Objetivos 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11

MOVIMIENTO ACELERADO

En la mayor parte de los casos, la velocidad de un objeto cambia a medida que el movimiento evoluciona. A este tipo de movimiento se le denomina ***movimiento acelerado***. La relación de cambio de la velocidad al tiempo transcurrido recibe el nombre de ***aceleración***. Por ejemplo, supóngase que observamos el movimiento de un cuerpo durante un lapso t. Definiremos la velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ del cuerpo como la velocidad que tenía al iniciar el periodo de tiempo, es decir, cuando $t = 0$. La velocidad final $\mathbf{v}_f$ será definida como la velocidad del cuerpo al final del periodo de tiempo, cuanto $t = t$. Así, si podemos medir estos valores inicial y final de la velocidad de un objeto en movimiento, podemos decir que su aceleración está dada por

$$\textit{Aceleración} = \frac{\textit{cambio de velocidad}}{\textit{intervalo de tiempo}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_o}{t} \qquad (5\text{-}2)$$

La aceleración escrita tal como se muestra arriba, es una cantidad vectorial y por tanto depende de cambios en la dirección tanto como en cambios de la magnitud. Si la dirección del movimiento es en línea recta, sólo la rapidez del objeto está cambiando. Si sigue una trayectoria curva, ocurren cambios tanto direccionales como de magnitud y por tanto la aceleración no tiene la misma dirección del movimiento. De hecho, si la trayectoria curva siguiera un círculo perfecto, la aceleración siempre sería perpendicular al movimiento. En ese caso sólo la dirección del movimiento cambia, mientras que la rapidez en cualquier punto del círculo es constante. Este último tipo de movimiento será estudiado en un capítulo posterior.

MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

La clase más simple de aceleración es el movimiento rectilíneo, en el que la rapidez cambia con una razón constante. A este tipo de movimiento generalmente se le denomina ***movimiento uniformemente acelerado*** o de ***aceleración constante***. Ya que no hay cambio de dirección, la diferencia de vectores de la ecuación 5-2 se convierte en la simple resta algebraica entre la magnitud de la velocidad final $\mathbf{v}_f$ y la magnitud de la velocidad inicial $\mathbf{v}_o$. Así, para aceleración uniforme,

$$\boxed{a = \frac{v_f - v_o}{t}} \qquad (5\text{-}3)$$

Por ejemplo, considérese un automóvil que se mueve con aceleración constante del punto A al B como se muestra en la figura 5-2. La velocidad del auto en A es de 40 pie/s y su velocidad en B de 60 pie/s. Si para aumentar esa velocidad se requiere de 5 s, la aceleración se puede calcular por medio de la ecuación 5-3. Así,

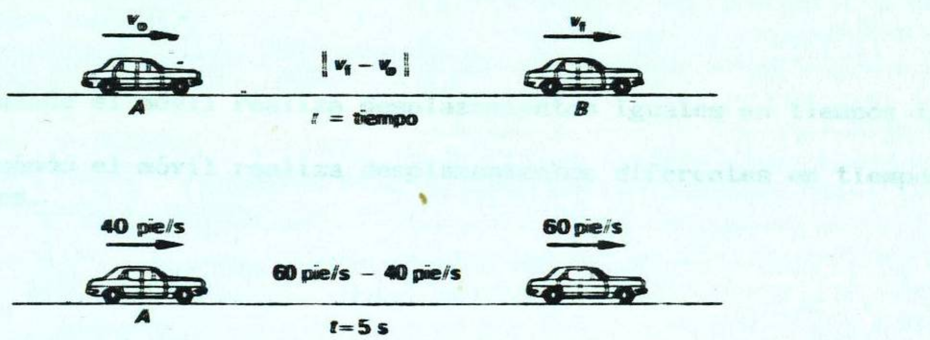

Figura 5-2 Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado.

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{60\ \text{pie/s} - 40\ \text{pie/s}}{5\ \text{s}}$$

$$= \frac{20\ \text{pie/s}}{5\ \text{s}} = 4\ \text{pie/s}^2$$

La respuesta se lee *cuatro pies por segundo por segundo* o *cuatro pies por segundo cuadrado.* Esto quiere decir que cada segundo el automóvil incrementa su velocidad en 4 pie/s. Ya que se contaba inicialmente con una velocidad de 40 pie/s cuando empezamos a contar nuestro tiempo ($t = 0$), después de 1, 2 y 3 s, habrá adquirido velocidades de 44, 48 y 52 pie/s, respectivamente.

Ejemplo Un tren reduce su velocidad de 60 a 30 mi/h en 10 s. Encuentre su aceleración.

Solución Por sustitución directa en la ecuación 5-3 obtenemos

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{30\ \text{mi/h} - 60\ \text{mi/h}}{10\ \text{s}}$$

de lo que

$$a = \frac{-30\ \text{mi/h}}{10\ \text{s}} = -3\ \text{mi/h}\cdot\text{s}$$

Nótese que en la respuesta aparecen simultáneamente unidades de horas y segundos. Esta inconsistencia se resuelve como sigue:

$$-3\frac{\text{mi}}{\text{h}\cdot\text{s}} \times \frac{5280\ \text{pie}}{1\ \text{mi}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = -4.4\ \text{pie/s}^2$$

El signo negativo nos indica que la velocidad se *reduce* en 4.4 pie/s cada segundo. A este tipo de aceleración a veces se le llama *desaceleración*.

Muchas veces la misma ecuación se usa para despejar cantidades diferentes. Se debe, por tanto, despejar literalmente la ecuación para cada símbolo. Una de las formas más convenientes de la ecuación surge al despejar el valor de la velocidad final. Así

$$v_f = v_0 + at \qquad (5\text{-}4)$$

Velocidad final = velocidad inicial + cambio de velocidad

Ejemplo Un automóvil mantiene una aceleración constante de 8 m/s². Si su velocidad inicial era de 20 m/s, ¿Cuál será su velocidad después de 6 s?

Solución La velocidad final se obtiene de la ecuación 5-4.

$$v_f = v_0 + at = 20\ \text{m/s} + (8\ \text{m/s}^2)(6\ \text{s})$$

o sea

$$v_f = 20\ \text{m/s} + 48\ \text{m/s}$$

Por lo que la velocidad final es

$$v_f = 68\ \text{m/s}$$

Ya que los conceptos de velocidad inicial y velocidad final han sido bien entendidos, volvamos a la ecuación para la velocidad media y expresémosla en términos de velocidad inicial y velocidad final. La velocidad media de un objeto que se mueve con aceleración constante se calcula aplicando el promedio aritmético de dos cantidades. Dadas una velocidad final y una inicial, la velocidad media es simplemente

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_0}{2} \qquad (5\text{-}5)$$

Al utilizar esta relación en la ecuación 5-1, obtenemos una expresión más útil para el cálculo de distancias recorridas:

$$\boxed{s = \bar{v}t = \frac{v_f + v_0}{2}\,t} \qquad (5\text{-}6)$$

Ejemplo Un cuerpo en movimiento aumenta su velocidad uniformemente de 200 a 400 cm/s en 2 min. *a*) ¿Cuál es su velocidad media y *b*) ¿cuán lejos viajó en los 2 min?

Solución La velocidad media se calcula por sustitución directa en la ecuación 5-5.

$$\bar{v} = \frac{v_f + v_0}{2} = \frac{400 \text{ cm/s} + 200 \text{ cm/s}}{2}$$

o sea

$$\bar{v} = \frac{600 \text{ cm/s}}{2} = 300 \text{ cm/s}$$

La distancia recorrida se calcula entonces a partir de la ecuación 5-1.

$$s = \bar{v}t = (300 \text{ cm/s})(2 \text{ min})$$

Las unidades de tiempo son inconsistentes, pero dado que 2 min = 120 s, tenemos

$$s = (300 \text{ cm/s})(120 \text{ s}) = 36{,}000 \text{ cm}$$

OTRAS RELACIONES UTILES

Hasta aquí hemos presentado dos relaciones fundamentales. Una se obtuvo de la propia definición de velocidad y la otra de la definición de aceleración. Ellas son:

$$s = \bar{v}t = \frac{v_f + v_0}{2}t \qquad (5\text{-}6)$$

y

$$v_f = v_0 + at \qquad (5\text{-}4)$$

Aunque éstas son las únicas dos ecuaciones realmente necesarias para resolver los problemas que se presentan en este capítulo, hay otras dos relaciones muy útiles que se pueden derivar de ellas. La primera se obtiene de la eliminación de la velocidad final de las ecuaciones 5-6 y 5-4. Sustituyendo la última en la primera tenemos

$$s = \frac{(v_0 + at) + v_0}{2}t$$

Al simplificar nos queda

$$s = \frac{(2v_0 + at)t}{2} = \frac{2v_0t + at^2}{2}$$

o sea

$$\boxed{s = v_0t + \tfrac{1}{2}at^2} \qquad (5\text{-}7)$$

La segunda relación se obtiene de la eliminación de *t* de las ecuaciones básicas. Despejando *t* de la ecuación 5-4 obtenemos

$$t = \frac{v_f - v_0}{a}$$

que al sustituirla en la ecuación 5-6 nos da

$$s = \left(\frac{v_f + v_0}{2}\right)\left(\frac{v_f - v_0}{a}\right)$$

de lo cual

$$\boxed{2as = v_f^2 - v_0^2} \qquad (5\text{-}8)$$

Aunque estas dos ecuaciones no añaden información nueva, suelen ser muy útiles en la resolución de problemas en los que la velocidad final o el tiempo no sean dados en el enunciado y deba encontrarse uno de los otros parámetros.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ACELERACIÓN

Aunque la solución de los problemas que implican aceleración constante depende principalmente de la elección de la ecuación más correcta y de sustituir los valores conocidos, existen varias sugerencias que pueden auxiliar al estudiante principiante. Esta clase de problemas de física a menudo se refieren a algún movimiento que comienza del re-

poso o detienen totalmente un movimiento con alguna velocidad inicial. En cualquiera de los casos, las ecuaciones que hemos derivado se pueden simplificar al sustituir $v_o = 0$ o $v_f = 0$, según sea el caso. La Tabla 5-1 resume las fórmulas generales.

Un examen minucioso de las cuatro ecuaciones generales revelará un total de cinco parámetros: *s*, v_o, v_f, *a* y *t*. Dadas cualquiera de tres de estas cantidades, las dos restantes pueden ser calculadas con las ecuaciones generales. Por tanto, un buen punto de partida para resolver cualquier problema consiste en leer cuidadosamente el enunciado con el fin de detectar los tres valores que se requieren para la solución. Es también importante escoger una dirección y nombrarla positiva en forma consistente tanto para velocidad, distancias y aceleración al sustituir los valores en las ecuaciones.

Si se tienen dificultades en la elección de la fórmula apropiada, puede ser de ayuda recordar las condiciones que dicha fórmula debe satisfacer. Primero, debe contener el parámetro desconocido. Segundo, todos los demás parámetros que aparezcan en la fórmula deben ser conocidos. Por ejemplo, si un problema proporciona los valores de v_f, v_o y *t*, se puede despejar *a* de la

Tabla 5-1 Resumen de Fórmulas de Aceleración

(1)	$s = \dfrac{v_f + v_0}{2}t$
(2)	$v_f = v_0 + at$
(3)	$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$
(4)	$2as = v_f^2 - v_0^2$

ecuación 2 de la Tabla 5-1. Los siguientes ejemplos ilustrarán una técnica para resolver aun los problemas más difíciles.

Ejemplo Una lancha de motor que parte del reposo, alcanza una velocidad de 30 mi/h en 15 s. ¿Cuál fue su aceleración y cuán lejos viajó?

Dados: $v_0 = 0$ Encontrar: $a = ?$

$v_f = 30 \text{ mi/h} = 44 \text{ pie/s}$ $s = ?$

$t = 15 \text{ s}$

Solución Para encontrar la aceleración, debemos elegir una fórmula que contenga *a* pero que no contenga *s*. La ecuación 2 con $v_0 = 0$ puede ser usada. Así,

$$v_f = at$$

de la cual

$$a = \frac{v_f}{t} = \frac{44 \text{ pie/s}}{15 \text{ s}}$$

$$= 2.93 \text{ pie/s}^2$$

La distancia se puede obtener de la fórmula 1 como sigue:

$$s = \frac{v_f}{2}t = \frac{44 \text{pie/s}}{2}(15 \text{ s})$$

$$= 330 \text{ pie}$$

Ejemplo Un avión aterriza en la cubierta de un portaaviones a 200 mi/h y es detenido en 600 pie. Encuentre la aceleración y el tiempo que se requirieron para detenerlo.

Dados: $v_o = 200 \text{ mi/h} = 294 \text{ pie/s}$ Encontrar: $a = ?$

$v_f = 0$ $t = ?$

$s = 600 \text{ pie}$

Solución Escogemos la fórmula 4 y despejamos *a* como sigue:

$$2as = v_f^2 - v_0^2$$

$$(2a)(600 \text{ pie}) = 0 - (294 \text{ pie/s})^2$$

$$a = \frac{-(294 \text{ pie/s})^2}{(2)(600 \text{ pie})} = \frac{-86\,400 \text{ pie/s}^2}{1\,200 \text{ pie}}$$

$$= -72 \text{ pie/s}^2$$

Luego, despejando el tiempo de la fórmula 2,

$$t = \frac{v_f - v_0}{a} = \frac{-v_0}{a} = \frac{-294 \text{pie/s}}{-72 \text{ pie/s}^2}$$

o sea

$$t = 4.08 \text{ s}$$

Ejemplo Un tren que inicialmente viaja a 16 m/s, recibe una aceleración constante de 2 m/s². ¿Cuán lejos viajará en 20 s? ¿Cuál será su velocidad final?

Dados: $v_0 = 16$ m/s Encontrar: $s = ?$
$a = 2$ m/s² $v_f = ?$
$t = 20$ s

Solución De la ecuación 3 tenemos

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \\ &= (16 \text{ m/s})(20 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(2 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s})^2 \\ &= 320 \text{ m} + 400 \text{ m} = 720 \text{ m} \end{aligned}$$

La velocidad final la obtenemos de la ecuación 2

$$\begin{aligned} v_f &= v_0 + at = 16 \text{ m/s} + (2 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s}) \\ &= 56 \text{ m/s} \end{aligned}$$

GRAVEDAD Y CAÍDA LIBRE DE LOS CUERPOS

Muchos de nuestros conocimientos acerca de la física de los cuerpos que caen se deben al científico italiano Galileo Galilei (1564-1642). Él fue el primero en demostrar que, en ausencia de fricción, todos los cuerpos, grandes o pequeños, ligeros o pesados, caen a la Tierra con la misma aceleración. Esa fue una idea revolucionaria ya que iba en contra de lo que alguien normalmente esperaría. Hasta Galileo, todos seguían las enseñanzas de Aristóteles de que los cuerpos pesados caen proporcionalmente más rápido que los ligeros. La explicación clásica de la paradoja consiste en el hecho de que los cuerpos más pesados son proporcionalmente más difíciles de acelerar. Esta resistencia al movimiento es una propiedad de los cuerpos denominada *inercia*. Así, en el vacío, una pluma y una bola de acero caerán al mismo tiempo porque el efecto inercial mayor de la bola compensa exactamente su mayor peso. (Véase la figura 5-3).

Para los efectos del tratamiento de la caída de los cuerpos en este capítulo, se ha despreciado por completo la fricción con el aire. Bajo estas circunstancias, la aceleración gravitacional es un movimiento uniformemente acelerado. Al nivel del mar y a 45° latitud, esta aceleración se ha medido y vale 32.17 pie/s² ó 9.806 m/s² y se representa por el símbolo g. Para nuestros propósitos, adoptaremos los siguientes valores, que son suficientemente seguros:

$$\boxed{\begin{aligned} g &= 32 \text{ pie/s}^2 \\ g &= 9.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}} \qquad (5\text{-}9)$$

Dado que la aceleración gravitacional g es una aceleración constante, se le aplican las mismas leyes generales del movimiento. Sin embargo, uno de los parámetros siempre se conoce con anticipación

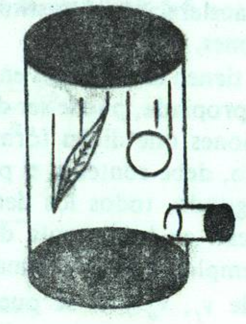

Figura 5-3 En el vacío, todos los cuerpos caen con la misma aceleración.

y por tanto no necesita ser especificado en el problema. Si la constante g se inserta en las ecuaciones generales (Tabla 5-1), se obtendrán las siguientes fórmulas modificadas:

(1*a*)	$s = \dfrac{v_f + v_0}{2}t \qquad s = \bar{v}t$
(2*a*)	$v_f = v_0 + gt$
(3*a*)	$s = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$
(4*a*)	$2gs = v_f^2 - v_0^2$

Antes de usar estas fórmulas, es conveniente hacer algunos comentarios generales. En los problemas de caída libre de los cuerpos, es extremadamente importante escoger una dirección positiva y mantenerla de manera congruente en la sustitución de los valores conocidos. El signo de la respuesta es necesario para determinar la localización de un punto o la dirección de una velocidad en tiempos específicos. Por ejemplo, la distancia s en las fórmulas de la tabla representa la distancia sobre o bajo el origen. Si la dirección hacia arriba se elige como positiva, un valor positivo de s implica una distancia sobre el punto de partida; si s es negativa, representa una distancia bajo el punto de partida. De manera similar, los signos de v_0, v_f y g indican sus direcciones

Ejemplo Una pelota de hule se deja caer del reposo como se muestra en la figura 5-4. Encuentre su velocidad y posición después de 1, 2, 3 y 4 s.

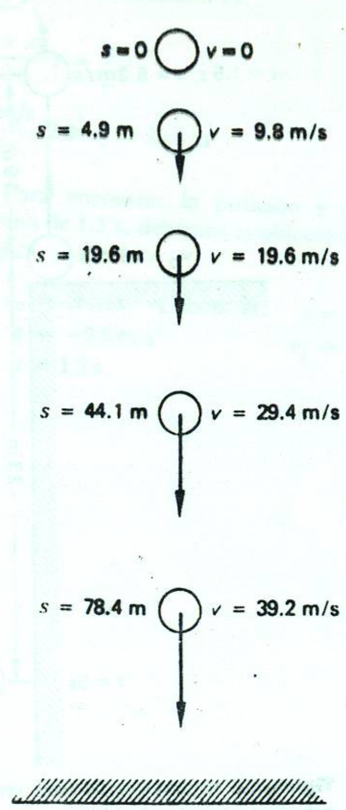

Figura 5-4 Un cuerpo en caída libre posee una aceleración hacia abajo constante e igual a 9.8 m/s².

Solución Dado que todos los parámetros se medirán hacia abajo, será más conveniente en este caso elegir la dirección hacia abajo como positiva. Organizando los datos tenemos

Dados: $v_0 = 0$ Encontrar: $v_f = ?$
$g = +32$ pie/s² $s = ?$
$t = 1, 2, 3,$ y 4 s

La velocidad en función del tiempo está dada en la fórmula *2a* en la que $v_0 = 0$.

$$\begin{aligned} v_f &= v_0 + gt = gt \\ &= (32 \text{ pie/s}^2)t \end{aligned}$$

Después de 1 s tenemos

$$v_f = (32 \text{ pie/s}^2)(1 \text{ s}) = 32 \text{ pie/s} \quad \text{hacia abajo}$$

Sustituciones similares de $t = 2$, 3 y 4 s nos darán velocidades de 64, 96 y 128 pie/s. Todas estas velocidades están dirigidas hacia abajo ya que esa dirección fue elegida como positiva.
La posición en función del tiempo se calcula a partir de la ecuación *3a*. Dado que la velocidad inicial es cero, escribimos

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 = \tfrac{1}{2}gt^2$$

de la cual

$$s = \tfrac{1}{2}(32 \text{ pie/s}^2)t^2 = (16 \text{ pie/s}^2)t^2$$

Después de 1 s, el cuerpo caerá una distancia de

$$\begin{aligned} s &= (16 \text{ pie/s}^2)(1 \text{ s})^2 = (16 \text{ pie/s}^2)(1 \text{ s}^2) \\ &= 16 \text{ pie} \end{aligned}$$

Después de 2 s

$$\begin{aligned} s &= (16 \text{ pie/s}^2)(2 \text{ s})^2 = (16 \text{ pie/s}^2)(4 \text{ s}^2) \\ &= 64 \text{ pie} \end{aligned}$$

De manera similar, el cálculo nos dará posiciones de 144 y 256 pie después de 3 y 4 s. Los resultados anteriores se resumen en la tabla 5-2.

Tabla 5-2

Tiempo t, s	Posición al final del tiempo t, pie/s	Velocidad al final del tiempo t, pie/s
0	0	0
1	32	16
2	64	64
3	96	144
4	128	256

Ejemplo Suponiendo que una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pie/s, explique sin usar ecuaciones por qué su movimiento hacia arriba es tan sólo el inverso de su movimiento hacia abajo.

Solución **Elijamos la dirección hacia arriba como positiva, con lo que la aceleración de la gravedad nos resulta —32 pie/s². El signo negativo nos indica que la velocidad de un objeto lanzado verticalmente se reducirá por 32 pie/s cada segundo que suba. (Refiérase a la figura 5-5.) Si su velocidad inicial fuera de 96 pie/s, su velocidad después de 1 s se reducirá a 64 pie/s. Tras 2 s, su velocidad será de 32 pie/s y después de 3 s su velocidad se habrá reducido a cero. Cuando la velocidad** llega a cero, la pelota ha alcanzado su altura máxima y empieza a caer libremente del reposo. Sin embargo, ahora la pelota *aumentará* su velocidad por 32 pie/s cada segundo ya que la dirección del movimiento y la de la aceleración de la gravedad son negativas. Su velocidad después de 4, 5 y 6 s será de —32, —64 y —96 pie/s respectivamente. Excepto por el signo, que indica la dirección del movimiento, las velocidades son las mismas a las mismas alturas sobre el piso.

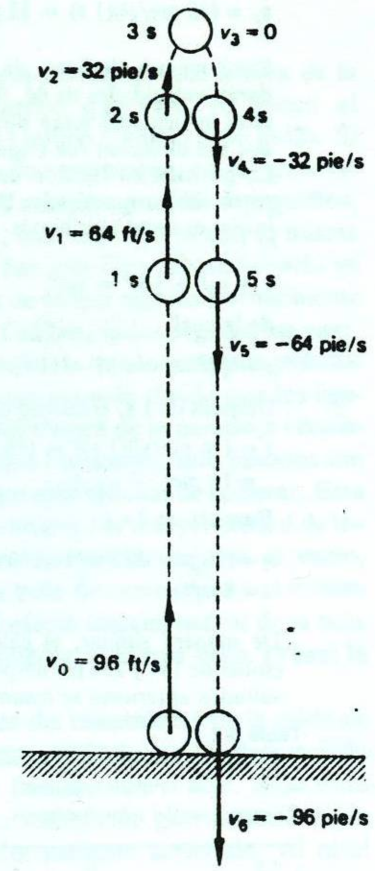

Figura 5-5 Una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba vuelve al piso con la misma velocidad.

Ejemplo Una pelota de beisbol que se lanza hacia arriba desde el techo de un edificio alto tiene una velocidad inicial de 20 m/s. *a)* Calcule el tiempo requerido para alcanzar su altura máxima. *b)* Encuentre la altura máxima. *c)* Determine su posición y velocidad después de 1.5 s. *d)* ¿Cuáles son su posición y velocidad después de 5 s? (Véase la figura 5-6.)

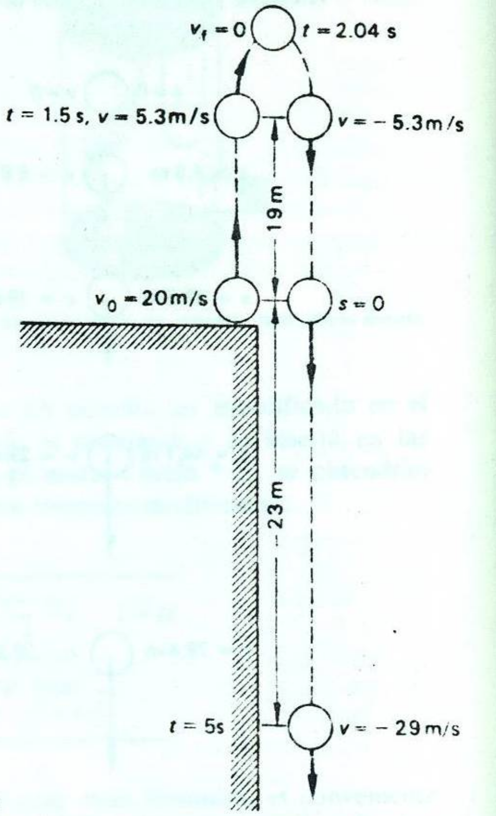

Figura 5-6 Una pelota lanzada verticalmente hacia arriba sube hasta que su velocidad es cero y después cae con velocidad creciente.

Solución a) Escojamos la dirección hacia arriba como positiva ya que la velocidad inicial está hacia arriba. En el punto más alto, la velocidad final de la pelota será igual a cero. Organizando los datos tenemos

Dados: $v_0 = 20$ m/s, $v_f = 0$, $g = -9.8$ m/s² — Encontrar: $t = ?$, $s = ?$

El tiempo que se requiere para llegar a la máxima altura se puede calcular a partir de la ecuación *2a:*

$$t = \frac{v_f - v_0}{g} = -\frac{v_0}{g}$$

$$= \frac{-20 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ s}$$

Solución b) La altura máxima se encuentra sustituyendo $v_f = 0$ en la ecuación *1a.*

$$s = \frac{v_f + v_0}{2}t = \frac{v_0}{2}t$$

$$= \frac{20 \text{ m/s}}{2}(2.04 \text{ s}) = 20.4 \text{ m}$$

Solución c) Para encontrar la posición y velocidad después de 1.5 s, debemos establecer nuevas condiciones.

Dados: $v_0 = 20$ m/s, $g = -9.8$ m/s², $t = 1.5$ s — Encontrar: $s = ?$, $v_f = ?$

Ahora podemos calcular la posición como sigue:

$$s = v_0t + \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= (20 \text{ m/s})(1.5 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ s})^2$$
$$= 30 \text{ m} - 11 \text{ m} = 19 \text{ m}$$

La velocidad después de 1.5 s está dada por

$$v_f = v_0 + gt$$
$$= 20 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.5 \text{ s})$$
$$= 20 \text{ m/s} - 14.7 \text{ m/s} = 5.3 \text{ m/s}$$

Solución d) Las mismas ecuaciones se aplican para obtener la posición y velocidad después de 5 s. Así,

$$s = v_0t + \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= (20 \text{ m/s})(5 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2$$
$$= 100 \text{ m} - 123 \text{ m} = -23 \text{ m}$$

El signo negativo indica que la pelota se encuentra a 23 m bajo el punto de lanzamiento.
La velocidad después de 5 s es

$$v_f = v_0 + gt$$
$$= 20 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})$$
$$= 20 \text{ m/s} - 49 \text{ m/s} = -29 \text{ m/s}$$

En este caso, el signo negativo indica que la pelota se está moviendo hacia abajo.