CAPÍTULO VI

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO SIMPLEX

VI INTRODUCCION AL METODO SIMPLEX

Al presentar el método gráfico, al principio de nuestra exposición, vimos una manera relativamente fácil de resolver un programa lineal en dos dimensiones (dos variables), pero cuando el número de variables va en aumento -- (en la realidad es difícil encontrarse con sólo dos variables de decisión - en un problema), resulta inaplicable este método.

La necesidad de reducir el número de soluciones consideradas en la resolución de un problema (un problema con "n" variables, y "m" restricciones tiene C_m^n soluciones) llevó al Dr. George Dantzing a elaborar un método matemático que permite resolver el problema lineal sin necesidad de analizar ex-- plícitamente el valor de la función objetivo en todos y cada uno de los puntos extremos del conjunto convexo de soluciones factibles.

1.- El Método.

Con este método, que utiliza el álgebra matricial, se resuelve gran número de programas lineales siguiendo ciertas reglas propias; es un proceso -- iterativo en el cual cada solución que se va obteniendo es mejor que la - - anterior. Para una mejor comprensión del Simplex trataremos a continuación un ejemplo sencillo:

Una compañía fabrica dos tipos de rims de magnesio que llamaremos tipo -- "X_1" y tipo "X_2". El tipo "X_1" posee un mejor acabado y requiere el doble - del tiempo que el rim "X_2". Si se fabricara únicamente el tipo "X_2", la mano de obra disponible sería suficiente para fabricar 1,500 rims de este tipo diariamente.

El rim del tipo "X_1" requiere un tratamiento especial que sólo es posible aplicarlo a 100 rims en la jornada, mientras que para el tipo "X_2" la cantidad máxima que puede ser tratado es de 700 rims por día.

El acabado final puede darse a 600 rims diariamente, ya sean "X_1", o "X_2", o una combinación lineal de ambos.

La utilidad que reportan los dos productos son: 30 unidades de utilidad para "X_1" y 10.5 unidades para "X_2".

La compañía quiere saber cuántos rims de cada tipo debe producir diariamente para maximizar sus utilidades.

Solución:

1º.- Formulación matemática.

El problema de la compañía es un problema de maximización de utilidades bajo ciertas restricciones bien precisas. La función objetivo (F.O.) sería

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2$$

Se sabe que el rim "X_1" requiere el doble de tiempo de acabado que el "X_2" y que si se fabricara solamente el "X_2", la mano de obra disponible sería suficiente para la fabricación de 1,500 rims. Podemos entonces establecer una primera restricción como:

$$(1) \qquad 2X_1 + X_2 \leqslant 1{,}500$$

El tratamiento térmico que se aplica a los productos nos limita la producción de ambos rims. Estas restricciones pueden formularse como sigue:

$$(2) \qquad X_1 \leqslant 400$$

$$(3) \qquad X_2 \leqslant 700$$

Por último, la operación de acabado nos limita la producción total a 600 rims diarios:

$$(4) \qquad X_1 + X_2 \leqslant 600$$

Tenemos así nuestro modelo matemático ya establecido; sólo faltaría, por el hecho de que la producción no puede ser negativa, agregar las condiciones de no negatividad. Tendríamos:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2$$

$$\text{sujeto a:} \quad \left| \begin{array}{l} 2X_1 + X_2 \leqslant 1{,}500 \\ X_1 \leqslant 400 \\ X_2 \leqslant 700 \\ X_1 + X_2 \leqslant 600 \\ X_i \geqslant 0, \ \forall i \end{array} \right.$$

2º.- Romper las desigualdades agregando variables de holgura (Wi).

$$\begin{array}{lllllll} (1) & 2X_1 + X_2 + W_1 & & & & = & 1{,}500 \\ (2) & X_1 & & + W_2 & & = & 400 \\ (3) & & X_2 & & + W_3 & = & 700 \\ (4) & X_1 + X_2 & & & + W_4 & = & 600 \end{array}$$

La contribución de las variables de holgura es el costo de un ocio en algún departamento, de productos no hechos, material no utilizado, etc.. En general, nosotros tomaremos una contribución nula si no especificamos lo contrario. La F.O. de nuestro problema queda entonces como:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2 + 0W_1 + 0W_2 + 0W_3 + 0W_4$$

3º.- Formar la tabla inicial del Simplex.

El objeto de agregar variables no-reales a las restricciones es de obtener una matriz identidad de orden "m", la cual, a cada iteración, se transforma en la matriz inversa de las variables de base en esa iteración. Después de cada iteración, la parte central de la tabla tiene la configuración $\left[B^{-1}A \,\vdots\, B^{-1} \right]$.

Los pasos para formar la tabla son:

a) Se forma un arreglo matricial de los coeficientes de las igualdades (coeficientes tecnológicos):

2	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

b) Al margen superior se agrega el renglón de variables; y sobre éste, el renglón de contribuciones correspondientes.

30	10.5	0	0	0	0	← Renglón objetivo.
X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	← Renglón de variables.
2	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	

cuerpo de la tabla — parte identidad

c) Al margen izquierdo se agregan los términos independientes de cada restricción, o columna de constantes (b_i , i=1,2,...,m):

	30	10.5	0	0	0	0
	X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
1,500	2	1	1	0	0	0
400	1	0	0	1	0	0
700	0	1	0	0	1	0
600	1	1	0	0	0	1

d) Primera solución. La primera solución está en función de las variables que forman la matriz identidad; éstas serán llamadas variables "básicas" o de base. Se agregará entonces una columna formada por estas variables (X_{Bi}) y otra, a su izquierda con las contribuciones respectivas (C_{Bi}):

columna de contribuciones de las variables básicas.								
			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1

columna de las variables básicas.

Esta primera solución, la cual vamos a tratar de mejorar en cada iteración es la siguiente:

$$W_1 = 1{,}500$$
$$W_2 = 400$$
$$W_3 = 700$$
$$W_4 = 600$$

con:

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 0$$

y una utilidad de:

$$Z = 0 + 0 + (0)\ (1{,}500) + (0)\ (400) + (0)\ (700) + (0)\ (600)$$

$$Z = 0$$

e) Renglón índice. En el margen inferior colocaremos el renglón índice, - formado por los elementos "z_j-c_j" bajo las columnas de las variables "j". Estos elementos se forman con la relación:

$$(z_j-c_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, c_{Bi} - c_j \quad ,$$

es decir:

La sumatoria del producto de los elementos de la columna $_j$ por el correspondiente en la columna de las contribuciones de las variables de base, menos la contribución correspondiente, en el renglón objetivo, a la variable "X_j":

			30	10.5	0	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0	
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0	
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0	
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1	
			-30	-10.5	0	0	0	1	Renglón índice

f) Por último se agrega el valor de la F.O. bajo la columna de constantes al nivel del renglón índice. Su valor se obtiene de manera similar a "z_j-c_j":

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i c_{Bi} \quad ,$$

es decir: La sumatoria del producto de los elementos de la columna de constantes (b_i) por el correspondiente en la columna de contribuciones de las - - variables de base:

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1
		0	-30	-10.5	0	0	0	0

(TABLA 1)

4ª.- Procedimiento para la búsqueda de la solución óptima (iteraciones).

a) Determinar la columna clave, cuya variable respectiva pasará a formar parte de la base y será llamada "variable de entrada". La columna clave será aquélla que tenga el elemento más negativo en el renglón índice:

$$\min_j \left\{ (z_j-c_j) \mid (z_j-c_j) < 0 \right\}$$

En el presente caso el elemento más negativo es "-30", que corresponde a la columna de "X_1":

$$\min \left\{ -30 \ , \ -10.5 \right\} = -30$$

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1
		0	-30	-10.5	0	0	0	0

columna clave "k"

b) Determinar el renglón clave, cuya variable correspondiente saldrá de la base y la llamaremos "variable de salida". En el lugar de ésta estará la variable de entrada en la tabla siguiente.

El renglón clave se encuentra dividiendo la columna de términos independientes (b_i) entre los elementos correspondientes de la columna clave (y_{ik}), cuando estos últimos son positivos. El renglón clave será el que contenga el menor cociente:

$$\min_i \left\{ \frac{bi}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1,500}{2}, \frac{400}{1}, \frac{600}{1} \right\}$$

$$= \min \left\{ 750 , 400 , 600 \right\}$$

$$= 400$$

			30	10.5	0	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0	
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0	Renglón clave "r"
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0	
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1	
		0	-30	-10.5	0	0	0	0	

El elemento que se encuentra en la intersección del renglón y la columna clave (y_{rk}) se llamará número clave. En este caso $y_{rk} = y_{21} = 1$

c) Determinar el renglón principal de la tabla siguiente.

El renglón principal de la nueva tabla se obtiene dividiendo, a partir del término independiente, los elementos del renglón clave (renglón "r") entre el número clave (y_{rk}). En el caso presente queda igual pues $y_{rk}=1$:

400 1 0 0 1 0 0

d) Se substituye la variable del renglón clave (variable de salida) y su contribución por la variable de la columna clave (variable de entrada) y su contribución:

30 X_1 400 1 0 0 1 0 0

e) El resto de los renglones objetivo y de variables, y de las columnas básicas pasan igual:

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1							
30	X_1	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3							
0	W_4							

f) Los elementos restantes de la nueva tabla, incluyendo los términos independientes, se encuentran, ya sea por transformaciones elementales, tomando como base el renglón principal y la columna clave, heciendo ceros los elementos de ésta, o por la fórmula siguiente:

$$y^*_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}\, y_{ik}}{y_{rk}} , \forall i , j ,$$

donde:

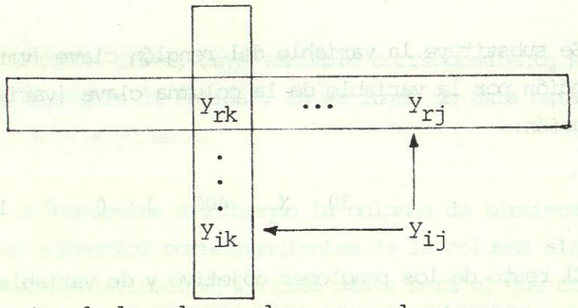
y^*_{ij} = Elemento nuevo

y_{ij} = Elemento antiguo

y_{rj} = Elemento correspondiente al elemento buscado en el renglón clave.

y_{ik} = Elemento correspondiente en la columna clave.

y_{rk} = Elemento (o número) clave:



los elementos restantes de la columna clave se vuelven ceros:

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	700	0	1	1	-2	0	0
30	X_1	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	200	0	1	0	-1	0	1
		12,000	0	-10.5	0	30	0	0

(TABLA 2)

Una vez completada la nueva tabla se examinan los elementos del renglón - - $(z_j - c_j)$. Si no hay ninguno negativo, hemos llegado a una solución óptima; en -- caso contrario buscamos una nueva tabla regresando al paso 4a.

En nuestro ejemplo hubo un elemento negativo y tenemos que buscar una nueva solución; ésta será la obtenida por la tabla:

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	500	0	0	1	-1	0	-1
30	X_1	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	500	0	0	0	1	1	-1
10.5	X_2	200	0	1	0	-1	0	1
		14,100	0	0	0	19.5	0	10.5

(TABLA 3)

Examinando los elementos del renglón índice en la nueva tabla encontramos que todos ellos son positivos o nulos, por consiguiente hemos llegado a una solución óptima, la cual se encuentra en la región de la base:

$$W_1 = 500$$
$$X_1 = 400$$
$$W_3 = 500 \quad , \text{ con } Z_{máx.} = 14{,}100$$
$$X_2 = 200$$

Esto significa que la compañía alcanzará una utilidad máxima produciendo 400 rims del tipo "X_1" y 200 del tipo "X_2"; Habiendo una holgura en la mano de obra para fabricar 500 unidades (W_1) y una holgura en el proceso de tratamiento térmico para 500 unidades (W_3).

La solución encontrada es una solución básica no degenerada pues tenemos exactamente "m" componentes del vector "X" mayores de cero y "n-m" componentes nulas.

En la gráfica de la figura I podemos seguir el camino que toma el algoritmo simplex para nuestro problema. La solución inicial (TABLA 1) se encuentra en el origen (punto "0"); de aquí partimos hacia la mejor de las soluciones adyacentes, en este caso el punto "A" (TABLA 2). Como ésta no es solución -- óptima, seguimos desplazándonos hasta encontrarla. En nuestro ejemplo el punto "B" (TABLA 3) fue el que nos dió la solución óptima.