}$$

De la tabla 1, tenemos:

$M = 0.6387 \times 10$ kg y $r = 3{,}332.1$ km

$$I = 6.67\text{x}10^{-11}\frac{m^3}{kgseg^2}\frac{0.6387\text{x}10^{24}}{(3.3321\text{x}10^6 m)^2}$$

$$I = 3.83 \text{ m/seg}^2$$

$$I = 3.83 \text{ N/kg}$$

Hacerlo inmediatamente.

5.- Calcular la intensidad del campo gravitacional de un punto a 1,000 km de la superficie de la Tierra. [7.32 m/seg 6 7.32 N/kg].

6.- Calcular la intensidad del campo gravitacional a 1,000 km de la superficie del planeta Marte. [2.27 m/seg^2 6 2.27 N/kg].

Ejemplo 4.

Encontrar el potencial de cualquier punto situado sobre la superficie del planeta Marte.

Solución:

Por la ecuación 26, tenemos:

$$P = GM/r$$

$$P = \frac{6.66\text{x}10^{-11} \text{m/kgseg}^2 \times 0.6383 \times 10^{24} \text{ kg}}{3.3321 \times 10^6 \text{ m}}$$

$$P = 1.277 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{seg}^2$$

$$P = 1.277 \times 10^7 \text{ J/kg}$$

Ejemplo 5.

¿Cuál es la velocidad de escape en m/seg de un cohete, si su combustible se consume a 70 km de la superficie de Marte?

Solución:

$$v = \sqrt{2\frac{Gm}{r}}$$

$$r = 3.3321\text{x}10^3\text{km} + 0.07 \times 10^3\text{km}$$

$$r = 3.4021 \times 10^3 \text{ km}$$

$$v = \sqrt{2 \times \frac{6.66 \times 10^{-11} \text{m/kgseg}^2 \times 0.6387 \times 10^{24} \text{ kg}}{3.4021 \times 10^6 \text{ km}}}$$

$$v = \sqrt{2.501 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{seg}^2}$$

$$v = 5 \times 10^3 \text{ m/seg}$$

$$v = 18{,}002 \text{ km/h}$$

Hacerlo inmediatamente.

7.- Calcular la velocidad de escape en m/seg y km/h de un cohete a 100 km sobre la superficie de la Tierra. [11,090 m/seg, 39,924 km/h].

8.- Calcular la velocidad de escape en m/seg y km/h de un cohete a 80 km de la superficie de Venus. [10,185.6 m/seg, 36,668.2 km/h].

AUTOEVALUACIÓN.

1.- Se dibuja una elipse con el eje mayor de 8 m y el eje menor de 4 cm. Encontrar: a) la excentricidad, b) la distancia de apogeo, c) la distancia de perigeo y d) la distancia entre los focos.

2.- Se construye una elipse con un eje mayor de 10 m y un eje menor de 4 m. Encontrar: a) la excentricidad, b) la distancia de apogeo, c) la distancia de perigeo, d) la distancia entre los focos y e) la longitud de la cuerda que deben usarse.

3.- Un satélite gira en órbita de 708 km de la Tierra. Encontrar: a) su velocidad, b) su período en minutos.

4.- Un satélite está en órbita de la Tierra a una altura de 227 km. Calcular: a) la velocidad orbital, b) su período de revolución en minutos.

5.- ¿Cuál debe ser la velocidad de un satélite si su órbita alrededor de la Tierra es de 1,250 km de la superficie? ¿Cuál será su período?

6.- Calcular la intensidad del campo gravitacional sobre la superficie del planeta Saturno.

7.- Calcular la intensidad del campo gravitacional sobre la superficie de los siguientes planetas: a) Júpiter, b) Marte, c) Mercurio, d) Venus, e) Urano.

8.- Calcular la velocidad de escape en m/seg, de un cohete si su combustible se agota a 100 km de la superficie de la Tierra.

9.- Encontrar la velocidad de escape para un proyectil que sale de la superficie de los siguientes planetas: a) Tierra, b) Marte, c) Júpiter, d) Venus, e) Urano.

UNIDAD IV.

SUMA DE VECTORES APLICANDO EL MÉTODO DE LAS COMPONENTES.

El desarrollo de la trigonometría tuvo como motivación la astronomía cuantitativa y la medición del tiempo. Su fundador fue Hiparco, de quien no se tiene trabajos escritos directamente, pero cuyas contribuciones están acreditadas por Ptolomeo en su obra **"Colección Matemática o Almagest"**. Aquí se encuentra la conexión con la herencia de Babilonia del uso de las fracciones sexadecimales y la introducción de la función seno a través de las cuerdas de un círculo.

OBJETIVOS.

1.- Definir cada uno de los términos, conceptos, principios o leyes incluidas en este capítulo.

2.- Descomponer un vector sobre un par de ejes coordenados.