Impulso y momento

La energía y el trabajo son cantidades escalares que no nos dicen absolutamente nada acerca de la dirección. La ley de la conservación de la energía describe tan sólo la relación entre los estados inicial y final de un movimiento; pero no nos dice nada acerca de la distribución de las energías.

Por ejemplo, cuando dos objetos chocan entre sí, podemos decir que la energía total antes de la colisión es igual a la energía después del impacto, si despreciamos las pérdidas en calor debidas al rozamiento y otras fuentes. Pero si deseamos saber cómo se distribuye la energía total entre cada cuerpo del sistema o la dirección de éstos después del choque, necesitamos un nuevo concepto.

En este capítulo se presentan los conceptos de impulso y cantidad de movimiento, que vienen a añadir una descripción vectorial a nuestro estudio de la energía y el movimiento.

IMPULSO Y MOMENTO

Cuando se golpea una pelota de golf, como se muestra en la figura 9-1, una fuerza promedio F muy grande actúa sobre la pelota durante un intervalo Δt muy corto, provocando en la pelota una aceleración que cambia su estado de reposo a una velocidad final v_f. Sería muy difícil lograr medir tanto la fuerza como la duración de su acción, pero su producto $F\Delta t$ puede calcularse a partir del cambio de velocidad de la pelota que resultó. Por la segunda ley de Newton tenemos que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0}{\Delta t}$$

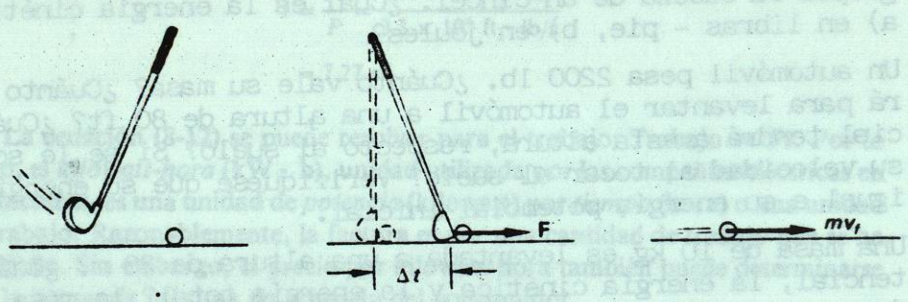


Fig. 9-1 Cuando un palo de golf golpea la pelota, una fuerza F que actúa durante un intervalo de tiempo Δt provoca un cambio en su momento.

Al multiplicar por Δt queda

$$\mathbf{F}\,\Delta t = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0)$$

o sea

$$\boxed{\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_0} \qquad (9\text{-}1)$$

Esta ecuación resulta de tanta utilidad para resolver problemas de colisiones, que se le han dado nombres especiales a cada término.

El impulso F Δt es una cantidad vectorial igual en magnitud al producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en que actúa. Su dirección es la misma que la de la fuerza.

El momento p de una partícula es una cantidad vectorial igual en magnitud al producto de su masa por su velocidad v.

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}$$

Por tanto, la ecuación (9-1) puede ser enunciada verbalmente:

Impulso ($F\,\Delta t$) = *cambio del momento* ($mv_f - mv_0$)

La unidad del impulso en el SI es el *newton-segundo* (N · s). La unidad para la cantidad de momento es el *kilogramo-metro por segundo* (kg · m/s). Es conveniente distinguir entre estas unidades aunque realmente sean iguales:

$$\mathrm{N \cdot s} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}} \times \mathrm{s} = \mathrm{kg \cdot m/s}$$

Las correspondientes unidades del sbg son la *libra-segundo* (lb-s) y el *slug-pie por segundo* (slug · ft/s).

EJEMPLO 1 Un marro de 3 kg tiene una velocidad de 14 m/s en el momento de golpear un perno de acero y es detenido en 0.02 s. Determínese la fuerza media que actúa sobre el perno.

Solución Dado que $v_f = 0$, de la ecuación (9-1) tenemos

$$F\,\Delta t = -mv_0$$

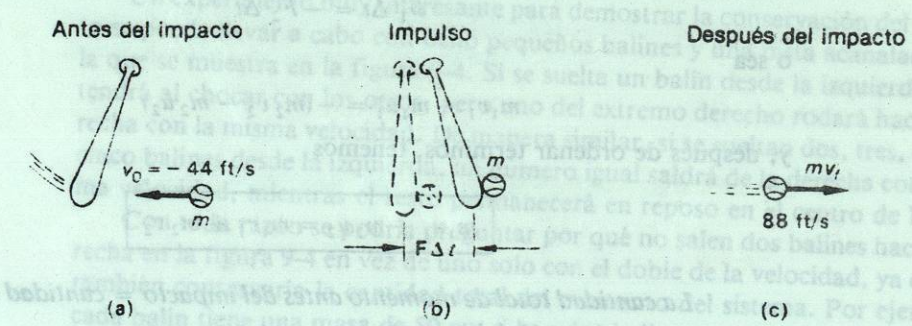
Si consideramos que el marro se mueve hacia abajo, sustituimos $v_0 = -14$ m/s, para tener

$$F = \frac{-mv_0}{\Delta t} = \frac{-(3\text{ kg})(-14\text{ m/s})}{0.02\text{ s}} = 2100\text{ N}$$

Esta fuerza, ejercida sobre el marro, es de la misma magnitud pero de dirección opuesta que la fuerza ejercida sobre el perno. Debe subrayarse que la fuerza calculada de esta manera es sólo una fuerza *media*. En algunos instantes la fuerza puede llegar a ser mucho mayor que 2100 N.

EJEMPLO 2 Una pelota de beisbol de 0.6 lb se mueve hacia el bateador a una velocidad de 44 ft/s y al ser golpeada sale en dirección contraria con una velocidad de 88 ft/s. (Véase la Fig. 9-2.) Encuéntrese el impulso y la fuerza media ejercida sobre la pelota si el bat estuvo en contacto con la pelota un lapso de 0.01 s.

Fig. 9-2 Impacto de un bat contra una pelota de beisbol.



Solución Consideremos la dirección final del movimiento como positiva. Aplicando la ecuación (9-1) podemos encontrar el impulso como sigue:

$$F\,\Delta t = mv_f - mv_0 = m(v_f - v_0)$$

y dado que

$$m = \frac{W}{g} = \frac{0.6\text{ lb}}{32\text{ ft/s}} = 0.0188\text{ slug}$$

$$F\,\Delta t = 0.0188\text{ slug}[88\text{ ft/s} - (-44\text{ ft/s})]$$

$$= 0.0188\text{ slug}(132\text{ ft/s})$$

$$\text{Impulso} = F\,\Delta t = 2.48\text{ lb} \cdot \text{s}$$

Para encontrar la fuerza promedio debemos sustituir $\Delta t = 0.01$ s

$$F(0.01 \text{ s}) = 2.48 \text{ lb} \cdot \text{s}$$

$$F = \frac{2.48 \text{ lb} \cdot \text{s}}{0.01 \text{ s}} = 248 \text{ lb}$$

LA LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

Consideremos la colisión *de frente* de las masas m_1 y m_2 que se ilustra en la figura 9-3. Representamos sus velocidades antes del impacto por los símbolos u_1 y u_2 y después del choque por v_1 y v_2. El impulso de la fuerza $\mathbf{F}_1$ que actúa sobre la masa de la derecha es

$$F_1 \Delta t = m_1 v_1 - m_1 u_1$$

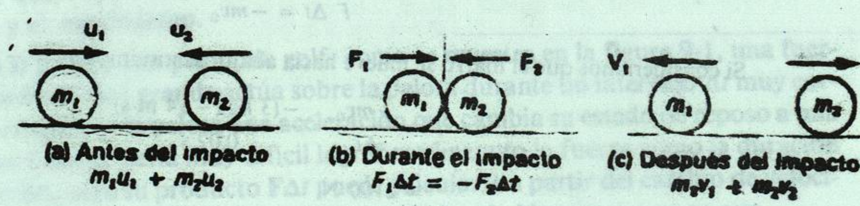


Fig. 9-3 Colisión de frente entre dos masas.

De manera similar, el impulso de la fuerza $\mathbf{F}_2$ sobre la masa de la izquierda es

$$F_2 \Delta t = m_2 v_2 - m_2 u_2$$

Durante el lapso Δt, $\mathbf{F}_1 = -F_2$, de tal manera que

$$F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t$$

o sea

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = -(m_2 v_2 - m_2 u_2)$$

y, después de ordenar términos, tenemos

$$\boxed{m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2} \qquad (9\text{-}2)$$

La cantidad total de momento antes del impacto = cantidad total de momento después del impacto.

Hemos así derivado un enunciado de la ley de *conservación del momento:*

Cuando dos cuerpos chocan, la cantidad total del momento antes del impacto es igual a la cantidad total del momento después del impacto.

EJEMPLO 3 Supóngase que la figura 9-3 m_1 y m_2 tienen masas de 8 y 6 kg, respectivamente. La velocidad inicial de m_1 es de 4 m/s a la derecha y choca con m_2 que tiene una velocidad de 5 m/s a la izquierda. ¿Cuánta cantidad de momento hay antes y después del impacto?

Solución Escogemos la dirección a la derecha como positiva y tenemos la precaución de asignar los signos correctos a cada velocidad.

$$p_0(\text{antes del impacto}) = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$p_0 = (8 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) + (6 \text{ kg})(-5 \text{ m/s})$$

$$= 32 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Debe existir la misma cantidad de momento después de la colisión, por lo que escribimos

$$p_f = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Si v_1 o v_2 se pueden medir después del choque, la otra puede ser calculada a partir de esta relación.

EJEMPLO 4 Un fusil que pesa 8 lb dispara una bala de 0.02 lb con una velocidad de salida de 2800 ft/s. Calcúlese la velocidad de retroceso del fusil si está suspendido libremente.

Solución Dado que tanto el fusil m_1 como la bala m_2 están inicialmente en reposo, al momento total antes del disparo debe ser igual a cero. La cantidad de momento total no puede cambiar, por lo que debe ser también igual a cero después del disparo. Por lo tanto, la ecuación (9-2) nos dice que

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 v_1 = -m_2 v_2$$

$$v_1 = -\frac{m_2 v_2}{m_1}$$

$$= -\frac{(0.02 \text{ lb}/32 \text{ ft/s}^2)(2800 \text{ ft/s})}{8 \text{ lb}/32 \text{ ft/s}^2}$$

$$= -7 \text{ ft/s}$$

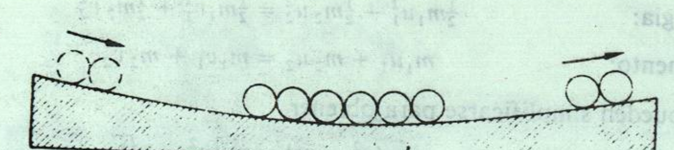


Fig. 9-4 Conservación del momento.

Un experimento muy interesante para demostrar la conservación del momento se puede llevar a cabo con ocho pequeños balines y una pista acanalada como la que se muestra en la figura 9-4. Si se suelta un balín desde la izquierda, se detendrá al chocar con los otros, pero uno del extremo derecho rodará hacia la derecha con la misma velocidad. De manera similar, si se sueltan dos, tres, cuatro y cinco balines desde la izquierda, un número igual saldrá de la derecha con la misma velocidad, mientras el resto permanecerá en reposo en el centro de la pista.

Con toda razón se podría preguntar por qué no salen dos balines hacia la derecha en la figura 9-4 en vez de uno solo con el doble de la velocidad, ya que esto también conservaría la cantidad total del momento del sistema. Por ejemplo, si cada balín tiene una masa de 50 g y si hay dos balines que se acercan desde la izquierda a una velocidad de 20 cm/s, la cantidad total del momento antes de la colisión es de 2000 g · cm/s. Esta misma cantidad de momento se podría lograr para después del impacto si sólo un balín saliera a la derecha y su velocidad fuera de 40 cm/s. La respuesta obedece a que también la energía debe conservarse. Si un solo balín saliera con el doble de la velocidad, su energía cinética sería mucho mayor que la de dos balines de la izquierda. La energía cinética que entraría al sistema sería

$$E_0 = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(0.2 \text{ m/s})^2$$

$$= 2 \times 10^{-3} \text{ J}$$

La energía cinética de un solo balín con velocidad de 40 cm/s es de exactamente el doble de este valor:

$$E_f = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.05\ \text{kg})(0.4\ \text{m/s})^2$$
$$= 4 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

Por lo tanto, podemos concluir que tanto la energía como el momento son importantes al describir los fenómenos del impacto.

CHOQUES ELÁSTICOS E INELÁSTICOS

Como resultado del experimento de la sección anterior, el estudiante podría suponer que tanto el momento como la energía cinética deben conservarse en las colisiones. Aunque esta conclusión es aproximadamente cierta para choques entre cuerpos duros como balines o bolas de billar, es falsa para cuerpos suaves que rebotan mucho más lentamente cuando chocan. Durante el choque, todos los cuerpos sufren una pequeña deformación y por lo tanto se liberan pequeñas cantidades de calor. El vigor con que un cuerpo recobra su forma original después de sufrir una deformación viene a ser una medida de su *elasticidad* o restitución.

Si la energía cinética permanece constante en un choque (caso ideal), se dice que la colisión ha sido *perfectamente elástica*. En este caso no se pierde energía por calor o deformación durante el choque. Una bola de acero templado que se deja caer sobre una placa de mármol se aproxima mucho a un choque perfectamente elástico. Si los cuerpos que chocan se adhieren entre sí y se mueven como un solo cuerpo después del impacto, se dice que la colisión fue *perfectamente inelástica*. Una bala que se incrusta en un bloque de madera es un ejemplo de este tipo de impactos. La mayor parte de las colisiones caen entre estos dos extremos.

En una colisión perfectamente elástica entre dos masas m_1 y m_2, podemos decir que tanto la energía como el momento permanecen sin cambio. Por lo tanto, podemos usar dos ecuaciones:

Energía: $\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$

Momento: $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

que pueden simplificarse para obtener

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$
$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(u_2 - v_2)$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda

$$\frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1 - v_1} = \frac{u_2^2 - v_2^2}{u_2 - v_2}$$

Factorizamos los numeradores y dividimos para lograr

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

o sea

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2) \tag{9-3}$$

Así, en el caso ideal de una colisión perfectamente elástica, la velocidad relativa después de la colisión, $v_1 - v_2$, es igual al negativo de la velocidad relativa antes del choque. Cuanto más iguales sean estas cantidades, tanto más elástica será la colisión. Un medio de medir la elasticidad de un choque, se obtiene por la relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo.

El **coeficiente de restitución** e es la relación negativa de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo.

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}$$

Si incorporamos el signo negativo en el numerador de esta ecuación tendremos

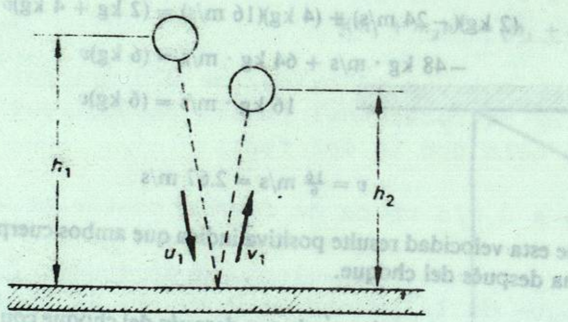
$$\boxed{e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}} \tag{9-4}$$

Si la colisión es perfectamente elástica, $e = 1$. Si la colisión es perfectamente inelástica, $e = 0$. En el caso inelástico, los dos cuerpos salen con la misma velocidad, es decir, $v_1 = v_2$. En general, el coeficiente de restitución siempre tiene un valor entre 0 y 1.

Un método simple para medir el coeficiente de restitución es el que se muestra en la figura 9-5. Una esfera del material que se va a medir se deja caer sobre una placa fija desde una altura h_1. Se mide entonces su altura de rebote h_2. En este caso, la masa de la placa es tan grande que v_2 tiende a ser igual a cero. Por lo tanto,

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = -\frac{v_1}{u_1}$$

Fig. 9-5



La velocidad u_1 es simplemente la velocidad final que adquiere la esfera al caer desde su altura h_1, que se calcula así:

$$u_1^2 - u_0^2 = 2gh_1$$

Pero su velocidad inicial $u_0 = 0$, de tal manera que

$$u_1^2 = 2gh_1$$

o sea

$$u_1 = \sqrt{2gh_1}$$

En este caso hemos considerado como positiva la dirección hacia abajo. Si la pelota rebota hasta una altura h_2, su velocidad de rebote v_1 debe ser igual a $-\sqrt{2gh_2}$. (El signo negativo indica el cambio de dirección.) Así, el coeficiente de restitución se calcula

$$e = -\frac{v_1}{u_1} = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}}$$

$$\boxed{e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}} \tag{9-5}$$