.·. Teorema de dualidad.

Dado un programa lineal, y su correspondiente dual, de los siguientes casos uno, y sólo uno puede ocurrir:

1) Ambos tienen solución óptima, y sus funciones-objetivo respectivas son iguales, es decir que si X^* es el óptimo del Primal y V^* el óptimo del Dual, entonces $Z^* = cX^* = b^TV^* = G^*$.

2) Uno de ellos no tiene solución factible mientras que el otro -- tiene solución óptima no acotada.

3) En ninguna de sus formas (Primal o Dual) el programa lineal tiene solución.

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

VII. ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Introducción.

En ocaciones, después de haber resuelto un programa lineal y aceptado sus resultados durante un cierto tiempo, podemos encontrar que las condiciones tomadas en cuenta entonces para su solución, ya no son las mismas (han cambiado los costos, el proceso mismo, las disponibilidades, etc.). Volver a resolver el problema, sobre todo si es de gran tamaño, sería muy fastidioso y en ocasiones muy tardado; afortunadamente existen métodos que se ocupan de estos cambios "discretos" en programas lineales, los llamados métodos de Análisis de Sensibilidad. Los cambios "continuos" se estudiarán en una sección posterior.

El análisis de sensibilidad toma como punto de partida la tabla óptima (método Simplex) del problema original. Por esta razón creemos nosotros conveniente que el estudiante se familiarice y estudie a conciencia la división de la tabla Simplex que presentamos a continuación.

La primera tabla del Simplex, tal como la hemos estudiado en este curso, tiene la configuración siguiente(1):

			C_N	C_B
			X_N^T	X_B^T
C_B^T	X_B	b_o	$A_{(mxn)}$	$I_{(m)}$
		Z_o	$(Z_j - C_j)$	0

(1) Para fines de ilustración, hemos tratado de adoptar una nomenclatura relativamente simple con base a las exposiciones de diferentes autores.

..e:

C_N= Vector de contribuciones de las variables no básicas(vector fila).

C_B= " " " " " " básicas (vector fila de orden "m"),

X_N^T= Vector transpuesto de las variables no básicas,

X_B^T= " " " " " básicas,

C_B^T= Vector transpuesto de C_B

X_B= Vector de variables de base (vector columna de orden "m"),

b_o= Vector original de términos independientes(de orden "m"),

Z_o= Valor inicial de la función objetivo,

A = Matriz (de orden "mxn") de coeficientes tecnológicos. Son los coeficientes de las variables que no están incluidas en la base.

I = Matriz identidad de orden "m",

(Z_j-C_j) =Vector fila de los elementos en el renglón índice, correspondientes a las variables no básicas,

0 =Vector fila de los elementos nulos en el renglón índice, correspondientes a las variables básicas.

Sabiendo que:

$$C = (C_N, C_B) = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+m}) \ , \quad 0 = (0, 0, \ldots, 0) \ ,$$

$$X = \begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n+m} \end{bmatrix} , \quad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} , \qquad Z_o = C_B b_o \qquad (1)$$

$$(Z_j-C_j) = C_B A - C_N \qquad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} , \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Distinguiremos en la parte central de la tabla inicial del Dimplex la matriz particionada $[A \,\vdots\, I]$, que estará compuesta de "n+m" vectores columna, a los que llamaremos vectores "a_j". Así, esta primera tabla estaría formada de la manera siguiente:

			c_1 c_2 . . . c_n	$c_{n+1} \cdots c_{n+m}$
			x_1 x_2 . . . x_n	$x_{n+1} \cdots x_{n+m}$
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	$[a_1]$ $[a_2]$ . . . $[a_n]$	$[a_{n+1}] \cdots [a_{n+m}]$
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m		
		$C_B b_o$	$(z_1-c_1)(z_2-c_2) \ldots (z_n-c_n)$	$\ldots (z_{n+m}-c_{n+m})$

donde los vectores a_j son:

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} , \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n+m \ ,$$

y los elementos del renglón índice son el resultado de:

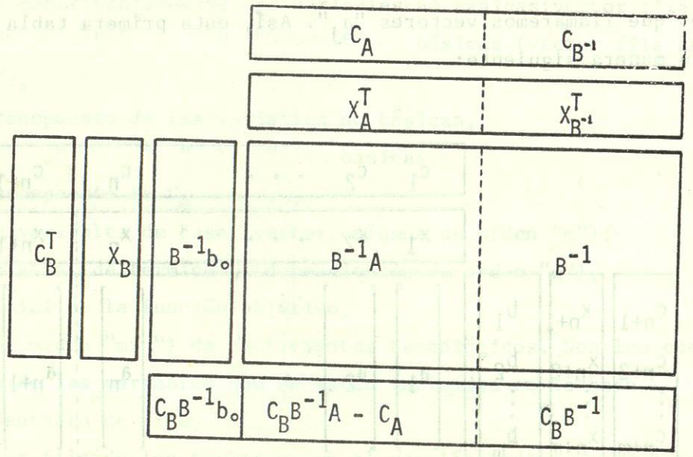
$$(Z_j-C_j) = C_B A - C_N \qquad (3)$$

que, tomando en consideración elemento por elemento, tendríamos:

$$(z_j-c_j) = C_B a_j - c_j \ . \qquad (4)$$

Puesto que con cada iteración se formará una nueva tabla, para las tablas siguientes (después de la primera iteración) haremos un ligero cambio

la identificación de las partes de las mismas:



donde el vector X_B será :

$$X_B = \left[X_{Bi}\right] = \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{Bm} \end{bmatrix} ,$$

la matriz "B^{-1}" es la matriz inversa de "B", la matriz de base formada por - los vectores "a_j" correspondientes a las variables básicas "X_{Bi}":

$$B^{-1} = \left[a_j\right]^{-1} \quad , \quad j \in B ,$$

donde los vectores "a_j" están tomados de la tabla inicial.

El vector de términos independientes, diferente para cada nueva itera-- ción, "b":

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} = B^{-1}b_o . \qquad (5)$$

Introduciremos aquí un nuevo vector, aquél formado por los elementos en el renglón índice, bajo la parte identidad. Lo llamaremos :

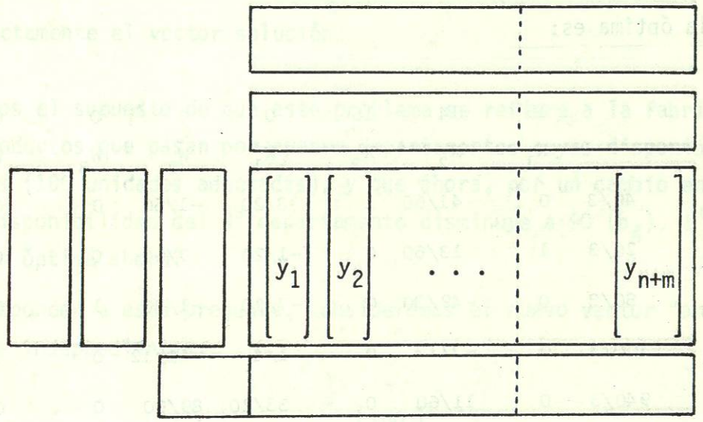
$$\pi = C_BB^{-1}. \qquad (6)$$

Este vector se puede utilizar para encontrar, en cualquier iteración:

a) $Z = \pi b_o$ (7)

b) $(z_j - c_j) = \pi a_j - c_j$ (8)

Identificaremos el contenido de la matriz, en cualquier iteración poste rior, con los vectores " y_j" :



que varían con cada iteración, y cuyos elementos se pueden encontrar con - la relación : $y_j = B^{-1}a_j$. (9)

Una vez comprendida la configuración matricial de las tablas del Simplex, veamos cómo podemos sacar provecho de sus propiedades.

1. Cambios discretos en los términos independientes (b_j)

Consideremos el programa lineal:

$$\text{Max. } Z = 15x_1 + 14x_2 + 16x_3$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leqslant 100 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 100 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 100 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 100 \\ x_i \geqslant 0 \ , \ \forall\, i \end{array}\right.$$

cuya tabla óptima es:

			15	14	16	0	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_2	W_3	W_4
16	X_3	40/3	0	41/60	1	3/20	-1/60	0	0
15	X_1	20/3	1	13/60	0	-1/20	7/60	0	0
0	W_3	80/3	0	-49/30	0	-7/10	-1/30	1	0
0	W_4	100/3	0	7/12	0	1/4	-11/12	0	1
		940/3	0	11/60	0	33/20	89/60	0	0

de donde:

$$b^* = \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 100/3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el vector original era:

$$b_o = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} ,$$

veamos lo que obtenemos al hacer la operación " $B^{-1}b_o$" :

$$B^{-1}b_o = \begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 100/3 \end{bmatrix} = b^*$$

que es exactamente el vector solución.

Aceptemos el supuesto de que este problema se refiere a la fabricación de tres productos que pasan por cuatro departamentos cuyas disponibilidades son iguales (100 unidades adecuadas), y que ahora, por un cambio en el proceso, la disponibilidad del 4° departamento disminuye a 90 (b_4). ¿ Cuál es la solución óptima ahora?

Para responder a esta pregunta, consideremos el nuevo vector "original" de términos independientes:

$$b_o' = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

que, al multiplicarlo por "B^{-1}" dará como resultado el vector solución correspondiente a la iteración actual (anteriormente óptima) del problema -- considerando el cambio:

$$b^{*\prime} = \begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 70/3 \end{bmatrix}$$

Vemos que "b_4^*" cambió de 100/3 a 70/3, lo que significa que el departa-- mento 4 tendrá una holgura menor (w_4 = 70/3). Notemos que todos los elementos del nuevo vector son no negativos, por consiguiente es una solución factible, y sigue siendo óptima (el renglón índice no cambia) con una contribución máxima de:

$$Z^{*\prime} = C_B b^{*\prime} = (\ 16,\ 15,\ 0,\ 0\ ) \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 70/3 \end{bmatrix} = 940/3\ .$$

Supongamos ahora que en vez de una disminución, tenemos que, por un mejoramiento en el proceso, la disponibilidad del departamento 1 aumenta en un 50% su capacidad (b_1' = 150):

$$b_o' = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

y el vector en la última tabla sería:

$$b^{*\prime} = \begin{bmatrix} 125/6 \\ 25/6 \\ -25/3 \\ 165/2 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{con } Z^{*\prime} = 2{,}375/6$$

que no podemos considerar como solución óptima, pues un elemento de la solución, $b_3^{*\prime}$, es negativo, que corresponde a la variable de holgura asignada al tercer departamento (w_3 = -25/3).

La tabla correspondiente es:

			15	14	16	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4
16	x_3	125/6	0	41/60	1	3/20	-1/60	0	0
15	x_1	25/6	1	13/60	0	-1/20	7/60	0	0
0	w_3	-25/3	0	-49/30	0	-7/10	-1/30	1	0
0	w_4	165/2	0	7/12	0	1/4	-11/12	0	1
		2375/6	0	11/60	0	33/	89/60	0	0

El procedimiento que utilizamos para llegar a esta tabla no fue el del - algoritmo Simplex, sino una de sus propiedades, por lo tanto, podremos utilizar otra de sus propiedades (duales) para encontrar la tabla que corres-- pondería normalmente a esta iteración si hubiésemos considerado el cambio a partir de la primera tabla.

Tratando de encontrar una solución básica factible, sacaremos de la base la variable negativa "w_3" (renglón clave), y buscamos la variable de entrada (columna clave) entre los cocientes positivos "b_3/y_{3j}", seleccionando como columna clave la correspondiente al menor de ellos:

$$\underset{j}{\text{mín.}} \left[\frac{b_3}{y_{3j}} > 0 \right] = \text{mín.} \left[\frac{250}{49}, \frac{250}{21}, 250 \right] = \frac{250}{49}$$

La variable de entrada será entonces " x_2 ", y la tabla óptima, considerando el cambio en el vector original, resulta ser:

			15	14	16	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4
16	x_3	850/49	0	0	1	-1/7	-3/98	41/98	0
15	x_1	150/49	1	0	0	-3/70	11/98	13/98	0
14	x_2	250/49	0	1	0	1/7	1/49	30/49	0
0	w_4	1670/21	0	0	0	0	-91/98	35/98	1
		19350/49	0	0	0	11/7	145/98	11/98	0

2. Cambios discretos en las Contribuciones (c_j)

Los cambios en las contribuciones se pueden presentar de dos maneras: en la contribución de una variable básica, en cuyo caso puede variar el renglón índice y el valor de la F.O., y en la contribución de una variable no básica, lo que generaría una variación en su elemento índice. En ambos casos se puede presentar, o no, la necesidad de una nueva iteración.

2.1. Caso de una variable básica.

Tomemos de nuevo el ejemplo anterior y supongamos que, por una exigencia de calidad, la utilidad del producto "x_3" desciende a 15 en vez de 16 actuales. Como explicamos más arriba, este cambio afecta los valores del renglón índice y de la F.O., que pueden encontrarse como sigue:

$$Z' = C_B'B^{-1}b_\circ = C_B'b = (15,\ 15,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 100/3 \end{bmatrix} = 300 \qquad (7\ \text{bis})$$

y

$$(z_j - c_j)' = C_B'B^{-1}a_j - c_j \qquad (8\ \text{bis})$$

Tomando en cuenta que las variables básicas tienen un elemento índice -- igual a cero, podemos expresar el renglón índice de una manera más general:

$$(Z_j - C_j)' = C_B'B^{-1}N - C_N \quad , \quad j \notin B \qquad (1\ldots)$$

donde "N" es la matriz de vectores "a_j" correspondientes a las variables no básicas en la última tabla, extraídos de la primera tabla, conservando su orden de izquierda a derecha, y "C_N" es el vector de sus contribuciones.

En el caso que nos ocupa tenemos:

$$N = \left[\ a_2,\ a_4,\ a_5\ \right] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_N = (c_2,\ c_4,\ c_5) = (\ 14,\ 0,\ 0\ )$$

entonces:

$$(Z_j - C_j)' = (15,\ 15,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (14,\ 0,\ 0\ )$$

$$= (3/2,\ 3/2,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (\ 14,\ 0,\ 0\ )$$

$$= (\ 27/2,\ 3/2,\ 3/2\ ) - (\ 14,\ 0,\ 0\ )$$

$$= (\ -1/2,\ 3/2,\ 3/2\ )$$

Estos elementos índice de la nueva tabla pudieron haberse encontrado por la relación (8 bis), o por la relación (8), encontrando el nuevo vector - π .

La nueva tabla queda en la forma: