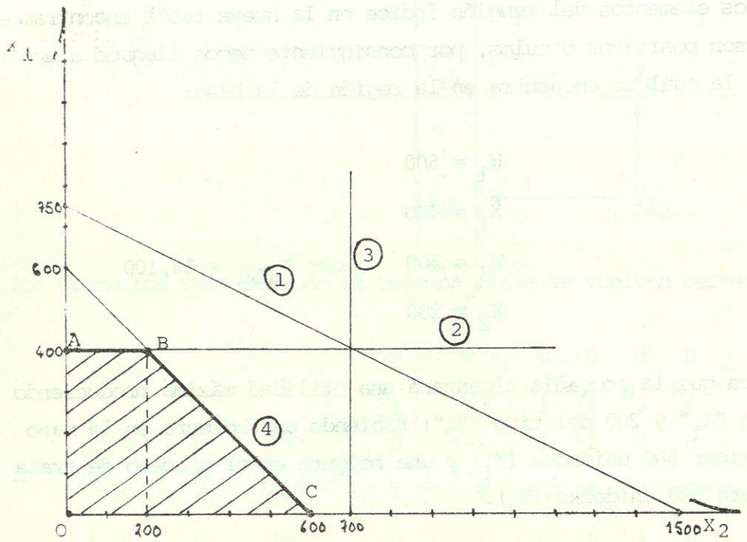


FIG. I

2.- Degeneración.

La degeneración en el método Simplex se presenta cuando, al buscar el renglón clave existen dos o más cocientes $\frac{"bi"}{y_{ik}}$ con valor algebraico mínimo:

Sea el programa lineal:

$$\text{Max.}Z = 10X_1 + 12X_2$$

sujeto a:

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leqslant 1{,}500 \\ 3X_1 + 2X_2 \leqslant 1{,}500 \\ X_1 + X_2 \leqslant 600 \\ X_i \geqslant 0 \ , \ \forall i \end{cases}$$

1ª Tabla:

			10	12	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
0	W_1	1,500	2	3	1	0	0
0	W_2	1,500	3	2	0	1	0
0	W_3	600	1	1	0	0	1
		0	-10	-12	0	0	0

2ª Tabla:

			10	12	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
12	X_2	500	2/3	1	1/3	0	0
0	W_2	500	5/3	0	-2/3	1	0
0	W_3	100	1/3	0	-1/3	0	1
		6,000	-2	0	4	0	0

En esta tabla la columna clave corresponde a la de la variable "X_1" que entrará a la base. Si tratamos de determinar la variable de salida (renglón clave), nos encontramos con un "empate" entre los renglones 2 y 3.

$$(1) \quad \frac{b_1}{y_{1k}} = \frac{500}{2/3} = 750$$

$$\left.\begin{aligned} (2) \quad \frac{b_2}{y_{2k}} &= \frac{500}{5/3} = 300 \\ (3) \quad \frac{b_3}{y_{3k}} &= \frac{100}{1/3} = 300 \end{aligned}\right\} \quad \text{empate: mín} \left\{750,\ 300,\ 300\right\} = 300$$

Existen varios métodos para deshacer la degeneración en el simplex, uno de ellos, posiblemente el más eficiente, consiste en dividir cada elemento de los renglones empatados entre el elemento correspondiente en la columna clave; Se comparan los elementos de los renglones empatados, columna por columna, a partir de la parte identidad hacia la derecha. La degeneración se rompe al encontrar la primera diferencia, escogiendo como renglón clave el correspondiente al menor cociente. Si no existe ninguna diferencia en la parte identidad se continuará con las columnas del cuerpo de la tabla. Para nuestro ejemplo tenemos:

(2)	$\frac{5/3}{5/3}$	$\frac{0}{5/3}$	$\frac{-2/3}{5/3}$	$\frac{1}{5/3}$	$\frac{0}{5/3}$
(3)	$\frac{1/3}{1/3}$	$\frac{0}{1/3}$	$\frac{-1/3}{1/3}$	$\frac{0}{1/3}$	$\frac{1}{1/3}$

columnas de la parte identidad (B^{-1})

Al examinar la primera columna vemos que el cociente del tercer renglón es menor que el del segundo:

(2) $-2/5$

(3) -1 } menor

Por consiguiente la degeneración se rompe y el renglón clave será el tercero:

			10	12	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
12	X_2	500	2/3	1	1/3	0	0
0	W_2	500	5/3	0	-2/3	1	0
0	W_3	100	1/3	0	-1/3	0	1
		6,000	-2	0	4	0	0

y el procedimiento seguirá normalmente, obteniendo en la última tabla:

$$X_B = \begin{bmatrix} X_2 \\ W_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix}, \quad Z_{máx} = 6,600 ,$$

resultado que sugerimos al lector verifique por el método expuesto hasta aquí.

3.- Método de la "M" grande

Hemos visto, en lo expuesto anteriormente, una manera de resolver un programa lineal con restricciones del tipo "menor o igual" ($\leq$). Es evidente que no existe este solo tipo de restricciones. En efecto, podemos encontrarnos también frente a restricciones del tipo "mayor o igual" ($\geq$) o de igualdad (=).

Como vimos en la sección 1 del capítulo IV, una desigualdad del tipo " $\geq$ " puede deshacerse mediante la substracción de una variable de holgura. Para poder utilizar el método simplex con cualquier tipo de restricciones, tenemos que formar una matriz identidad en la parte derecha de la tabla, así es que agregamos una nueva variable que llamaremos "ficticia", de manera que no nos afecte en nuestros resultados:

$$X_1 + X_2 \geqslant 5 \sim X_1 + X_2 - W_1 + U_1 = 5$$

misma razón, si tenemos una restricción de igualdad agregaremos una variable ficticia:

$$X_1 + X_2 = 3 \quad \sim \quad X_1 + X_2 + U_1 = 3$$

Las contribuciones a la F.O. de las variables de holgura negativas siguen siendo nulas (0), mientras que las de las variables ficticias tendrán un -- valor muy grande (M), que será negativo si el objetivo es maximizar y positivo si el objetivo es minimizar. De esta manera nuestro método se encargará de sacar todas las variables ficticias de la base.

Así, si nuestra F.O. es de la forma $\text{Max.}Z = \sum_i c_i X_i$, al deshacer las -- desigualdades para formar la matriz identidad tomará la forma:

$\text{Max.}Z = \sum_i c_i X_i + 0 \sum_j W_j - M \sum_k U_k$; y si tiene la forma

$\text{Mín.}Z = \sum_i c_i X_i$ tomará la forma:

$$\text{Mín.}Z = \sum_i C_i X_i + 0 \sum_j W_j + M \sum_k U_k \cdot$$

Veremos un ejemplo cuyo enunciado omitimos para fines de ilustración. Sea el programa lineal a optimizar:

$$\text{Max.}Z = 3X_1 - X_2 - X_3$$

$$\text{sujeto a:} \left| \begin{array}{l} X_1 - 2X_2 + X_3 \leqslant 11 \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 \geqslant 3 \\ 2X_1 \quad - X_3 = -1 \\ X_i \geqslant 0, \forall i \end{array} \right.$$

Al deshacer desigualdades vemos que tenemos que multiplicar por (-1) la - tercera restricción, ya que tenemos un número negativo como término independiente. Tenemos:

$$\begin{array}{l} X_1 - 2X_2 + X_3 + W_1 = 11 \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 - W_2 + U_1 = 3 \\ -2X_1 + X_3 + U_2 = 1 \end{array}$$

y la F.O. queda:

$$\text{Max.}Z = 3X_1 - X_2 - X_3 + 0W_1 + 0W_2 - MU_1 - MU_2$$

Para obtener una matriz identidad en el lado derecho, al inspeccionar las - restricciones en su nueva forma, nos damos cuenta de que el orden de las variables deberá ser:

$$X_1, X_2, X_3, W_2, W_1, U_1, U_2 \ ,$$

es decir: primero las variables reales; inmediatamente después, las variables - de holgura que se restaron a las restricciones " $\geqslant$ ", guardando el orden de las restricciones, y después las de holgura "positivas" y/o las ficticias según el mismo orden de aparición.

Utilizando el procedimiento ya estudiado tenemos:

			3	-1	-1	0	0	-M	-M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_1	U_1	U_2
0	W_1	11	1	-2	1	0	1	0	0
-M	U_1	3	-4	1	2	-1	0	1	0
-M	U_2	1	-2	0	1	0	0	0	1
		-4M	(6M-3)	(-M+1)	(-3M+1)	M	0	0	0

Sabiendo que "M" es un número muy grande ($M \longrightarrow \infty$), la columna clave en este caso es la tercera, puesto que $(z_3 - c_3) = -3M+1$ es el elemento "más negativo" del renglón índice.

iendo el procedimiento Simplex llegamos a la tabla óptima:

			3	-1	-1	0	0	-M	-M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_1	U_1	U_2
3	X_1	4	1	0	0	-2/3	1/3	2/3	-5/3
-1	X_2	1	0	1	0	-1	0	1	-2
-1	X_3	9	0	0	1	-4/3	2/3	4/3	-7/3
		2	0	0	0	1/3	1/3	(M-1/3)	(M-2/3)

donde la solución óptima es:

X_1 = 4 unidades de producción

X_2 = 1 unidad de producción

X_3 = 9 unidades de producción

utilidad máxima = 2 unidades de utilidad.

4.- Modelo de dietas.

Este tipo de modelos es llamado "de dietas" pues se originó con el estudio de dietas alimenticias a costo mínimo, donde se tenía en cuenta el contenido de elementos nutritivos de los alimentos que formaban dicha dieta. Implican límites mínimos o máximos del contenido de esos elementos en la dieta buscada.

Ejemplo:

Una compañía fabricante de productos farmacéuticos desea lanzar al mercado unas tabletas compuestas de Niacina y Tiamina, con una materia inerte para completar el peso y facilitar el pastillado.

Las características de una tableta son:

Peso: 5 dgr.

Contenido de Niacina: Entre 60 mgr.(mín.) y 80 mgr.(máx.)

Contenido de Tiamina: Entre 80 mgr.(mín.) y 95 mgr.(máx.)

Para la fabricación de dichas tabletas se dispone de los ingredientes A y B cuyo contenido y costo son:

componentes \ ingredientes	A	B
Niacina (mgr/dgr.)	20	15
Tiamina (mgr./dgr.)	5	25
Costo ($/dgr.)	2.00	3.00

El costo del elemento inerte es de $1.00/dgr. y se desea obtener la mezcla más económica.

El programa lineal correspondiente es:

$$\text{Mín.} Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3$$

$$\text{sujeto a:} \begin{cases} 20X_1 + 15X_2 \geqslant 60 \\ 20X_1 + 15X_1 \leqslant 80 \\ 5X_1 + 25X_2 \geqslant 80 \\ 5X_1 + 25X_2 \leqslant 95 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 5 \\ Xi \geqslant 0, \forall i \end{cases}$$

donde las X_i son las cantidades en decigramos de A, B y C, la materia inerte

La 1ª.- tabla simplex es:

			2	3	1	0	0	M	0	M	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_3	U_1	W_2	U_2	W_4
M	U_1	60	20	15	0	-1	0	1	0	0	0
0	W_2	80	20	15	0	0	0	0	1	0	0
M	U_2	80	5	25	0	0	-1	0	0	1	0
0	W_4	95	5	25	0	0	0	0	0	0	1
M	U_3	5	1	1	1	0	0	0	0	0	0
		(145M)	(26M-2)	(41M-3)	(M-1)	-M	-M	0	0	0	0

y la tabla óptima:

			2	3	1	0	0	M	0	M	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_3	U_1	W_2	U_2	W_4
2	X_1	12/17	1	0	0	-1/17	3/85	1/17	0	-3/85	0
0	W_2	20	0	0	0	1	0	-1	1	0	0
3	X_2	52/17	0	1	0	1/85	-4/85	-1/85	0	4/85	0
0	W_4	15	0	0	0	0	1	0	0	-1	1
1	X_3	21/17	0	0	1	4/85	1/85	-4/85	0	-1/85	0
		201/17	0	0	0	-3/85	-1/17	(-M-4/85)	0	$(-M+\frac{1}{17})$	0

La solución óptima es entonces:

* 0.706 Decigramos del ingrediente A
* 3.059 Decigramos del ingrediente B
* 1.235 Decigramos de materia inerte.

costo mínimo: $11.82

Nota: Se recomienda al lector verificar este resultado.

5.- Problemas sin solución.

Un problema sin solución se detecta cuando, habiendo llegado a una tabla --- que cumple con las condiciones de optimalidad, la solución "óptima" está en función de una variable ficticia, es decir que hay cuando menos una variable ficticia no nula.

Consideremos el programa lineal:

$$\text{Max.}Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$\text{sujeto a:} \left| \begin{array}{l} 2X_1 + X_2 \leqslant 10 \\ X_1 + 3X_2 \geqslant 36 \\ X_i \geqslant 0, \forall i \end{array} \right.$$

que resuelto por el simplex se obtiene una tabla óptima:

			3	2	0	0	-M
			X_1	X_2	W_2	W_1	U_1
2	X_2	10	2	1	0	1	0
-M	U_1	6	-5	0	-1	-3	1
		(-6M+10)	(5M+1)	0	M	(3M+2)	0

que nos da una solución no factible puesto que la variable ficticia "U_1" tiene un valor positivo, y, para que una solución sea factible es necesario que las variables ficticias tengan un valor nulo.

Si aplicamos el método gráfico tenemos las coordenadas al origen:

* para la restricción 1 : $X_1 = 5$; $X_2 = 10$
* para la restricción 2 : $X_1 = 36$; $X_2 = 12$
* para la función objetivo: $X_1 = 10$; $X_2 = 15$

graficando:

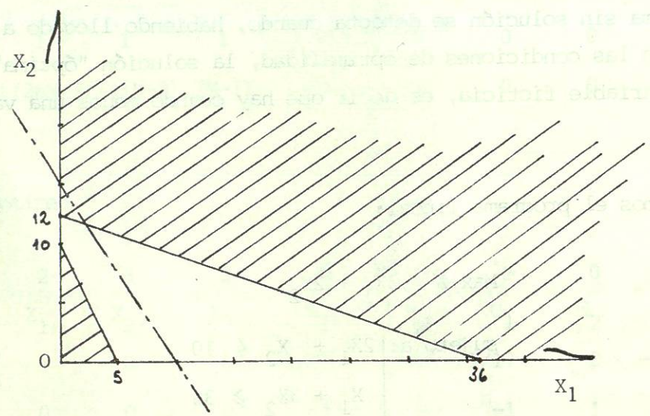


FIG. II

Como se ve no existe ningún punto que satisfaga simultáneamente las restricciones del programa planteado. El caso más evidente es cuando tratamos con desigualdades de sentido contrario con pendiente igual a uno (paralelas a 45°).

En estos casos se dice que el sistema de ecuaciones es inconsistente, y proporciona una solución pseudo-óptima.

5.-Problemas con solución ilimitada.

Cuando en el procedimiento simplex no se puede continuar porque no podemos encontrar el renglón clave (variable de salida), la solución del problema tratado es ilimitada.

Consideremos el programa lineal siguiente:

$$\text{Max.} Z = 6X_1 + 2X_2$$

$$\text{sujeto a:} \left| \begin{array}{l} X_1 + X_2 \geqslant 10 \\ X_2 \leqslant 8 \\ X_i \geqslant 0, \forall i \end{array} \right.$$

Al resolverlo por el método simplex encontramos que no podemos pasar de la segunda tabla:

			6	2	0	-M	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
6	X_1	10	1	1	-1	1	0
0	X_5	8	0	1	0	0	1
		60	0	5	-6	(M+6)	0

Aquí la columna clave es la correspondiente a la variable de holgura "X_3", que en principio debe entrar a la base, pero no podemos encontrar la variable de salida aplicando nuestra regla de selección, puesto que un elemento de la columna clave es negativo y el otro es cero. La variable más viable sería "X_5", que tiene el único cociente "positivo", pero éste es indeterminado o infinito. Así, tanto los valores de las variables de base como de la función objetivo son del mismo tipo.

Por el método gráfico tenemos:

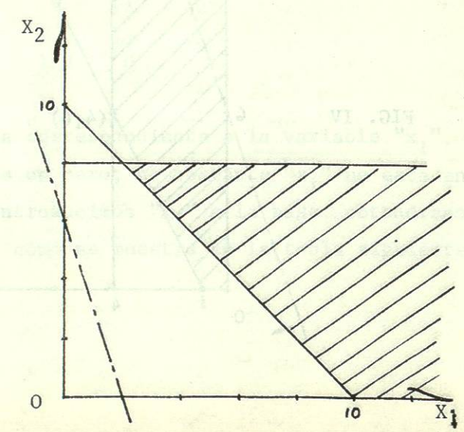


FIG.III

servamos que para $X_2 = 8$ cualquier valor de "X_1" superior a 7.33 mejora solución de $Z = 60$ hasta el infinito.

No todos los problemas que tienen un conjunto de soluciones infinito (no acotado) tienen solución ilimitada. El siguiente ejemplo es una prueba de ello:

$$\text{Max.}Z = 6X_1 - 2X_2$$

$$\text{sujeto a:} \left| \begin{array}{l} 2X_1 - X_2 \leqslant 2 \\ X_1 \leqslant 4 \\ X_i \geqslant 0, \forall i \end{array} \right.$$

cuya tabla óptima es:

			6	-2	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4
6	X_1	4	1	0	0	1
-2	X_2	6	0	1	-1	2
		12	0	0	2	2

y su gráfica:

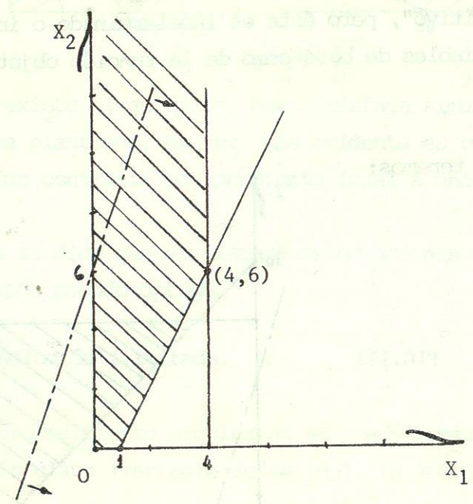


FIG. IV

7.- Problemas con soluciones múltiples

Cuando en el renglón índice $(Z_j - C_j)$, de la tabla óptima del Simplex aparecen, además de los correspondientes a las variables básicas, uno o más elementos nulos, se dice que la solución obtenida no es única, sino que el problema tiene soluciones múltiples. La solución que aparece en la tabla óptima corresponde sólo a un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Esto se debe a que la función objetivo tiene la misma pendiente que alguna de las restricciones-frontera de dicho conjunto.

Tomemos el siguiente ejemplo:

$$\text{Max.}Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\ 4x_1 + 10x_2 \leqslant 20 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_i \geqslant 0, \forall i \end{array} \right.$$

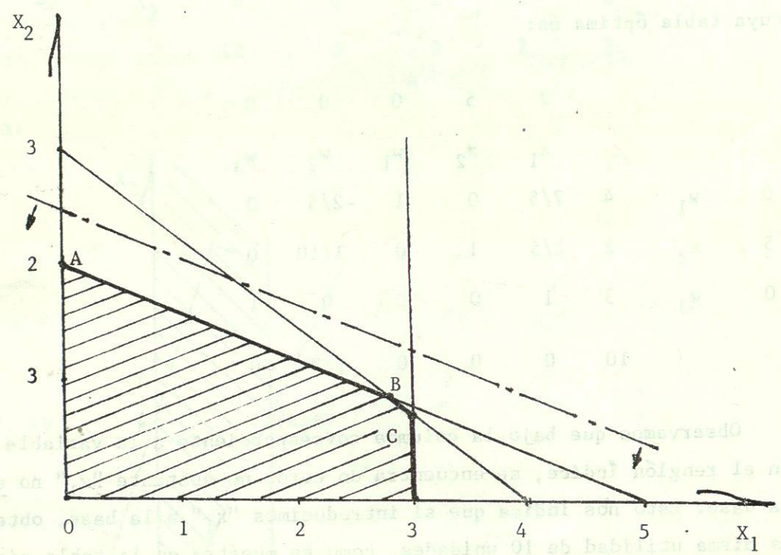
cuya tabla óptima es:

			2	5	0	0	0
			x_1	x_2	w_1	w_2	w_3
0	w_1	4	7/5	0	1	-2/5	0
5	x_2	2	2/5	1	0	1/10	0
0	w_3	3	1	0	0	0	1
		10	0	0	0	1/2	0

Observamos que bajo la columna correspondiente a la variable "x_1", en el renglón índice, se encuentra un cero; no obstante "x_1" no está en la base. Esto nos indica que si introducimos "x_1" a la base, obtendremos la misma utilidad de 10 unidades, como se muestra en la tabla siguiente:

			2	5	0	0	0
			x_1	x_2	w_1	w_2	w_3
2	x_1	20/7	1	0	5/7	-2/7	0
5	x_2	6/7	0	1	-2/7	3/14	0
0	w_3	1/7	0	0	-5/7	2/7	1
		10	0	0	0	1/2	0

Estas dos soluciones están localizadas en la gráfica correspondiente con los puntos A y B, que son puntos extremos del conjunto convexo de soluciones y están unidos por una recta. Así, puesto que la F.O. es paralela a dicha recta (con igual pendiente), toda combinación sobre la recta - A,B dará la misma utilidad.



CAPÍTULO VII

MÉTODO SIMPLEX-DUAL