UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
COORDINACION DE CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

PROGRAMACION LINEAL

DEPARTAMENTO DE METODOS CUANTITATIVOS

ING. LEOPOLDO J. DELGADO G.
ING. SERGIO H. VILLARREAL

MONTERREY, N. L. MARZO DE 1984

108

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
COORDINACION DE CIENCIAS DE LA ADMINISTRACION

no es Tesis

PROGRAMACION LINEAL

DEPARTAMENTO DE METODOS CUANTITATIVOS

ING. LEOPOLDO J. DELGADO G.
ING. SERGIO H. VILLARREAL

MONTERREY, N. L. MARZO DE 1984

P R O L O G O

El presente trabajo ha sido realizado por el Ing. Leopoldo J. Delgado Garza, en colaboración con el Ing. Sergio H. Villarreal, ambos catedráticos de esta Facultad. Es una revisión corregida y aumentada de unos apuntes -- que existieron en semestres anteriores en esta Coordinación.

El objetivo perseguido es el de iniciar al alumno en las técnicas de - la Programación Lineal -que le serán de mucha utilidad para diferentes asignaturas posteriores-, por lo que no se trata aquí de un tratado exhaustivo de la materia, sino de un curso meramente introductorio. El alumno interesado en profundizar sus conocimientos en algún punto en especial, podrá remitirse a las obras que se mencionan en la bibliografía anexa.

Creo que el estilo de redacción es de fácil acceso para el alumno que llega por primera vez a cursar esta materia, y que el nivel matemático adoptado en la exposición estará a su alcance. Sin embargo, para una comprensión y un mejor aprovechamiento, recomiendo que el alumno repase sus cursos de Algebra, de Vectores y de Matemáticas-I.

Me permito aquí felicitar a los ingenieros que participaron en la preparación de este trabajo, cuya callada labor contribuye grandemente al nivel académico de nuestra Facultad, exhortándolos a que sigan en el camino de la superación.

Marzo, 1984

Ing. Arturo Borjas Roacho
Depto. de Métodos Cuantitativos
Coordinación de Ciencias de la Administración

TABLA DE MATERIAS

Introducción General

INTRODUCCION GENERAL

Antes de comenzar nuestro estudio, descartemos la idea que la Programación Lineal se refiere a la programación en computadora. La Programación Lineal (P.L.) trata el problema de asignar recursos limitados, como mano de obra, capital, materia prima, etc., entre diversas actividades competidoras en la mejor forma posible (óptima). El adjetivo "Lineal" significa que se requiere que todas las funciones matemáticas del modelo sean funciones lineales (de primer grado); La palabra "Programación" es aquí esencialmente sinónimo de planificación.

Dicho en otras palabras, la P.L. es un medio matemático que permite asignar una cantidad de recursos limitados a la satisfacción de varias demandas en tal forma que, mientras se optimiza algún objetivo, se satisfacen otras condiciones definidas.

Es posible expresar matemáticamente el objetivo y las restricciones; como lo sugiere el nombre de la técnica, todas las relaciones existentes deben ser lineales. La P.L. utiliza el álgebra matricial para la solución de este modelo mediante el uso de algunas reglas especiales para asegurar que la solución propuesta satisfaga todas las condiciones impuestas, permitiendo obtener los mejores resultados con respecto al objetivo seleccionado. Muchas situaciones del campo empresarial pueden tratarse mediante la P.L., incluso algunos problemas cuyas funciones no son estrictamente lineales dan resultados valiosos cuando la aproximación se efectúa cuidadosamente.

Para formular el problema se requiere que éste exista; identificar las variables controlables y las no controlables, así como las relaciones existentes entre ellas; definir los diferentes cursos de acción y definir el objetivo que se desea alcanzar. Algunas condiciones necesarias para que un problema exista son: Por lo menos debe haber un individuo en el marco de referencia; Por lo menos dos alternativas; Por lo menos un objetivo y asociar una eficiencia a cada solución.

Posiblemente, la labor más difícil sea la de reconocer y formular el problema de manera que se pueda desarrollar y producir así un objetivo deseable para optimizar. Esto requiere de imaginación y comprensión tanto del problema como de la técnica de solución. Es conveniente e importante comprender cómo funciona la P.L., y también la razón por la cual funciona, ya que casi siempre se requieren algunas suposiciones, y sin esta comprensión, el modelo no podrá formalizarse adecuadamente. El primer paso deberá ser la búsqueda y formalización del objetivo; después, muchas condiciones se vuelven más aparentes, al menos respecto a la forma. Es por esta razón que recomendamos tanto a maestros como -especialmente- a los alumnos dedicar el tiempo necesario a esta parte del curso (capítulo V).

El contenido del presente trabajo no es exhaustivo, Queremos simplemente presentar una introducción de las bases más importantes de la P.L., que es, ella misma, una introducción a la Investigación de Operaciones, cuya función es la formalización matemática de las diversas situaciones que se presenten en la empresa. Dichos modelos podrán ser tratados en computadoras.

Agradeceremos todas las críticas y comentarios tanto de maestros como de alumnos, que lleven al mejoramiento de este trabajo.

CAPÍTULO II

SOLUCIÓN GRÁFICA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

II.- SOLUCION GRAFICA DE PROGRAMACION LINEAL.

Introducción:

El método gráfico nos presenta de una manera clara y sencilla los conceptos introductorios de la Programación Lineal.

En la práctica, encontrarnos con problemas que puedan resolverse por el método gráfico será muy poco frecuente, debido a que con este método nos encontramos con que sólo podemos trabajar confiablemente con dos variables.

Los pasos a seguir para resolver cualquier problema de programación lineal son los siguientes:

1.- Identificar y representar con símbolos algebraicos las variables con las cuales vamos a trabajar.
2.- Identificar las restricciones propias del problema y expresarlas en forma de ecuaciones lineales.
3.- Establecer la función objetivo, la cual nos servirá para maximizar o minimizar según sean nuestras necesidades.
4.- Escoger un método adecuado de resolución.

Para ilustrar lo anterior resolveremos algunos ejemplos:

Ejemplo # 1

Una Planta Cervecera produce dos tipos de cerveza, (Clara y obscura) el Departamento de Producción requiere conocer la cantidad óptima a producir de litros de cerveza clara y de cerveza obscura, para obtener una utilidad máxima.

Lo anterior quedará sujeto a las restricciones propias de la planta, que son: Personal y capital con el que se cuenta.

La utilidad de la venta de 1,000 litros de cerveza clara es de \$ 5,000.00 mientras que la utilidad de la cerveza obscura es de \$ 3,000.00 por 1,000 litros.

Llamémosle X_1 a los miles de litros de cerveza clara y X_2 a los miles de litros de cerveza obscura.

La utilidad semanal de la producción y venta de ambos productos se representa de la siguiente manera:

$$5{,}000\ X1 + 3{,}000\ X2 = Z \quad (X_i \text{ en miles de litros })$$

con esta ecuación, que llamaremos función objetivo, buscaremos obtener la máxima utilidad para la empresa.

Las restricciones con las que se enfrenta la planta son las siguientes:

Un estudio de tiempos y movimientos nos proporciona los siguientes datos:

Se requieren 3 obreros para producir 1,000 litros de cerveza clara y 5 para la obtención de 1,000 de cerveza obscura. El personal con el que se cuenta en la planta es de 15 obreros; con los datos anteriores podemos establecer la primera restricción del problema, la cual será:

$$(1) \quad 3X1 + 5X2 \leqslant 15 .$$

El costo de producir 1,000 litros de cerveza clara es de $500.00, mientras que 1,000 litros de cerveza obscura le cuestan solamente $200.00. Debido a que el capital con el que se cuenta es de solamente $1,000.00 semanales para la producción de ambas cervezas, podemos establecer una nueva restricción:

$$(2) \quad 500\ X1 + 200\ X2 \leqslant 1{,}000$$

La pregunta que se hace el departamento productivo es: ¿Cuál es la cantidad de cerveza clara y obscura que es posible producir para obtener la máxima utilidad ?

A continuación se muestra la formulación matemática del problema.

1ER. PASO. (Formulación matemática)

Maximizar $Z = 5{,}000\ X_1 + 3{,}000\ X_2$ (contribución por 1,000 litros producidos).

sujeto a las restricciones:

(1) $3X_1 + 5X_2 \leqslant 15$ (Obreros requeridos $\leqslant$ obreros disponibles).

(2) $500X_1 + 200X_2 \leqslant 1000$ (Costos de producción $\leqslant$ presupuesto).

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geqslant 0 \\ X_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{(Valores positivos o nulos).}$$

2DO. PASO: (Graficar restricciones)

Podemos graficar estas desigualdades suponiendo que sólo se produce un tipo de producto. Así encontramos la cantidad límite de este producto. Luego hacemos lo mismo para el 2do. producto. Obteniendo así los puntos sobre los ejes, uniremos éstos con una recta.

Consideremos la restricción 1:

El signo " $\geqslant$ " de las restricciones significa " mayor o igual". Nosotros tomaremos el caso límite, es decir, la igualdad:

$$3X_1 + 5X_2 = 15$$

si sólo se produce el producto X_1 , entonces:

$$3X_1 + 0 = 15$$

despejando y resolviendo tenemos:

$$\boxed{X_1 = 5}$$

Si sólo se produjera X_2 :

$$0 + 5X_2 = 15$$

de donde:

$$\boxed{X_2 = 3}$$

Podemos ahora graficar esta relación, escogiendo arbitrariamente los ejes:

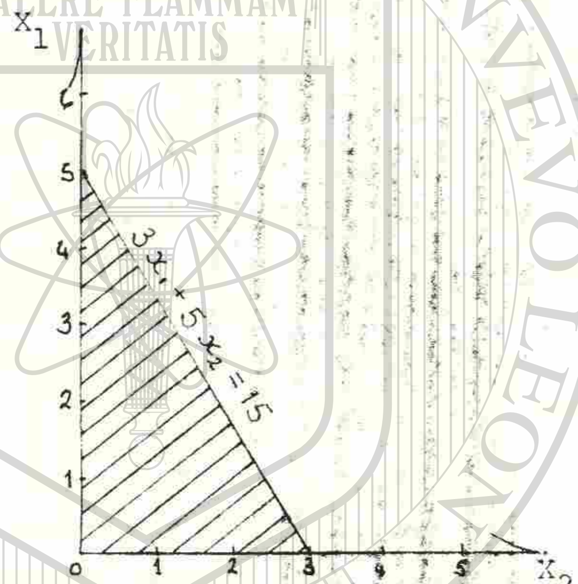


FIG. I

De la misma manera, para la restricción (2):

$$500X_1 + 200X_2 = 1,000$$

$$500X_1 + 0 = 1,000$$

$$\boxed{X_1 = 2}$$

$$0 + 200X_2 = 1,000$$

$$\boxed{X_2 = 5}$$

que graficando nos da:

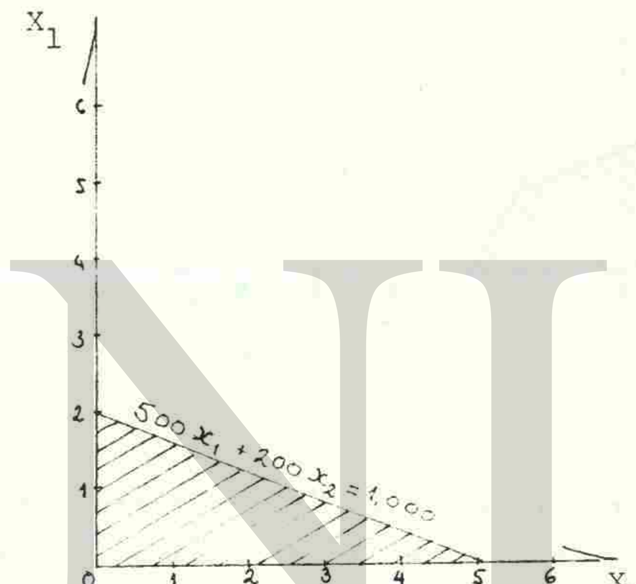


FIG. II

Una desigualdad de la forma "$\leq$" nos indica un límite máximo a partir del cual una solución no es factible. Así, la restricción (1) indica que, teniendo 15 obreros disponibles, no es posible producir más de 5,000 litros de X_1 o más de 3,000 litros de X_2, ya que se requiere toda la capacidad para ambos casos. De este modo, las combinaciones de producción permitidas por las restricciones (1) y (2), están representadas por las áreas sombreadas de las figuras I y II.

La combinación de éstas dos rectas en una sola gráfica nos da- ¹ área de soluciones (combinaciones de producción) posibles - .a nuestro problema. Esta área está sombreada en la figura III.

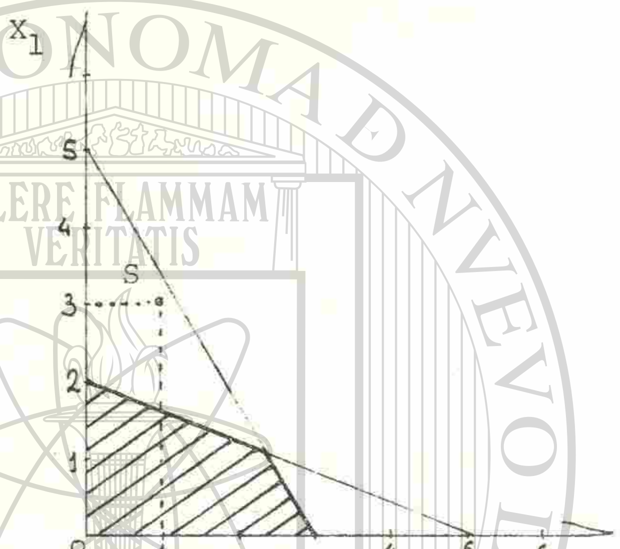


FIG. III

Puesto que una solución factible debe satisfacer a las restricciones del problema, toda combinación de producción que esté fuera del área sombreada de la FIG. III, no será factible. Así, si la administración decidiera producir 3,000 litros de X_1 y 1,000 - litros de X_2 (punto "S" FIG. III), ésta no sería una solución factible, porque aunque se satisface la restricción de la mano de - obra, la del presupuesto no queda satisfecha y se estaría trabajando con pérdidas.

3ER. PASO:

Todos los puntos comprendidos dentro del área sombreada de la FIG. III, son soluciones factibles. Lo que nos interesa es encontrar una combinación que maximice las ganancias. Para esto, graficaremos nuestra función objetivo igualando a cero alternativamente las dos variables (como con las restricciones) para encontrar las intersecciones con los ejes:

$$Z = 5,000X_1 + 3,000X_2$$

para nuestros fines, se le da un valor arbitrario a "Z", de preferencia un múltiplo de ambos coeficientes. Se acostumbra igualmente multiplicar los coeficientes entre sí.

Tenemos:

$$5,000X_1 + 3,000X_2 = 15,000$$

Igualando a cero alternativamente "X_1" y "X_2", obtenemos los valores:

$\boxed{X_1 = 3;}$ $X_2 = 0$

$X_1 = 0;$ $\boxed{X_2 = 5}$

La gráfica resultante será:

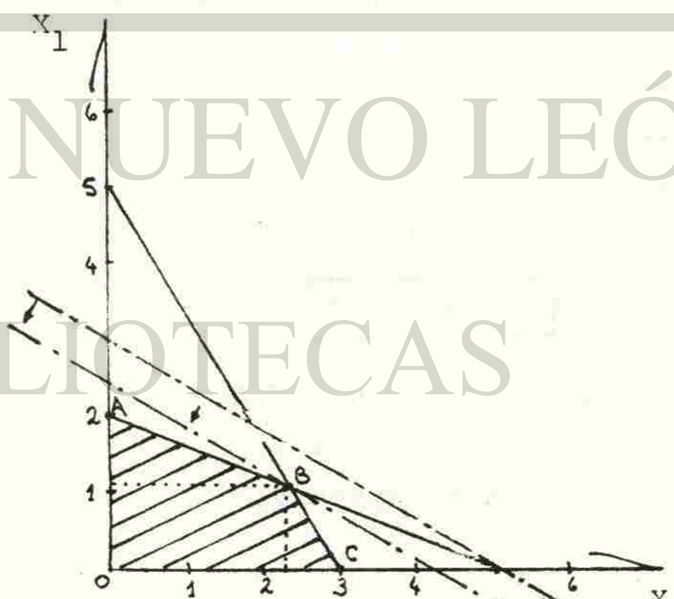


FIG. IV

Los puntos que están en la frontera (A, B, C) del área de soluciones, en la FIG. IV, son buenas soluciones, pero el punto óptimo será el último punto que toque la recta "Z" desplazándola (en dirección perpendicular) desde la zona sombreada hacia arriba; o el primero que toque desplazándola desde afuera hacia la zona sombreada.

Así encontramos que el punto buscado es el punto "B" de la FIG. IV. Haciendo las proyecciones correspondientes sobre los ejes, obtenemos los valores:

$$X_1 \approx 1.05 \qquad Z = \$\ 12,450.00 \qquad (1.1)$$
$$X_2 \approx 2.4$$

4TO. PASO:

En general, a menos de contar con excelentes medios de medición, es difícil asegurar que estos valores son precisos y que corresponden a la realidad de nuestro problema. Así, verificamos estos valores con la resolución simultánea de las ecuaciones de las rectas que se intersectan en el punto "B":

$$(1) \quad 3X_1 + 5X_2 = 15$$
$$(2) \quad 500X_2 + 200X_2 = 1,000$$

multiplicando la ecuación (1) por 40 y restándola a 2 obtenemos:

$$380\ X_1 = 400$$

entonces: $\boxed{X_1 = 1.053}$

substituyendo en (1):

$$3(1.053) + 5X_2 = 15$$

y: $\boxed{X_2 = 2.368}$ (1.2)

ésto significa que la mejor combinación de producción es:

1,053 litros de cerveza clara y

2,368 litros de cerveza obscura,

obteniendo una contribución de:

$$Z = 5,000\ (1.053) + 3,000\ (2.368)$$
$$Z = \$12,369.00$$

NOTA: Se sugiere al lector que verifique los resultados (1.1) y (1.2) con las restricciones del problema.

Ejemplo # 2

El contenido de vitaminas, minerales y proteínas de 2 alimentos así como el requerimiento mínimo de cada ingrediente nos es dado en la tabla 2.

El alimento X_1 tiene un costo de \$ 1.20 por kilogramo, mientras que el costo del alimento X_2 es de \$ 1.00 por kilogramo.

¿Cuál será la combinación de X_1 y X_2 para que nos dé una dieta adecuada a un costo mínimo?

	UNIDAD/KG. (X_1)	UNIDAD/KG. (X_2)	MINIMO DE UNIDADES REQUERIDAS.
VITAMINAS	1	2	90
MINERALES	5	1	100
PROTEINAS	3	2	120

TABLA 2

1ER. PASO: Formulación matemática.

$$\text{Minimizar } Z = 1.2X_1 + 1.9X_2$$

sujeto a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & X_1 + 2X_2 \geq 90 \\ (2) & 5X_1 + X_2 \geq 100 \\ (3) & 3X_1 + 2X_2 \geq 120 \end{array}\right\} \text{Requerimiento mínimo de los componenetes.}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Valores positivos o nulos.}$$

2DO. PASO: Gráfica de restricciones.

Procediendo de manera similar al problema anterior, encontramos las coordenadas siguientes:

$$(1)\begin{cases} X_1 = 90, & X_2 = 0 \\ X_2 = 45, & X_1 = 0 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} X_1 = 20, & X_2 = 0 \\ X_2 = 100, & X_1 = 0 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} X_1 = 40, & X_2 = 0 \\ X_2 = 60, & X_1 = 0 \end{cases}$$

3ER. PASO: Gráfica de la función objetivo:

Dando un valor arbitrario a Z(=114) se obtiene:

$$Z = 1.2\,X_1 + 1.9\,X_2 = 114$$

$$\begin{cases} X_1 = 95, & X_2 = 0 \\ X_2 = 60, & X_1 = 0 \end{cases}$$

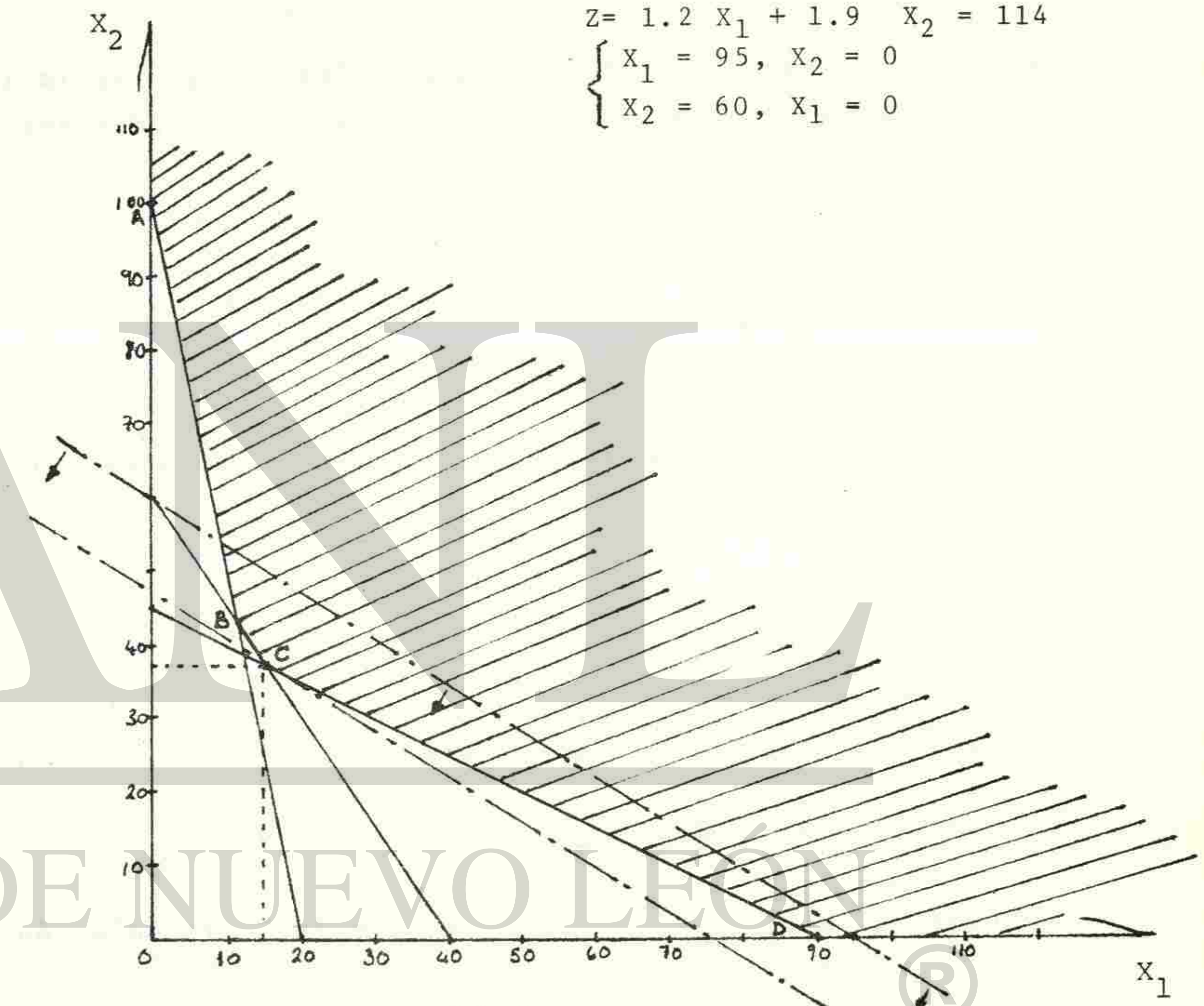


FIG. V

Una vez levantada la gráfica, sombreamos la zona de soluciones. En el caso presente las restricciones con signo " $\geq$ " no nos indican un máximo de recursos permitido, como en el ejemplo 1, sino un requerimiento mínimo. La región de soluciones se encontrará entonces a la derecha de las rectas (1), (2) y (3) (Ver FIG.V), y será ilimitada hacia la derecha.

Como en el problema anterior, la solución óptima se encuentra en la frontera entre la zona sombreada y la zona blanca de la gráfica (A, B, C, D). Esta solución estará representada, como en el ejemplo 1, por el último punto que toque la recta de la F.O. desplazándola de la región de soluciones hacia la zona blanca (o el primer punto en dirección contraria).

Encontramos que "C" es el punto óptimo, que es la intersección de las rectas (1) y (3), y cuyas coordenadas aparentes son:

$X_1 \approx 15.5$

$X_2 \approx 37$ con $Z = \$\ 88.90$

4TO. PASO: Resolviendo (1) y (3) simultáneamente obtenemos los valores exactos:

$X_1 = 15$

$X_2 = 37.5$

esta combinación da un costo mínimo de:

$Z = \$\ 89.25$

NOTA: Se sugiere como ejercicio verificar la solución presentada.

PREGUNTAS:

¿ Por qué una solución en el área blanca no es factible?

¿ Qué diferencias esenciales hay entre los dos ejemplos presentados?

CAPÍTULO III

REPASO DE MATRICES

Como en el problema anterior, la solución óptima se encuentra en la frontera entre la zona sombreada y la zona blanca de la gráfica (A, B, C, D). Esta solución estará representada, como en el ejemplo 1, por el último punto que toque la recta de la F.O. desplazándola de la región de soluciones hacia la zona blanca (o el primer punto en dirección contraria).

Encontramos que "C" es el punto óptimo, que es la intersección de las rectas (1) y (3), y cuyas coordenadas aparentes - son:

$$X_1 \approx 15.5 \qquad \text{con } Z= \$\ 88.90$$
$$X_2 \approx 37$$

4TO. PASO: Resolviendo (1) y (3) simultáneamente obtenemos - los valores exactos:

$$X_1 = 15$$
$$X_2 = 37.5$$

esta combinación da un costo mínimo de:

$$Z= \$\ 89.25$$

NOTA: Se sugiere como ejercicio verificar la solución presentada.

PREGUNTAS:

¿ Por qué una solución en el área blanca no es factible?

¿ Qué diferencias esenciales hay entre los dos ejemplos presentados?

CAPÍTULO III

REPASO DE MATRICES

III.- REPASO DE MATRICES.

La teoría de matrices tiene su origen en los trabajos de tres matemáticos ingleses: Hamilton, Silvester y Cayley, publicados alrededor de 1850. Desde entonces ha sido una de las ramas matemáticas de más fecunda aplicación en los más diversos campos. Richard Bellman destaca en su libro " Introduction to Matrix Analysis", la tremenda extensión que ha alcanzado esta materia, indispensable para quienes trabajan en disciplinas tales como la física, la ingeniería, la estadística, la economía, la administración, la psicología, la sociología, etc. A pesar de todo, y tal como lo señala el Dr. Enrique Cansado en un artículo, la adaptación de los programas de enseñanza a las necesidades de la ciencia y la tecnología es lenta y así, aún hoy-dice- "existe un grupo numeroso de profesionales no familiarizados con esta materia". A ellos va dirigido este repaso, sin mayor pretensión que darles una pauta para introducirse en el tema.

1.- DEFINICIONES BASICAS.

1.1.- Matriz. Una matriz es un arreglo de números dispuestos en filas (o columnas). Dicho arreglo no posee un valor numérico equivalente.

1.2.- Elementos de una Matriz. Son los números mismos que componen la matriz, y su posición está bien definida en el arreglo por la fila y la columna que les corresponde.

1.3.- Orden de una matriz. Llamaremos matriz de orden (m x n) a aquélla formada por "m" filas y "n" columnas, y la indicaremos con las letras mayúsculas del alfabeto. Identificaremos el elemento a_{ij} como aquél que está en la fila "i" y en la columna "j".

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz será de orden (m x n) y puede también ser representada en forma compacta:

$$A = \left[a_{ij}\right] \quad , \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,m \\ j = 1,2,\ldots,n \end{matrix}$$

1.4.- Matriz Cuadrada. Una matriz cuadrada es aquélla que tiene igual número de filas como de columnas. El orden de una matriz cuadrada será (m x m), pudiendo abreviarlo a una sola literal (m). (Ejem: $A_{m\times m} \sim A_n$)

Existen diferentes tipos de matrices cuadradas.

Ejemplos:

a) Matriz triangular: Se distinguen dos tipos de matriz triangular:

1° Superior: Cuando los elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$

2° Inferior: Cuando los elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$

Ejemplos:

1°Trinagular Superior

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2°Triangular Inferior

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Matriz diagonal: Es aquélla en la cual todos los elementos, a excepción de los de la diagonal principal son ceros. - Es decir $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, y $a_{ii} \neq 0$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Matriz unitaria (o identidad): Es la matriz diagonal donde todos los elementos a_{ij}, cuando $i = j$ son iguales a la - unidad.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

Se acostumbra identificar a la matriz unitaria de orden "n" como " I_n "

Ejemplo:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene las propiedades siguientes:

1° Cualquier matriz (o vector) multiplicada por una matriz unitaria es igual a la misma matriz (o vector) original.

$$E.I = E$$

2° El producto de la matriz unitaria (identidad) tiene la propiedad conmutativa, ejemplo:

$$A.\ I = I.A = A \quad , \quad I \text{ y } A \text{ del mismo orden.}$$

d) Matriz regular.- Es aquélla cuyo determinante es diferente de cero.

Se recordará que el determinante de una matriz se identifica por la literal de la matriz entre dos líneas verticales ($|A|$), cuyo valor se obtiene siguiendo las reglas propias a los determinantes:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} |D| &= (48+ 6+ 15)-(20+ 36+ 6) \\ |D| &= 69-62 \\ |D| &= 7 \end{aligned}$$

e) Matriz singular: Es aquella cuyo determinante es nulo.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} |B| &= (45+ 96+ 84)-(105+ 48+ 72) \\ |B| &= 225-225 \\ |B| &= 0 \end{aligned}$$

1.5.- Rango de una matriz. El rango de una matriz es el orden del mayor determinante diferente de cero contenido en la matriz.

En el ejemplo de matriz regular (inciso d) el rango de la iz D es 3 puesto que el mayor determinante diferente de ce o es de orden 3.

En general, el rango de una matriz regular de orden "n" siempre será "n".

La matriz B del ejemplo de matriz singular (inciso e) tiene un rango menor que 3 ya que el determinante de orden 3 es cero. Tomando entonces los determinantes de orden 2 encontraremos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6, \qquad \text{etc.}$$

El rango de B será 2 puesto que existe cuando menos un determinante de orden 2 diferent de cero en B.

1.6.- Matriz transpuesta. Transponer una matriz es intercambiar filas por columnas. Sea A la matriz original y A^T su matriz transpuesta, entonces:

$$A = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \left[a_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

1.7.- Matriz simétrica. Es aquella cuyos elementos a_{ij} son iguales a los elementos a_{ji} para $i \neq j$. Para cuando $i = j$, a_{ij} tiene cualquier valor.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2.- Algebra Matricial.

2.1.- Adición de matrices. Para efectuar la adición de dos o más matrices, éstas deben ser del mismo orden.

Ejemplo 1:

Sean "A" y "B" dos matrices de orden (3 x 3) que se desea sumar.

La matriz resultante "C" será del mismo orden (3 x 3) y sus elementos (c_{ij}) serán el resultado de la adición de los elementos correspondientes de "A" y "B": $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

C = A + B

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

N = L + M

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

En la adición de matrices encontramos las siguientes propiedades:

a) Propiedad conmutativa:

A + B = B + A

b) Propiedad asociativa:

D = A + (B + C) = (A + B) + C

2.2.- Resta de matrices. Las condiciones para la resta (o diferencia) de matrices son las mismas que para la adición. Los elementos de la matriz resultante será la diferencia de los elementos correspondientes de las matrices originales: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

C = A - B

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.- Producto de matrices. Para que un producto entre dos matrices pueda llevarse a cabo es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda; de no ser así, la multiplicación es imposible.

Sea la primera matriz de orden "m x n" y la segunda de orden "n x r", la matriz resultante del producto será siempre de orden "m x r".

Los elementos de la matriz resultante, c_{ij}, se encontrarán por la sumatoria de los productos, elemento por elemento, de la fila "i" de la primera matriz con la columna "j" de la segunda:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mr} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, r \end{matrix}$$

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

C= A B

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(5)+(5)(8) & (1)(0)+(5)(4) \\ (3)(5)+(2)(8) & (3)(0)+(2)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 20 \\ 31 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = M\,N$$

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 16 & 59 & 16 \\ 11 & 9 & 35 & 8 \end{bmatrix}$$

Las propiedades del producto de matrices son:

a) Propiedad asociativa: $A(BC) = A(BC)$

b) Propiedad distributiva: $A(B+C) = AB + AC$

En el producto de matrices la ley conmutativa no es válida ya que las reglas para el producto no siempre se cumplen al conmutar las matrices y, en caso de que se cumplieran (producto de dos matrices cuadradas), el resultado no es el mismo. Tomando nuestro ejemplo 1: $C=A.B \neq B.A$ En el ejemplo 2 el producto "N.M" no se puede efectuar pues las reglas correspondientes no se cumplen.

2.3.1.- Producto de un escalar "k" por una matriz. Al multiplicar una matriz cualquiera por un escalar "k" ($\forall k$), todos los elementos de dicha matriz se verán afectados por el escalar "k".

Ejemplo:

sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ y $k = -2$

entonces

$$Ak = kA = (-2) \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 18 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

3.- TRANSFORMACIONES ELEMENTALES EN MATRICES

Las transformaciones elementales en las matrices son aquellas que al efectuarlas no alteran ni el orden ni el rango de la matriz.

Para las transformaciones con filas (renglones) adoptaremos como símbolo la letra mayúscula "H" y para las columnas, la letra mayúscula "K".

3.1.- Intercambio de dos filas (o dos columnas). Simbolizaremos el intercambio de la fila (columna) "i" con la fila (columna) "j" con H_{ij} (K_{ij}).

Ejemplo:

Intercambiar la fila "1" con la "3" en la matriz "A".

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \overset{H_{13}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El símbolo " $\sim$ " denota la equivalencia de las dos matrices.

2.- Producto de una fila (o columna) por una constante "k". Ce producto lo simbolizaremos $H_i(k)$ $(K_i(k))$.

Ejemplo:

Multiplicar la fila 2 por el escalar 3 en la matriz "B":

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{H_2(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 12 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3.- Substitución de una fila (o columna) por la suma de esta misma con "k" veces otra.

Representamos con $H_{ij}(k)$ la operación: "Multiplicar la fila "j" por "k" y adicionarla a la fila "i".

Ejemplo:

En la matriz R, la fila "1" por "-5" y adicionarla a la fila "2".

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 9 & 15 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \overset{H_{21}(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -12 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3.4.- Solución de un sistema de ecuaciones lineales por transformaciones elementales.

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse en su forma canónica por:

$$A\,X = H$$

Aplicando las transformaciones elementales con filas en la matriz extendida $[A \,\vdots\, H]$ trataremos de llegar a la matriz extendida $[I \,\vdots\, H^*]$, donde "I" es una matriz identidad y "H*" es el valor de las variables (X). La solución del sistema será entonces:

$$IX = H^*$$

$$X = H^* \longrightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^* \\ \vdots \\ h_n^* \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 4X_1 + 6X_2 + 2X_3 & = & 12 \\ 6X_1 + 2X_2 & = & 6 \\ 4X_1 + 8X_2 + 4X_3 & = & 16 \end{array}\right\} AX = H$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Nuestra matriz extendida será:

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 12 \\ 6 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \end{array}\right]$$

Transformaciones:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 12 \\ 6 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \end{array}\right] \overset{H_1(1/4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 16 \end{array}\right] \overset{H_{21}(-6)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/3 & 1/2 & \\ 0 & -7 & -3 & \\ 4 & 8 & 4 & \end{array}\right] -$$

$$\overset{H_{31}(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -12 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{H_2(-1/7)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & 12/7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{H_{12}(-3/2)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 12/7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{H_{32}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & 3/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 12/7 \\ 0 & 0 & 8/7 & 4/7 \end{array}\right] \overset{H_3(7/8)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 3/7 & 12/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \overset{H_{13}(1/7)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/7 & 12/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \overset{H_{23}(-3/7)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

La solución del sistema será entonces:

$$X_1 = 1/2$$
$$X_2 = 3/2$$
$$X_3 = 1/2$$

$$IX = H^*$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

4.- OTROS TIPOS DE MATRICES CUADRADAS

Entre los diferentes tipos de matrices cuadradas la matriz adjunta y la matriz inversa son de gran utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

4.1.- Matriz adjunta. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden "n" y α_{ij} el adjunto (menor complementario con su signo) del elemento a_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Identificaremos la matriz de los adjuntos de A (o matriz adjunta de A) como A^+.

$$A^+ = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

NOTA: Se observará que para formar la matriz adjunta se transpu sieron los subíndices "i" y "j".

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Obtención de los adjuntos de cada elemento (mostraremos el procedimiento encontrando dos adjuntos, el resto se deberán encontrar de manea similar, asignando el signo por "$(-1)^{i+j}$".

Se tiene:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = (+1)(20-16) = 4$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(25-14) = -11$$

$$\vdots$$

Resultando la matriz:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -11 & 8 & -1 \\ 12 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

NOTA: La matriz adjunta puede obtenerse transponiendo la matriz original y encontrando el co-factor de los elementos transpuestos (incluyendo su signo) en el lugar "ij" correspondiente. Se sugiere al lector que, como ejercicio, encuentre la adjunta del ejemplo anterior de esta manera.

4.2.- Matriz Inversa. Se dice que la matriz "B" es la inversa de la matriz "A" (respectivamente "A" es la inversa de "B") cuando se tiene $A \cdot B = I$ ($B \cdot A = I$), donde "A" y "B" son matrices cuadradas de orden "n", e "I" es una matriz identidad del mismo orden "n".

Identificaremos la inversa de una matriz cualquiera agregan el superíndice "-1" a la literal que identifica la matriz original. Así, la inversa de la matriz "C" será representada por: C^{-1}. Recordamos que sólo las matrices regulares tienen inversa.

4.2.1.- Obtención de la inversa por el método de la adjunta.

Utilizaremos aquí la relación $A^{-1} = \dfrac{A^{+}}{|A|}$

1er. paso: Obtener el valor del determinante ($|A|$, ver 1.5).
2do. paso: Obtener la adjunta (ver 4.1.).
3er. paso: Efectuar la relación.

Ejemplo: Obtener la matriz inversa de M:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

1° Encontrar el determinante (Si el valor del determinante de la matriz original es cero, la inversa de dicha matriz no existirá):

$$|M| = 4\left[(2)(4)-(0)(8)\right] - 6\left[(6)(4)-(2)(8)\right] + 4\left[(6)(0)-(2)(2)\right]$$

$$|M| = 4(8)-6(8) + 4(-4)$$

$$|M| = 32-48-16$$

$$|M| = -32$$

2° Obtener la adjunta:

$$M^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M^{+} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$M^{+} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -4 \\ -24 & 8 & 12 \\ 40 & -8 & -28 \end{bmatrix}$$

3° Encontrar la inversa:

$$M^{-1} = \frac{M^{+}}{|M|}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{32} & \frac{8}{32} & \frac{4}{32} \\ \frac{24}{32} & -\frac{8}{32} & -\frac{12}{32} \\ -\frac{40}{32} & \frac{8}{32} & \frac{28}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 3/4 & -1/4 & -3/8 \\ -5/4 & 1/4 & 7/8 \end{bmatrix}$$

4.2.2.- Obtención de la inversa por el método de Gauss-Jordan.

La aplicación de este método requiere la elaboración de una matriz especial que estará formada por la matriz original (a invertir) en el lado izquierdo y una matriz unidad del mismo orden en el lado derecho, quedando en la forma $[A \vdots I]$.

Sobre esta nueva matriz haremos transformaciones elementales hasta obtener una matriz unidad en el lado izquierdo. La matriz que aparece entonces en el lado derecho será la inversa de la matriz original, quedando: $[I \vdots A^{-1}]$.

Ejemplo: Sea "A" la matriz a invertir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$[A \vdots I] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{H_{31}(-6)}{\overset{H_{21}(-9)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & -60 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & -40 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{H_2(-1/34)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 60/34 & 9/34 & -1/34 & 0 \\ 0 & -21 & -40 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{170}{3400} & \frac{442}{3400} & -\frac{68}{3400} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1360}{3400} & \frac{2040}{3400} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{510}{3400} & \frac{714}{3400} & -\frac{1156}{3400} \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.13 & -0.02 \\ 0 & -0.4 & 0.6 \\ 0.15 & 0.21 & -0.34 \end{bmatrix}$$

NOTA: Se recomienda al lector, como práctica, que verifique este resultado efectuando las transformaciones elementales - omitidas en el procedimiento.

4.2.3.- Obtención de la inversa por el método Montante. - Este método, desarrollado recientemente por el Ing. René Montante y demostrado matemáticamente por el Ing. Marco Antonio-Méndez, ambos catedráticos de esta Facultad, tiene la ventaja de encontrar no sólo la inversa de una matriz sino que al mismo tiempo se encuentra su determinante y su matriz adjunta.

Como en el método Gauss- Jordan, se trabaja con una matriz compuesta en cuyo lado izquierdo se encuentra la matriz original, que queremos invertir, y una matriz identidad del mismo orden en el lado derecho. Sobre esta nueva matriz se harán las transformaciones propias del método.

Reglas de operación:

1° Para cada transformación utilizaremos la relación siguiente (tomando como referencia la diagonal principal de la matriz original):

$$a^*_{ij} = \frac{a_{ij}\,a_{kk} - a_{ik}\,a_{kj}}{a_{(k-1)(k-1)}}$$

donde:

a^*_{ij} = Elemento buscado (fila "i" columna "j") para la nueva matriz compuesta.

a_{ij} = Elemento de la posición "ij" de la matriz actual.

a_{kk} = Elemento en la diagonal principal de la matriz original, al que llamaremos "pivote actual". Habrá tantos pivotes como elementos tenga la diagonal principal (k=1, 2, ... , m)

a_{ik} = Elemento actual correspondiente al elemento a_{ij} en la columna del pivote actual.

a_{kj} = Elemento actual correspondiente al elemento a_{ij} en la fila del pivote actual.

$a_{(k-1)(k-1)}$ = Pivote anterior. Cuando el pivote ocupa la posición "a_{11}" (k=1), el valor del pivote anterior será la unidad.

2° La fila del pivote actual (k) pasa idéntica a la nueva matriz.

3° Todos los elementos de la diagonal prinicpal hasta el pivote (a_{kk}) tomarán el valor de a_{kk} en la nueva matriz y los elementos restantes, hasta la columna k (inclusive) serán - nulos.

4° Si un elemento "a_{ii}" es cero, la fila "i" se cambiará por otra escogida entre las que queden por debajo de ella - (transformación H_{ij}), sin que esto altere el resultado; Si no es posible, entonces la matriz original no tiene inversa.

En síntesis, si consideramos que en cada iteración el pivote divide nuestra matriz en cuatro cuadrantes, la fórmula indicada en el paso 1 sería aplicada únicamente a los cuadrantes I y IV:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cccc}
a_{(k-1)(k-1)} & 0 & \cdots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a_{(k-1)(k-1)} & & a_{2k} & a_{2(k+1)} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
0 & 0 & & a_{kk} & a_{k(k+1)} & \cdots & a_{kn} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & a_{mk} & a_{m(k+1)} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right]$$

Nuestra matriz compuesta pasa de la forma $[A \mid I]$ a la forma $[\,|A| \cdot I \mid A^{+}]$, y la inversa se encuentra por la relación - $A^{-1} = \dfrac{A^{+}}{|A|}$.

Ejemplo:

Tomemeos la matriz del ejemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

miento:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & -60 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & -40 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -34 & -60 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 15 & 21 & -34 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 100 & 0 & 0 & -5 & 13 & -2 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & -40 & 60 \\ 0 & 0 & 100 & 15 & 21 & -34 \end{array}\right]$$

donde:

$$|A| = 100 \quad y \quad A^{+} = \begin{bmatrix} -5 & 13 & -2 \\ 0 & -40 & 60 \\ 15 & 21 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 13 & -2 \\ 0 & -40 & 60 \\ 15 & 21 & -34 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{100}$$

4.2.4.- **Aplicaciones en la solución de un sistema de ecuaciones lineales.**

4.2.4.1.- Un sistema de ecuaciones lineales puede ser resuelto utilizando la matriz inversa de los coeficientes del sistema.

En efecto, utilizando la notación canónica del sistema considerado, tenemos:

$A\ X = H$, donde: A= Matriz de coeficientes
X= Vector de variables
H= Vector de términos independientes.

Multipliquemos ambos lados de esta expresión por "A^{-1}" (matriz inversa de "A"):

$$A^{-1}\ AX = A^{-1}\ H;$$

como sabemos que toda matriz multiplicada por su inversa es igual a una matriz identidad (I) del mismo orden, tenemos:

$$IX = A^{-1}\ H;$$

sabiendo igualmente que toda matriz multiplicada por una matriz identidad es igual a la misma matriz, nos queda entonces:

$$X = A^{-1}\ H.$$

Podemos entonces concluir que en un sistema de ecuaciones lineales, la solución se encuentra multiplicando la inversa de la matriz de coeficientes por el vector de términos independientes.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 + X_3 &= 6 \\ 3X_1 + X_2 &= 3 \\ 2X_1 + 4X_2 + 2X_3 &= 8 \end{aligned}$$

Demostrar, utilizando cualquier método de la inversa, que el vector solución es:

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

es decir que:

$$X_1 = 1/2$$
$$X_2 = 3/2$$
$$X_3 = 1/2$$

aquí:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix},\ X= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}\ H= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

4.2.4.2.- Otra manera de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales es hacer las transformaciones directamente sobre la matriz compuesta $[A \vdots H]$.

Aplicando las transformaciones del método de Gauss-Jordan, el resultado es de la forma $\left[I \,\vdots\, X \right]$, y con el método Montante es $\left[|A| \cdot I \,\vdots\, |A| \cdot X \right]$. En general este último método se revela más rápido, pues el número de iteraciones en la mayoría de los casos es menor que las realizadas por el primero.

Resolviendo el ejemplo anterior por el método Montante, tenemos:

$$\left[A \,\vdots\, H \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -3 & -12 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-4}$$

o sea:

$X_1 = 1/2$

$X_2 = 3/2$

$X_3 = 1/2$

5.- DEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

La dependencia (o independencia) lineal de vectores es un concepto fundamental en la Programación Lineal. Se dice que los vectores de un conjunto de "m" vectores del mismo orden,

$$X_1 = \left[X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n} \right]$$

$$X_2 = \left[X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n} \right]$$

$$\vdots$$

$$X_m = \left[X_{m1}, X_{m2}, \ldots, X_{mn} \right] \quad ,$$

son linealmente dependientes si existen "m" elementos k_i de manera que:

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \ldots + k_m X_m = 0$$

De lo contrario, los vectores serán linealmente independientes. Para una mejor comprensión trataremos el siguiente ejemplo:

Sea el conjunto de vectores fila siguiente:

$V_1 = (1, -2, 1)$

$V_2 = (2, 1, -1)$

$V_3 = (7, -4, 1)$,

los colocaremos en arreglo matricial y efectuaremos transforma ciones elementales con filas: tratando de encontrar la matriz unidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix} \underset{H_{31}(-7)}{\overset{H_{21}(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \end{bmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la fila del vector V3 se convierten en cer lo que quiere decir que V_3 es dependiente de V_1 y V_2, y pue expresarse en función de ellos como:

$$V_3 - 7V_1 - 2\left[V_2 - 2V_1 \right] = 0 \quad \text{(según las transformacione efectuadas)}$$

$$V_3 - 7V_1 - 2V_2 + 4V_1 = 0$$

$$V_3 - 3V_1 - 2V_2 = 0$$

despejando:

$$\boxed{V_3 = 3V_1 + 2V_2}$$

sustituyendo: $V_3 = 3\left[1, -2, 1\right] + 2\left[2, 1, -1\right]$

$$V_3 = \left[3, -6, 3\right] + \left[4, 2, -2\right]$$

$$\therefore \quad V_3 = \left[7, -4, 1\right] \qquad \text{l. q. q. d.}$$

Si en un arreglo matricial de vectores ninguna fila (o columna, en el caso de vectores columna) se convierte en ceros después de efectuar todas las transformaciones posibles, se dice que los vectores son linealmente independientes.

Demostrar, como ejercicio, que el siguiente conjunto de vectores está formado por vectores linealmente independientes:

$$V_1 = \left[1, 2, -3\right]$$

$$V_2 = \left[1, -3, 2\right]$$

$$V_3 = \left[2, -1, 5\right]$$

CAPÍTULO IV

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

IV.- CONCEPTOS BASICOS DE PROGRAMACION LINEAL

Expondremos aquí los conceptos básicos de Programación Lineal que utilizaremos en el presente curso. Representaremos un problema elemental de programación lineal en su forma canónica como:

$$\text{Máx.}Z = C\,X \qquad \text{(función objetivo)}$$

$$\text{sujeto a:}\quad \left|\begin{array}{ll} AX \leq b & \text{(conjunto de restricciones)} \\ X \geq 0 & \text{(condición de no negatividad)} \end{array}\right.$$

donde: C = Vector fila de las contribuciones de las variables a la función objetivo (de orden "n").

X = Vector columna de las variables del problema (de orden "n").

A = Matriz de coeficientes de las variables en las restricciones (de orden "mxn").

b = Vector columna de términos independientes (limitaciones en los recursos o requerimientos; de orden "m").

0 = Vector nulo de n elementos (de orden "n").

1.- REGLAS DE EQUIVALENCIA.

Regla No. 1:

a) Maximizar "Z" es equivalente a minimizar "-Z".

b) Minimizar "Z" es equivalente a maximizar "-Z".

Ejemplos:

a) $Max.Z = 8X_1 + 16X_2$

equivale a:

$Min.(-Z) = -8X_1 - 16X_2$

b) $Min.Z = 10X_1 + 12X_2 - 5X_3$

equivale a:

$Max.(-Z) = -10X_1 - 12X_2 + 5X_3$

REGLA No. 2:

a) La desigualdad $AX \leqslant b$ equivale a $-AX \geqslant -b$

b) La desigualdad $AX \geqslant b$ equivale a $-AX \leqslant -b$

Ejemplos:

a) $2X_1 + 5X_2 \leqslant 15$ equivale a $-2X_1 - 5X_2 \geqslant -15$

b) $15X_1 - 3X_2 \geqslant 50$ equivale a $-15X_1 + 3X_2 \leqslant -50$

REGLA No. 3:

Una igualdad de la forma $AX = b$ puede descomponerse como la combinación de dos desigualdades: $AX \leqslant b$ y $AX \geqslant b$.

Ejemplo:

$40X_1 + 20X_2 = 90$

equivale a:

$40X_1 + 20X_2 \leqslant 90$

$40X_1 + 20X_2 \geqslant 90$

REGLA No. 4:

a) Toda desigualdad de la forma $AX \leqslant b$ puede convertirse en igualdad mediante la adición de un vector "Y" llamado de holgura que tendrá "m" componentes no negativas:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_m \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Toda desigualdad de la forma $AX \geqslant b$ puede convertirse en igualdad mediante la sustracción de un vector "K" llamado superfluo que tendrá "m" componentes no negativas.

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_m \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

a) $2X_1 + 5X_2 \leqslant 20$

$3X_1 + 9X_2 \leqslant 50$

se convierte en:

$2X_1 + 5X_2 + X_3 = 20$

$3X_1 + 9X_2 + X_4 = 50$

donde "X_3" y "X_4" son las variables de holgura agregadas.

b) $X_1 + 6X_2 \geqslant 10$

$7X_1 + 10X_2 \geqslant 15$

se convierte en:

$X_1 + 6X_2 - X_3 = 10$

$7X_1 + 10X_2 - X_4 = 15$

donde "X_3" y "X_4" son las variables superfluas agregadas.

REGLA No. 5:

Una variable no restringida es aquella que puede tomar toda clase de valores positivos, negativos o cero y puede ser representada como la diferencia de otras dos variables no negativas.

Ejemplo:

Considerando que "X_1" sea una variable no restringida, entonces puede ser representada por:

$$X_1 = X_2 - X_3$$

donde X_2 y X_3 son variables no negativas.

Notaremos que si:

$X_2 \geqslant X_3$, entonces $X_1 \geqslant 0$;

$X_2 = X_3$, entonces $X_1 = 0$;

y si $X_2 \leqslant X_3$, entonces $X_1 \leqslant 0$.

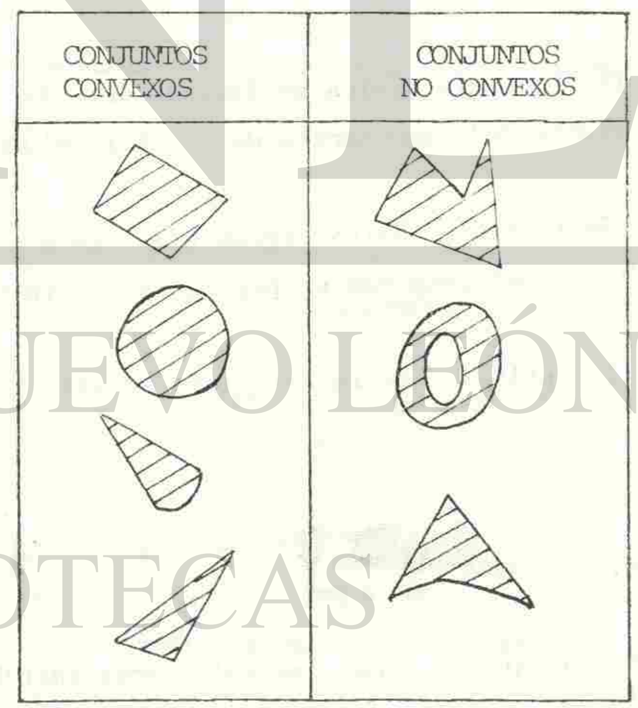
2.- CONVEXIDAD

Teorema 1: Cualquier punto en el segmento de una línea recta que une dos puntos puede ser expresado como una combinación de esos dos puntos.

Teorema 2: Cualquier punto que pueda ser expresado como una combinación convexa de otros dos, pertenece necesariamente a la recta que une estos últimos puntos.

Definiciones: Un "Conjunto Convexo" es aquel que para todo par de puntos dentro del conjunto, todas las combinaciones convexas de éstos puntos están contenidas en dicho conjunto.

Un "Punto Extremo" de un conjunto convexo es aquel que, encontrándose en la frontera del conjunto, no puede ser expresado como una combinación de otros dos puntos del mismo conjunto.



TEOREMAS DE PROGRAMACION LINEAL

3.1. Definiciones.

A continuación damos algunas definiciones fundamentales para la comprensión de los teoremas básicos de la Programación Lineal.

3.1.1. Solución factible.- Una solución factible es el conjunto de los valores de las variables que satisfacen todas las restricciones del problema incluyendo las de no-negatividad.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} , \quad X_i \geqslant 0 \ , \ \forall i$$

3.1.2. Solución factible básica.- Es aquella solución factible con no más de "m" componentes positivas.

3.1.3. Solución factible básica no degenerada.- Es la solución factible básica donde exactamente "m" componentes del vector columna "X" son positivas.

3.1.4. Solución factible básica degenerada.- Es una solución factible básica donde hay menos de "m" componentes positivas del vector "X".

3.1.5. Solución óptima.- Es la solución factible básica que optimiza la función objetivo.

3.2. Teoremas.

Teorema A: El conjunto de todas las soluciones factibles de un programa de Programación Lineal es un conjunto convexo.

Teorema B: La función objetivo de un programa lineal obtiene su valor máximo (o mínimo) en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Teorema C: Si existe un conjunto "K" ($K \leqslant m$) de vectores columna linealmente independiente ($a_1, a_2, \ldots, a_k$) tal que:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j X_j^* = b \ , \ X_j^* \geqslant 0 \ , \ \forall j \ ,$$

entonces el punto

$$X^* = (X_1^* , X_2^* , \ldots , X_k^* , 0, 0, \ldots, 0)$$

es un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Teorema D: Si "$\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$" es un punto extremo de un conjunto convexo de soluciones factibles, los vectores columna asociados con las X_j positivas son linealmente independientes, con un máximo de "m" componentes positivas.

3.3. Conclusiones

1) Cada solución factible básica de un programa lineal corresponde a un punto extremo del conjunto convexo "K" de soluciones factibles.

2) Cada punto extremo del conjunto "K" tiene asociados "m" vectores columna linealmente independientes de la matriz "A" de coeficientes tecnológicos del programa lineal.

3) Existe un punto extremo de "K", no siempre único, donde la función objetivo "Z" = cX de un programa lineal obtiene su valor óptimo (máximo o mínimo).

CAPÍTULO V

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

V.- PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

Antes de ver un algoritmo clásico de resolución de problemas lineales(Simplex), creemos conveniente que el lector se familiarice con las fases que anteceden a la utilización de dicho algoritmo, a saber, identificación y planteamiento del problema en su forma matemática. A continuación proponemos una serie de problemas para su formalización matemática.

Problema 1:

Una persona desea balancear su dieta, la cual es a base de leche, carne, huevos y fruta.

Necesita que las proteínas consumidas no sean menos de 100 gr./día, que las grasas estén entre 50 y 80gr./día y que los azúcares estén entre 80 y 120 gramos diarios.

El costo de los alimentos de la dieta son:

Leche	$ 13.50 por Kilogramo
Carne	230.00 " "
Huevos	33.00 " "
Fruta	40.00 " "

De acuerdo con un estudio se ha determinado que los alimentos mencionados poseen las siguientes características:

Alimento	Proteínas	Grasas	Azúcares
Leche	3	10	1
Carne	700	200	10
Huevo	20	5	2
Fruta	2	1	100

* En gramos por Kilogramos

¿ Qué cantidad de cada alimento deberá contener la dieta más barata que cumpla con los requisitos de balanceo?

FORMALIZACION MATEMATICA

Identificaremos primeramente las variables de decisión del problema como sigue:

X_1: Kilogramos de leche incluidos en la dieta diaria,
X_2: " " carne " " " " "
X_3: " " huevos " " " " "
X_4: " " fruta " " " " " .

Como nuestro interés es encontrar la dieta de costo mínimo que cumpla con los requisitos, el objetivo será:

$$\text{Minimizar } Z= 13.5X_1+230X_2+33X_3+40X_4 .$$

Las restricciones del problema son en base a los requerimientos de proteínas, grasas y de azúcares:

1) La cantidad de proteínas contenidas en los alimentos de la dieta diaria debe ser mayor o igual a 100 gramos:

$$3X_1+700X_2+20X_3+2X_4 \geq 100$$

2) La cantidad de grasas no debe ser menos de 50 gramos ni más de 80 gramos:

$$10X_1+200X_2+5X_3+X_4 \geq 50$$
$$10X_1+200X_2+5X_3+X_4 \leq 80$$

3) La cantidad de azúcares no debe ser menos de 80 gramos ni más de 120 gramos:

$$X_1+10X_2+2X_3+100X_4 \geq 80$$
$$X_1+10X_2+2X_3+100X_4 \leq 120$$

4) Las variables de decisión (kilogramos de alimento) no podrán ser negativas, es decir que a lo menos deben ser nulas:

$$X_1 \geq 0 \qquad X_3 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0 \qquad X_4 \geq 0$$

Podemos ahora expresar el problema en su forma matemática, y, como dicen algunos, ya tenemos resuelta la mitad del problema:

$$\text{Min. } Z= 13.5X_1+230X_2+33X_3+40X_4$$

$$\text{sujeto a: } \left|\begin{array}{l} 3X_1 +700X_2 + 20X_3 + 2X_4 \geq 100 \\ 10X_1 +200X_2 + 5X_3 + X_4 \geq 50 \\ 10X_1 +200X_2 + 5X_3 + X_4 \leq 80 \\ X_1 + 10X_2 + 2X_3 + 100X_4 \geq 80 \\ X_1 + 10X_2 + 2X_3 + 100X_4 \leq 120 \\ X_i \geq 0 \ , \ \forall\ i. \end{array}\right.$$

Los ejemplos a continuación se proponen como ejercicio. El lector podrá ejercitarse en la serie de problemas propuestos en el anexo al final del presente trabajo.

Problema 2.

Se fabrican dos productos, R e I. Cada producto se procesa en los depar mentos de colado, maquinado y ensamble.

El colado del producto "I" puede comprarse a $6.00 la pieza y después p cesarse en las máquinas y ensamblarse. Si el colado no se compra, el produ "I" se hace a partir de 2 Kg. de material "K" y se cuela en la planta. El p ducto "R" puede hacerse ya sea de 4 Kg. de material "L" o de 5 Kg. de mate rial "K". Se dispone de 2,000 Kg. de material "L" y de 10,000 Kg. de materi "K" para el siguiente período de producción. El material "L" cuesta 10¢ el y el material "K" cuesta 20¢ el Kg.

El departamento de colado puede colar 3,000 unidades del producto "R" o del producto "I" en el siguiente período de producción. Se dispone de 200 h ras de tiempo de máquina durante el siguiente período de producción. El maq nado del producto "R", hecho del material "L" requiere 8 minutos. El maquin do del producto "R", hecho con el material "K" requiere 10 minutos. El maqu nado del producto "I" requiere 6 minutos.

Si se fabrica un solo producto, el departamento de ensamble puede armar 2,000 unidades del producto "R" o 4,000 unidades del producto "I".

Los costos variables de colado suman $1.00 por unidad. Los costos variables de maquinado son de $0.10 por minuto, y los costos variables de ensamb son nulos.

El producto "R" se vende a $10.00 y el producto "I" se vende a $12.00.

Problema 3.

Una empresa trituradora de piedra que obtiene de cualquiera de tres cant ras adyacentes. La piedra vendida por esa empresa debe regirse por las sigu tes especificaciones:

Material X igual al 30%

Material Y igual o menor al 40%

Material Z entre 30% y 40%

La piedra de la cantera A cuesta $1,000.00 la tonelada y tiene las siguientes propiedades:

Material X = igual al 20%

Material Y = igual al 60%

Material Z = igual al 20%

La piedra de la cantera B cuesta $1,200 la tonelada y tiene las siguientes propiedades:

Material X = 40%

Material Y = 30%

Material Z = 30%

La piedra de la cantera C cuesta $1,500 la tonelada y tiene las siguientes propiedades:

Material X = 10%

Material Y = 40%

Material Z = 50%

¿De qué canteras debe obtener la empresa la roca y en que proporciones?

Problema 4.

Pueden fabricarse tres tipos de botes: X, Y, Z. Cada tipo puede fabricarse empleando cualquiera de los dos diferentes procesos. El primero requiere una etapa: El moldeado del casco. El segundo requiere dos etapas: Construcción y acabado.

Las contribuciones al costo fijo y a la utilidad son las siguientes:

Bote	1er. Proceso	2do. Proceso
X	$200	$100
Y	300	50
Z	100	50 (Pérdida)

Los tiempos de construcción, días, son los siguientes para cada proceso:

		X	Y	Z
1er. proceso	Moldeado	4.0	5.0	3.0
	Construcción	3.0	4.5	3.0
2do. proceso	Acabado	1.5	2.0	1.5

Se dispone de 300 días para el moldeado, de 200 días para la contrucción de 100 días para el acabado. El mercado absorverá 50 botes "X", 40 botes "Y" y 60 botes "Z". Determine el programa óptimo de producción.

Problema 5.

Una compañía tiene un contrato importante que debe cumplir la próxima sema. Este contrato requiere la fabricación de 1000 unidades de ensamble "K". Cada unidad "K" consiste en el ensamble de una parte de "X" y dos de "Y".

Esta compañía tiene un departamento de ensamble y 3 de manufactura, con dos máquinas principales en cada departamento de manufactura.

Por conveniencia, los departamentos de manufactura se designan como "D", "E" y "F", y las máquinas como "D1", "D2", "E1", "E2", "F1" y "F2".

Cada parte se procesa a través de los tres departamentos de manufactura, algunas veces únicamente en una máquina, otras veces en las dos. La parte "X" se procesa en las máquinas "D1" y "D2", ya sea en la "E1" o en la "E2", y ya sea en la "F1" o la "F2".

Los requerimientos de tiempo para las partes "X", y "Y", y los costos variables por minuto son:

Departamento	Máquina	Pieza "X"	Pieza "Y"	Costo/min.
D	D1	4 min.	- -	$ 0.10
	D2	1 "	3 min.	0.30
E	E1	6 min.	2 min.	0.20
	E2	2 min.	3 "	0.15
F	F1	- -	6 min.	0.50
	F2	4 min.	4 "	0.25
Costo/materia prima		$ 1.00	$ 2.00	

En el departamento de ensamble, para obtener la unidad "K", se unen primero las dos partes "Y" y a continuación la parte "X". Las partes "Y" se unen a una velocidad de una unión por minuto, mientras que las partes "X" se arman a una velocidad de 10 uniones por minuto. Estas operaciones comparten las mismas instalaciones de ensamble. Se dispone de 8,800 minutos en cada máquina y de 40 horas de ensamble.

No se considera ningún costo variable de ensamble.

CAPÍTULO VI

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO SIMPLEX

VI INTRODUCCION AL METODO SIMPLEX

Al presentar el método gráfico, al principio de nuestra exposición, vimos una manera relativamente fácil de resolver un programa lineal en dos dimensiones (dos variables), pero cuando el número de variables va en aumento -- (en la realidad es difícil encontrarse con sólo dos variables de decisión - en un problema), resulta inaplicable este método.

La necesidad de reducir el número de soluciones consideradas en la resolución de un problema (un problema con "n" variables, y "m" restricciones tiene C_m^n soluciones) llevó al Dr. George Dantzing a elaborar un método matemático que permite resolver el problema lineal sin necesidad de analizar ex-- plícitamente el valor de la función objetivo en todos y cada uno de los puntos extremos del conjunto convexo de soluciones factibles.

1.- El Método.

Con este método, que utiliza el álgebra matricial, se resuelve gran número de programas lineales siguiendo ciertas reglas propias; es un proceso -- iterativo en el cual cada solución que se va obteniendo es mejor que la - - anterior. Para una mejor comprensión del Simplex trataremos a continuación un ejemplo sencillo:

Una compañía fabrica dos tipos de rims de magnesio que llamaremos tipo -- "X_1" y tipo "X_2". El tipo "X_1" posee un mejor acabado y requiere el doble - del tiempo que el rim "X_2". Si se fabricara únicamente el tipo "X_2", la mano de obra disponible sería suficiente para fabricar 1,500 rims de este tipo diariamente.

El rim del tipo "X_1" requiere un tratamiento especial que sólo es posible aplicarlo a 100 rims en la jornada, mientras que para el tipo "X_2" la cantidad máxima que puede ser tratado es de 700 rims por día.

El acabado final puede darse a 600 rims diariamente, ya sean "X_1", o "X_2", o una combinación lineal de ambos.

La utilidad que reportan los dos productos son: 30 unidades de utilidad para "X_1" y 10.5 unidades para "X_2".

La compañía quiere saber cuántos rims de cada tipo debe producir diariamente para maximizar sus utilidades.

Solución:

1ª.- Formulación matemática.

El problema de la compañía es un problema de maximización de utilidades bajo ciertas restricciones bien precisas. La función objetivo (F.O.) sería:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2$$

Se sabe que el rim "X_1" requiere el doble de tiempo de acabado que el "X_2" y que si se fabricara solamente el "X_2", la mano de obra disponible sería suficiente para la fabricación de 1,500 rims. Podemos entonces establecer una primera restricción como:

$$(1) \qquad 2X_1 + X_2 \leqslant 1,500$$

El tratamiento térmico que se aplica a los productos nos limita la producción de ambos rims. Estas restricciones pueden formularse como sigue:

$$(2) \qquad X_1 \leqslant 400$$

$$(3) \qquad X_2 \leqslant 700$$

Por último, la operación de acabado nos limita la producción total a 600 rims diarios:

$$(4) \qquad X_1 + X_2 \leqslant 600$$

Tenemos así nuestro modelo matemático ya establecido; sólo faltaría, por el hecho de que la producción no puede ser negativa, agregar las condiciones de no negatividad. Tendríamos:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2$$

$$\text{sujeto a:} \quad \left|\begin{array}{l} 2X_1 + X_2 \leqslant 1,500 \\ X_1 \leqslant 400 \\ X_2 \leqslant 700 \\ X_1 + X_2 \leqslant 600 \\ X_i \geqslant 0, \forall i \end{array}\right.$$

2ª.- Romper las desigualdades agregando variables de holgura (Wi).

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & 2X_1 + X_2 + W_1 & = & 1,500 \\
(2) & X_1 + W_2 & = & 400 \\
(3) & X_2 + W_3 & = & 700 \\
(4) & X_1 + X_2 + W_4 & = & 600
\end{array}
$$

La contribución de las variables de holgura es el costo de un ocio en algún departamento, de productos no hechos, material no utilizado, etc.. En general, nosotros tomaremos una contribución nula si no especificamos lo contrario. La F.O. de nuestro problema queda entonces como:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2 + 0W_1 + 0W_2 + 0W_3 + 0W_4$$

3ª.- Formar la tabla inicial del Simplex.

El objeto de agregar variables no-reales a las restricciones es de obtener una matriz identidad de orden "m", la cual, a cada iteración, se transforma en la matriz inversa de las variables de base en esa iteración. Después de cada iteración, la parte central de la tabla tiene la configuración $\left[B^{-1}A \,\vdots\, B^{-1}\right]$.

Los pasos para formar la tabla son:

a) Se forma un arreglo matricial de los coeficientes de las igualdades (coeficientes tecnológicos):

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

b) Al margen superior se agrega el renglón de variables; y sobre éste, el renglón de contribuciones correspondientes.

30	10.5	0	0	0	0	← Renglón objetivo.
X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	← Renglón de variables.
2	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	

$\underbrace{X_1 \quad X_2}_{\text{cuerpo de la tabla}}$ $\underbrace{W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad W_4}_{\text{parte identidad}}$

c) Al margen izquierdo se agregan los términos independientes de cada restricción, o columna de constantes (b_i , i=1,2,...,m):

	30	10.5	0	0	0	0
	X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
1,500	2	1	1	0	0	0
400	1	0	0	1	0	0
700	0	1	0	0	1	0
600	1	1	0	0	0	1

d) Primera solución. La primera solución está en función de las variables que forman la matriz identidad; éstas serán llamadas variables "básicas" o de base. Se agregará entonces una columna formada por estas variables (X_{Bi}) y otra, a su izquierda con las contribuciones respectivas (C_{Bi}):

columna de contribuciones de las variables básicas.								
			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1
	columna de las variables básicas.							

Esta primera solución, la cual vamos a tratar de mejorar en cada iteración es la siguiente:

$$W_1 = 1{,}500$$
$$W_2 = 400$$
$$W_3 = 700$$
$$W_4 = 600$$

con:

$$X_1 = 0$$
$$X_2 = 0$$

y una utilidad de:

$$Z = 0 + 0 + (0)\ (1{,}500) + (0)\ (400) + (0)\ (700) + (0)\ (600)$$

$$Z = 0$$

e) Renglón índice. En el margen inferior colocaremos el renglón índice, formado por los elementos "$z_j - c_j$" bajo las columnas de las variables "j". Estos elementos se forman con la relación:

$$(z_j - c_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, c_{Bi} - c_j \quad ,$$

es decir:

La sumatoria del producto de los elementos de la columna $_j$ por el correspondiente en la columna de las contribuciones de las variables de base, menos la contribución correspondiente, en el renglón objetivo, a la variable "X_j":

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1
			-30	-10.5	0	0	0	1 } Renglón índice

f) Por último se agrega el valor de la F.O. bajo la columna de constantes al nivel del renglón índice. Su valor se obtiene de manera similar a "$z_j - c_j$":

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i c_{Bi} \quad ,$$

es decir: La sumatoria del producto de los elementos de la columna de constantes (b_i) por el correspondiente en la columna de contribuciones de las variables de base:

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0.	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1
		0	-30	-10.5	0	0	0	0

(TABLA 1)

4ª.- Procedimiento para la búsqueda de la solución óptima (iteraciones).

a) Determinar la columna clave, cuya variable respectiva pasará a formar parte de la base y será llamada "variable de entrada". La columna clave será aquélla que tenga el elemento más negativo en el renglón índice:

$$\min_j \left\{ (z_j - c_j) \mid (z_j - c_j) < 0 \right\}$$

En el presente caso el elemento más negativo es "-30", que corresponde a la columna de "X_1":

$$\min \left\{ -30 \ , \ -10.5 \right\} = -30$$

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1
		0	-30	-10.5	0	0	0	0

columna clave "k"

b) Determinar el renglón clave, cuya variable correspondiente saldrá de la base y la llamaremos "variable de salida". En el lugar de ésta estará la variable de entrada en la tabla siguiente.

El renglón clave se encuentra dividiendo la columna de términos independientes (b_i) entre los elementos correspondientes de la columna clave (y_{ik}), cuando estos últimos son positivos. El renglón clave será el que contenga el menor cociente:

$$\min_i \left\{ \frac{bi}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{1,500}{2}, \frac{400}{1}, \frac{600}{1} \right\}$$

$$= \min \left\{ 750 , 400 , 600 \right\}$$

$$= 400$$

			30	10.5	0	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	
0	W_1	1,500	2	1	1	0	0	0	
0	W_2	400	1	0	0	1	0	0	Renglón clave "r"
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0	
0	W_4	600	1	1	0	0	0	1	
		0	-30	-10.5	0	0	0	0	

El elemento que se encuentra en la intersección del renglón y la columna clave (y_{rk}) se llamará número clave. En este caso $y_{rk} = y_{21} = 1$

c) Determinar el renglón principal de la tabla siguiente.

El renglón principal de la nueva tabla se obtiene dividiendo, a partir del término independiente, los elementos del renglón clave (renglón "r") entre el número clave (y_{rk}). En el caso presente queda igual pues $y_{rk}=1$:

400 1 0 0 1 0 0

d) Se substituye la variable del renglón clave (variable de salida) y su contribución por la variable de la columna clave (variable de entrada) y su contribución:

30 X_1 400 1 0 0 1 0 0

e) El resto de los renglones objetivo y de variables, y de las columnas básicas pasan igual:

			30	10.5	0	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4
0	W_1							
30	X_1	400	1	0	0	1	0	0
0	W_3							
0	W_4							

f) Los elementos restantes de la nueva tabla, incluyendo los términos independientes, se encuentran, ya sea por transformaciones elementales, tomando como base el renglón principal y la columna clave, haciendo ceros los elementos de ésta, o por la fórmula siguiente:

$$y^*_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{rj}\, y_{ik}}{y_{rk}} , \forall i , j ,$$

donde:

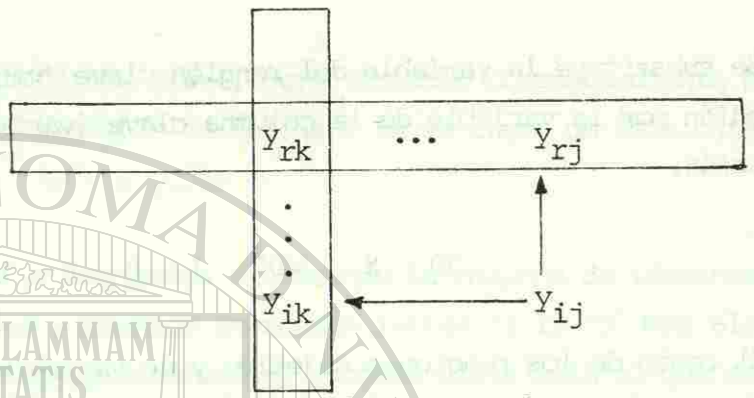
y^*_{ij} = Elemento nuevo

y_{ij} = Elemento antiguo

y_{rj} = Elemento correspondiente al elemento buscado en el renglón clave.

y_{ik} = Elemento correspondiente en la columna clave.

y_{rk} = Elemento (o número) clave:



los elementos restantes de la columna clave se vuelven ceros:

			30	10.5	0	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	
0	W_1	700	0	1	1	-2	0	0	
30	X_1	400	1	0	0	1	0	0	(TABLA 2)
0	W_3	700	0	1	0	0	1	0	
0	W_4	200	0	1	0	-1	0	1	
		12,000	0	-10.5	0	30	0	0	

Una vez completada la nueva tabla se examinan los elementos del renglón - - $(z_j - c_j)$. Si no hay ninguno negativo, hemos llegado a una solución óptima; en -- caso contrario buscamos una nueva tabla regresando al paso 4a.

En nuestro ejemplo hubo un elemento negativo y tenemos que buscar una nueva solución; ésta será la obtenida por la tabla:

			30	10.5	0	0	0	0	
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3	W_4	
0	W_1	500	0	0	1	-1	0	-1	
30	X_1	400	1	0	0	1	0	0	(TABLA 3)
0	W_3	500	0	0	0	1	1	-1	
10.5	X_2	200	0	1	0	-1	0	1	
		14,100	0	0	0	19.5	0	10.5	

Examinando los elementos del renglón índice en la nueva tabla encontramos que todos ellos son positivos o nulos, por consiguiente hemos llegado a una solución óptima, la cual se encuentra en la región de la base:

$$W_1 = 500$$
$$X_1 = 400$$
$$W_3 = 500 \quad , \text{ con } Z_{\text{máx.}} = 14,100$$
$$X_2 = 200$$

Esto significa que la compañía alcanzará una utilidad máxima produciendo 400 rims del tipo "X_1" y 200 del tipo "X_2"; Habiendo una holgura en la mano de obra para fabricar 500 unidades (W_1) y una holgura en el proceso de tratamiento térmico para 500 unidades (W_3).

La solución encontrada es una solución básica no degenerada pues tenemos exactamente "m" componentes del vector "X" mayores de cero y "n-m" componentes nulas.

En la gráfica de la figura I podemos seguir el camino que toma el algoritmo simplex para nuestro problema. La solución inicial (TABLA 1) se encuentra en el origen (punto "0"); de aquí partimos hacia la mejor de las soluciones adyacentes, en este caso el punto "A" (TABLA 2). Como ésta no es solución -- óptima, seguimos desplazándonos hasta encontrarla. En nuestro ejemplo el punto "B" (TABLA 3) fue el que nos dió la solución óptima.

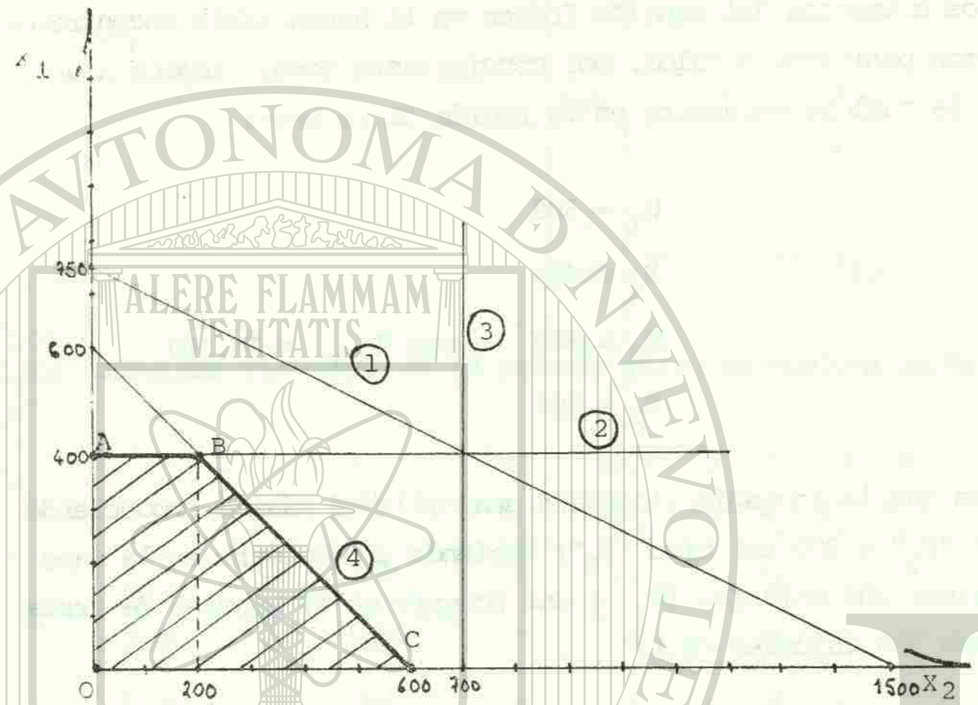


FIG. I

2.- Degeneración.

La degeneración en el método Simplex se presenta cuando, al buscar el renglón clave existen dos o más cocientes $\frac{\text{"bi"}}{y_{ik}}$ con valor algebraico mínimo:

Sea el programa lineal:

$$\text{Max.} Z = 10X_1 + 12X_2$$

$$\text{sujeto a:} \quad \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 1{,}500 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 1{,}500 \\ X_1 + X_2 \leq 600 \\ X_i \geq 0 \ , \forall i \end{cases}$$

1ª Tabla:

			10	12	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
0	W_1	1,500	2	3	1	0	0
0	W_2	1,500	3	2	0	1	0
0	W_3	600	1	1	0	0	1
		0	-10	-12	0	0	0

2ª Tabla:

			10	12	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
12	X_2	500	2/3	1	1/3	0	0
0	W_2	500	5/3	0	-2/3	1	0
0	W_3	100	1/3	0	-1/3	0	1
		6,000	-2	0	4	0	0

En esta tabla la columna clave corresponde a la de la variable "X_1" que entrará a la base. Si tratamos de determinar la variable de salida (renglón clave), nos encontramos con un "empate" entre los renglones 2 y 3.

$$(1) \quad \frac{b_1}{y_{1k}} = \frac{500}{2/3} = 750$$

$$\left.\begin{aligned} (2) \quad \frac{b_2}{y_{2k}} &= \frac{500}{5/3} = 300 \\ (3) \quad \frac{b_3}{y_{3k}} &= \frac{100}{1/3} = 300 \end{aligned}\right\} \quad \text{empate: mín} \left\{750,\ 300,\ 300\right\} = 300$$

Existen varios métodos para deshacer la degeneración en el simplex, uno de ellos, posiblemente el más eficiente, consiste en dividir cada elemento de los renglones empatados entre el elemento correspondiente en la columna clave; Se comparan los elementos de los renglones empatados, columna por columna, a partir de la parte identidad hacia la derecha. La degeneración se rompe al encontrar la primera diferencia, escogiendo como renglón clave el correspondiente al menor cociente. Si no existe ninguna diferencia en la parte identidad se continuará con las columnas del cuerpo de la tabla. Para nuestro ejemplo tenemos:

$$
\begin{array}{cccccc}
(2) & \dfrac{5/3}{5/3} & \dfrac{0}{5/3} & \dfrac{-2/3}{5/3} & \dfrac{1}{5/3} & \dfrac{0}{5/3} \\[2ex]
(3) & \dfrac{1/3}{1/3} & \dfrac{0}{1/3} & \underbrace{\dfrac{-1/3}{1/3} \quad \dfrac{0}{1/3} \quad \dfrac{1}{1/3}}_{\text{columnas de la parte identidad } (B^{-1})} & &
\end{array}
$$

Al examinar la primera columna vemos que el cociente del tercer renglón es menor que el del segundo:

$$
\left.\begin{array}{cc}
(2) & -2/5 \\
(3) & -1
\end{array}\right\} \text{menor}
$$

Por consiguiente la degeneración se rompe y el renglón clave será el tercero:

			10	12	0	0	0
			X_1	X_2	W_1	W_2	W_3
12	X_2	500	2/3	1	1/3	0	0
0	W_2	500	5/3	0	-2/3	1	0
0	W_3	100	1/3	0	-1/3	0	1
		6,000	-2	0	4	0	0

y el procedimiento seguirá normalmente, obteniendo en la última tabla:

$$
X_B = \begin{bmatrix} X_2 \\ W_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix}, \quad Z_{máx} = 6,600 ,
$$

resultado que sugerimos al lector verifique por el método expuesto hasta aquí.

3.- Método de la "M" grande

Hemos visto, en lo expuesto anteriormente, una manera de resolver un programa lineal con restricciones del tipo "menor o igual" ($\leqslant$). Es evidente que no existe este solo tipo de restricciones. En efecto, podemos encontrarnos también frente a restricciones del tipo "mayor o igual" ($\geqslant$) o de igualdad (=).

Como vimos en la sección 1 del capítulo IV, una desigualdad del tipo " $\geqslant$ " puede deshacerse mediante la substracción de una variable de holgura. Para poder utilizar el método simplex con cualquier tipo de restricciones, tenemos que formar una matriz identidad en la parte derecha de la tabla, así es que agregamos una nueva variable que llamaremos "ficticia", de manera que no nos afecte en nuestros resultados:

$$X_1 + X_2 \geqslant 5 \sim X_1 + X_2 - W_1 + U_1 = 5$$

misma razón, si tenemos una restricción de igualdad agregaremos una variable ficticia:

$$X_1 + X_2 = 3 \quad \sim \quad X_1 + X_2 + U_1 = 3$$

Las contribuciones a la F.O. de las variables de holgura negativas siguen siendo nulas (0), mientras que las de las variables ficticias tendrán un valor muy grande (M), que será negativo si el objetivo es maximizar y positivo si el objetivo es minimizar. De esta manera nuestro método se encargará de sacar todas las variables ficticias de la base.

Así, si nuestra F.O. es de la forma $\text{Max.}Z = \sum_i c_i X_i$, al deshacer las desigualdades para formar la matriz identidad tomará la forma:

$$\text{Max.}Z = \sum_i c_i X_i + 0 \sum_j W_j - M \sum_k U_k$$; y si tiene la forma

$$\text{Mín.}Z = \sum_i c_i X_i$$ tomará la forma:

$$\text{Mín.}Z = \sum_i C_i X_i + 0 \sum_j W_j + M \sum_k U_k \, .$$

Veremos un ejemplo cuyo enunciado omitimos para fines de ilustración. Sea el programa lineal a optimizar:

$$\text{Max.}Z = 3X_1 - X_2 - X_3$$

sujeto a:

$$\begin{array}{l} X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 11 \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 \geqslant 3 \\ 2X_1 - X_3 = -1 \\ X_i \geqslant 0, \ \forall i \end{array}$$

Al deshacer desigualdades vemos que tenemos que multiplicar por (-1) la tercera restricción, ya que tenemos un número negativo como término independiente. Tenemos:

$$\begin{array}{rl} X_1 - 2X_2 + X_3 + W_1 & = 11 \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 - W_2 + U_1 & = 3 \\ -2X_1 + X_3 + U_2 & = 1 \end{array}$$

y la F.O. queda:

$$\text{Max.}Z = 3X_1 - X_2 - X_3 + 0W_1 + 0W_2 - MU_1 - MU_2$$

Para obtener una matriz identidad en el lado derecho, al inspeccionar las restricciones en su nueva forma, nos damos cuenta de que el orden de las variables deberá ser:

$$X_1, X_2, X_3, W_2, W_1, U_1, U_2 \, ,$$

es decir: primero las variables reales; inmediatamente después, las variables de holgura que se restaron a las restricciones " $\geqslant$ ", guardando el orden de las restricciones, y después las de holgura "positivas" y/o las ficticias según el mismo orden de aparición.

Utilizando el procedimiento ya estudiado tenemos:

			3	-1	-1	0	0	-M	-M
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_1	U_1	U_2
0	W_1	11	1	-2	1	0	1	0	0
-M	U_1	3	-4	1	2	-1	0	1	0
-M	U_2	1	-2	0	1	0	0	0	1
		-4M	(6M-3)	(-M+1)	(-3M+1)	M	0	0	0

Sabiendo que "M" es un número muy grande ($M \rightarrow \infty$), la columna clave en este caso es la tercera, puesto que $(z_3 - c_3) = -3M+1$ es el elemento "más negativo" del renglón índice.

iendo el procedimiento Simplex llegamos a la tabla óptima:

			3	-1	-1	0	0	$-M$	$-M$
			X_1	X_2	X_3	W_2	W_1	U_1	U_2
3	X_1	4	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	$2/3$	$-5/3$
-1	X_2	1	0	1	0	-1	0	1	-2
-1	X_3	9	0	0	1	$-4/3$	$2/3$	$4/3$	$-7/3$
		2	0	0	0	$1/3$	$1/3$	$(M-1/3)$	$(M-2/3)$

donde la solución óptima es:

$X_1 = 4$ unidades de producción

$X_2 = 1$ unidad de producción

$X_3 = 9$ unidades de producción

utilidad máxima = 2 unidades de utilidad.

4.- Modelo de dietas.

Este tipo de modelos es llamado "de dietas" pues se originó con el estudio de dietas alimenticias a costo mínimo, donde se tenía en cuenta el contenido de elementos nutritivos de los alimentos que formaban dicha dieta. Implican límites mínimos o máximos del contenido de esos elementos en la dieta buscada.

Ejemplo:

Una compañía fabricante de productos farmacéuticos desea lanzar al mercado unas tabletas compuestas de Niacina y Tiamina, con una materia inerte para completar el peso y facilitar el pastillado.

Las características de una tableta son:

Peso: 5 dgr.

Contenido de Niacina: Entre 60 mgr. (mín.) y 80 mgr. (máx.)

Contenido de Tiamina: Entre 80 mgr. (mín.) y 95 mgr. (máx.)

Para la fabricación de dichas tabletas se dispone de los ingredientes A y B cuyo contenido y costo son:

componentes \ ingredientes	A	B
Niacina (mgr/dgr.)	20	15
Tiamina (mgr./dgr.)	5	25
Costo ($/dgr.)	2.00	3.00

El costo del elemento inerte es de $1.00/dgr. y se desea obtener la mezcla más económica.

El programa lineal correspondiente es:

$$\text{Mín.}Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3$$

$$\text{sujeto a:} \left| \begin{array}{l} 20X_1 + 15X_2 \geq 60 \\ 20X_1 + 15X_1 \leq 80 \\ 5X_1 + 25X_2 \geq 80 \\ 5X_1 + 25X_2 \leq 95 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 5 \\ Xi \geq 0, \forall i \end{array} \right.$$

donde las X_i son las cantidades en decigramos de A, B y C, la materia inerte

La 1ª.- tabla simplex es:

			2	3	1	0	0	M	0	M	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_3	U_1	W_2	U_2	W_4
M	U_1	60	20	15	0	-1	0	1	0	0	0
0	W_2	80	20	15	0	0	0	0	1	0	0
M	U_2	80	5	25	0	0	-1	0	0	1	0
0	W_4	95	5	25	0	0	0	0	0	0	1
M	U_3	5	1	1	1	0	0	0	0	0	0
		(145M)	(26M-2)	(41M-3)	(M-1)	-M	-M	0	0	0	0

y la tabla óptima:

			2	3	1	0	0	M	0	M	0
			X_1	X_2	X_3	W_1	W_3	U_1	W_2	U_2	W_4
2	X_1	12/17	1	0	0	-1/17	3/85	1/17	0	-3/85	0
0	W_2	20	0	0	0	1	0	-1	1	0	0
3	X_2	52/17	0	1	0	1/85	-4/85	-1/85	0	4/85	0
0	W_4	15	0	0	0	0	1	0	0	-1	1
1	X_3	21/17	0	0	1	4/85	1/85	-4/85	0	-1/85	0
		201/17	0	0	0	-3/85	-1/17	(-M-4/85)	0	$(-M+\frac{1}{17})$	0

La solución óptima es entonces:

* 0.706 Decigramos del ingrediente A
* 3.059 Decigramos del ingrediente B
* 1.235 Decigramos de materia inerte.

costo mínimo: $11.82

Nota: Se recomienda al lector verificar este resultado.

5.- Problemas sin solución.

Un problema sin solución se detecta cuando, habiendo llegado a una tabla --- que cumple con las condiciones de optimalidad, la solución "óptima" está en función de una variable ficticia, es decir que hay cuando menos una variable ficticia no nula.

Consideremos el programa lineal:

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$\text{sujeto a: } \left| \begin{array}{l} 2X_1 + X_2 \leqslant 10 \\ X_1 + 3X_2 \geqslant 36 \\ X_i \geqslant 0, \ \forall i \end{array} \right.$$

que resuelto por el simplex se obtiene una tabla óptima:

			3	2	0	0	-M
			X_1	X_2	W_2	W_1	U_1
2	X_2	10	2	1	0	1	0
-M	U_1	6	-5	0	-1	-3	1
		(-6M+10)	(5M+1)	0	M	(3M+2)	0

que nos da una solución no factible puesto que la variable ficticia "U_1" tiene un valor positivo, y, para que una solución sea factible es necesario que las variables ficticias tengan un valor nulo.

Si aplicamos el método gráfico tenemos las coordenadas al origen:

* para la restricción 1 : $X_1 = 5$; $X_2 = 10$
* para la restricción 2 : $X_1 = 36$; $X_2 = 12$
* para la función objetivo: $X_1 = 10$; $X_2 = 15$

graficando:

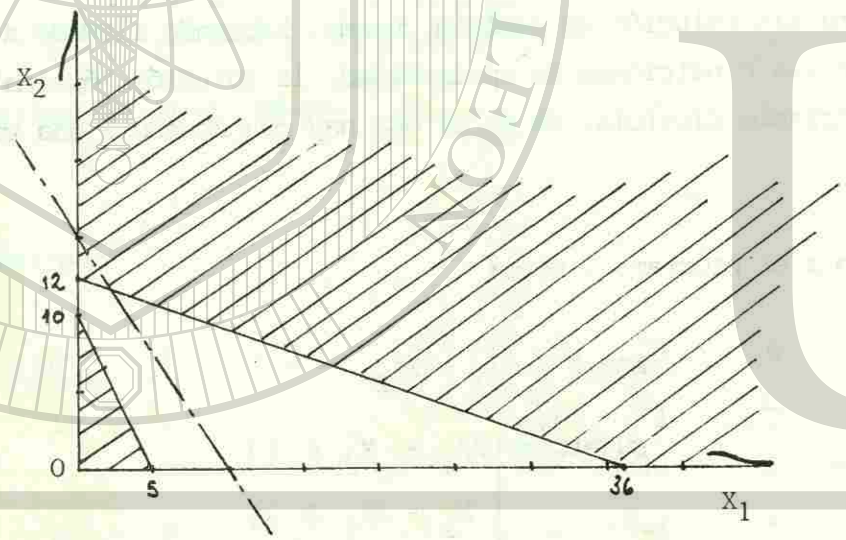


FIG. II

Como se ve no existe ningún punto que satisfaga simultáneamente las restricciones del programa planteado. El caso más evidente es cuando tratamos con desigualdades de sentido contrario con pendiente igual a uno (paralelas a 45°).

En estos casos se dice que el sistema de ecuaciones es inconsistente, y proporciona una solución pseudo-óptima.

5.-Problemas con solución ilimitada.

Cuando en el procedimiento simplex no se puede continuar porque no podemos encontrar el renglón clave (variable de salida), la solución del problema tratado es ilimitada.

Consideremos el programa lineal siguiente:

$$\text{Max.} Z = 6X_1 + 2X_2$$

$$\text{sujeto a:} \left| \begin{array}{l} X_1 + X_2 \geqslant 10 \\ X_2 \leqslant 8 \\ X_i \geqslant 0, \forall i \end{array} \right.$$

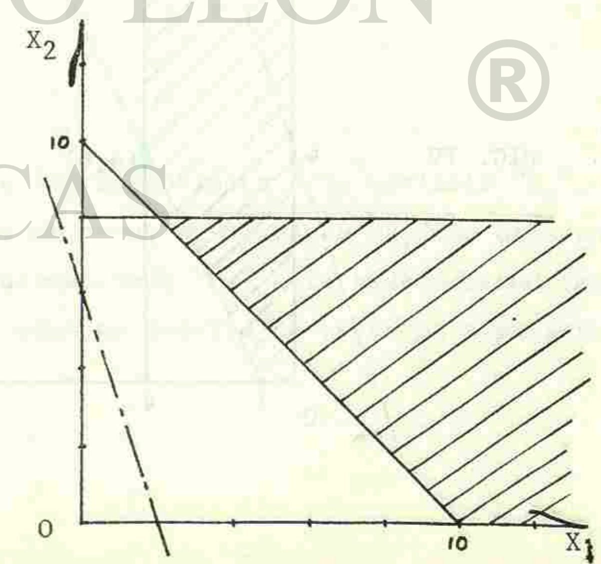
Al resolverlo por el método simplex encontramos que no podemos pasar de la segunda tabla:

			6	2	0	-M	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
6	X_1	10	1	1	-1	1	0
0	X_5	8	0	1	0	0	1
		60	0	5	-6	(M+6)	0

Aquí la columna clave es la correspondiente a la variable de holgura "X_3", que en principio debe entrar a la base, pero no podemos encontrar la variable de salida aplicando nuestra regla de selección, puesto que un elemento de la columna clave es negativo y el otro es cero. La variable más viable sería "X_5", que tiene el único cociente "positivo", pero éste es indeterminado o infinito. Así, tanto los valores de las variables de base como de la función objetivo son del mismo tipo.

Por el método gráfico tenemos:

FIG.III



...servamos que para $X_2 = 8$ cualquier valor de "X_1" superior a 7.33 mejora ...solución de $Z = 60$ hasta el infinito.

No todos los problemas que tienen un conjunto de soluciones infinito (no acotado) tienen solución ilimitada. El siguiente ejemplo es una prueba de ello:

$$\text{Max.}Z = 6X_1 - 2X_2$$

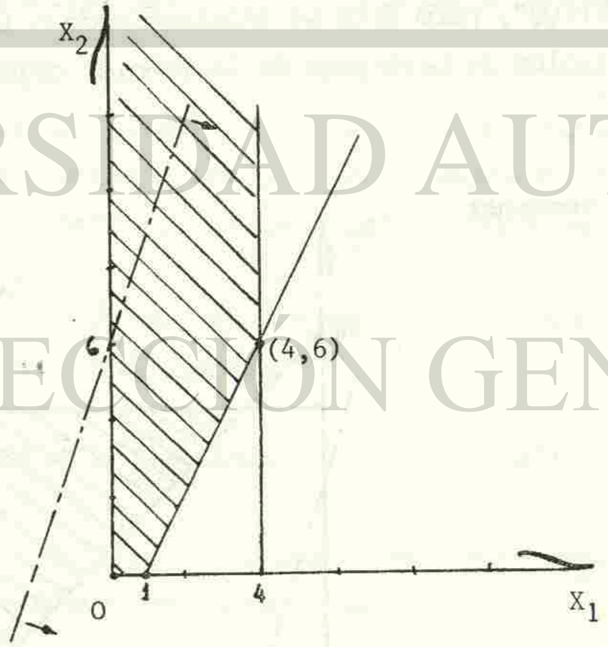
$$\text{sujeto a: } \left| \begin{array}{l} 2X_1 - X_2 \leq 2 \\ X_1 \leq 4 \\ X_i \geq 0, \forall i \end{array} \right.$$

cuya tabla óptima es:

			6	-2	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4
6	X_1	4	1	0	0	1
-2	X_2	6	0	1	-1	2
		12	0	0	2	2

y su gráfica:

FIG. IV



7.- Problemas con soluciones múltiples

Cuando en el renglón índice $(Z_j - C_j)$, de la tabla óptima del Simplex aparecen, además de los correspondientes a las variables básicas, uno o más elementos nulos, se dice que la solución obtenida no es única, sino que el problema tiene soluciones múltiples. La solución que aparece en la tabla óptima corresponde sólo a un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Esto se debe a que la función objetivo tiene la misma pendiente que alguna de las restricciones-frontera de dicho conjunto.

Tomemos el siguiente ejemplo:

$$\text{Max.}Z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \;, \forall i \end{array} \right.$$

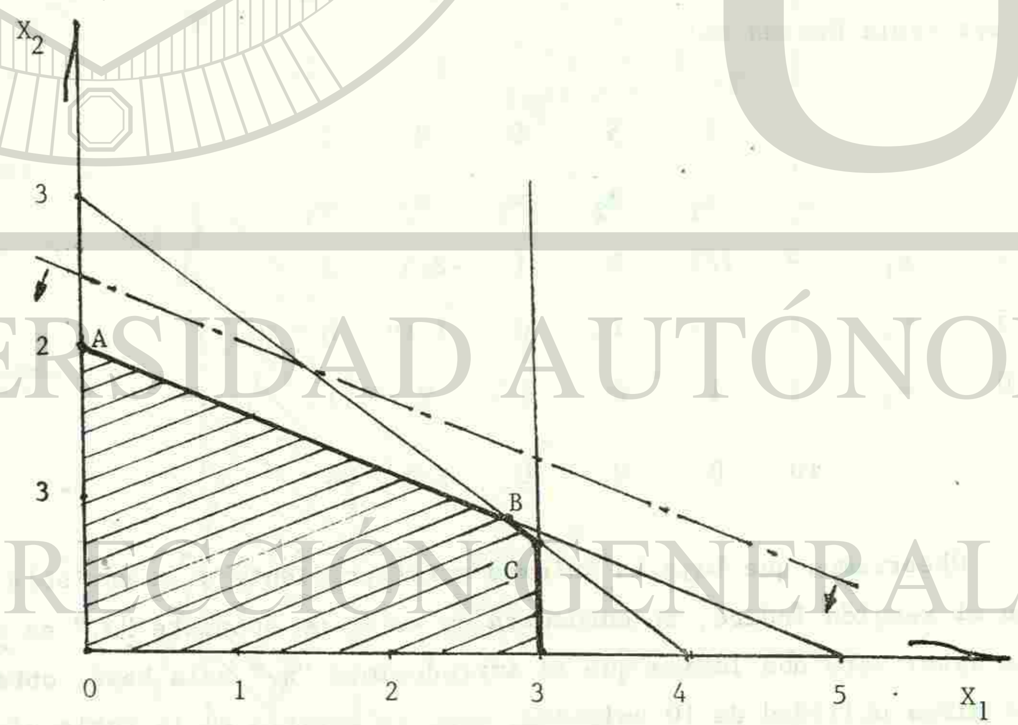
cuya tabla óptima es:

			2	5	0	0	0
			x_1	x_2	w_1	w_2	w_3
0	w_1	4	7/5	0	1	-2/5	0
5	x_2	2	2/5	1	0	1/10	0
0	w_3	3	1	0	0	0	1
		10	0	0	0	1/2	0

Observamos que bajo la columna correspondiente a la variable "x_1", en el renglón índice, se encuentra un cero; no obstante "x_1" no está en la base. Esto nos indica que si introducimos "x_1" a la base, obtendremos la misma utilidad de 10 unidades, como se muestra en la tabla siguiente:

			2	5	0	0	0
			x_1	x_2	w_1	w_2	w_3
2	x_1	20/7	1	0	5/7	-2/7	0
5	x_2	6/7	0	1	-2/7	3/14	0
0	w_3	1/7	0	0	-5/7	2/7	1
		10	0	0	0	1/2	0

Estas dos soluciones están localizadas en la gráfica correspondiente con los puntos A y B, que son puntos extremos del conjunto convexo de soluciones y están unidos por una recta. Así, puesto que la F.O. es paralela a dicha recta (con igual pendiente), toda combinación sobre la recta A,B dará la misma utilidad.

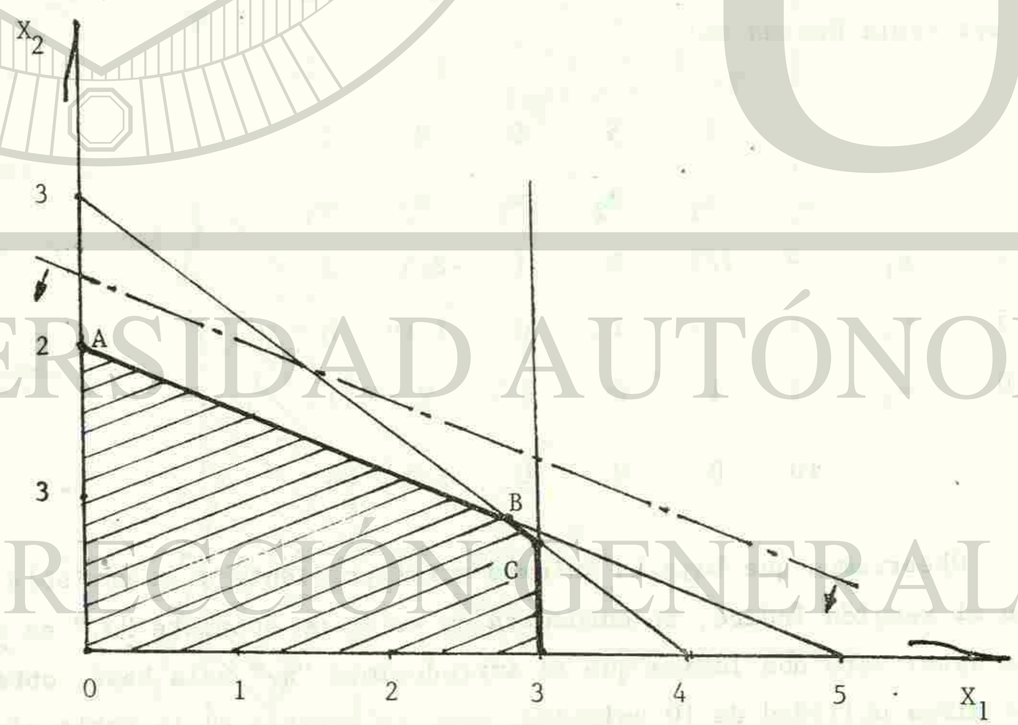


CAPÍTULO VII

MÉTODO SIMPLEX-DUAL

			2	5	0	0	0
			x_1	x_2	w_1	w_2	w_3
2	x_1	20/7	1	0	5/7	-2/7	0
5	x_2	6/7	0	1	-2/7	3/14	0
0	w_3	1/7	0	0	-5/7	2/7	1
		10	0	0	0	1/2	0

Estas dos soluciones están localizadas en la gráfica correspondiente con los puntos A y B, que son puntos extremos del conjunto convexo de soluciones y están unidos por una recta. Así, puesto que la F.O. es paralela a dicha recta (con igual pendiente), toda combinación sobre la recta A,B dará la misma utilidad.



CAPÍTULO VII

MÉTODO SIMPLEX-DUAL

VII. METODO DUAL

El método presentado más arriba es llamado Simplex-Primal (también primario o primordial); en él se trabaja directamente con la función objetivo y las restricciones encontradas al analizar el problema en cuestión. Veremos ahora cómo puede resolverse el mismo problema "Primal" por otro método, que utiliza el mismo algoritmo Simplex aplicado al invertir los renglones y columnas (transpuesta) del problema original. Esta forma de tratar el problema lleva el nombre de "Dual", y encuentra un gran interés de aplicación cuando en el primal el número de renglones (restricciones) es mayor que el de columnas (variables o incógnitas). A todo problema primal corresponde un problema dual.

Distinguiremos dos tipos de programas: Dual simétrico y Dual asimétrico.

1.- <u>Dual simétrico.</u>

Cuando el programa primal tiene todas sus restricciones en el mismo sentido ($\leqslant$, $\geqslant$ ó =), se dice que es simétrico.

Ilustraremos el método con el ejemplo de los rims de magnesio, cuyo programa primal era:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10.5X_2$$

$$\left|\begin{array}{rcl} 2X_1 + X_2 & \leqslant & 1,500 \\ X_1 + X_2 & \leqslant & 600 \\ X_1 \quad\quad & \leqslant & 400 \\ X_2 & \leqslant & 700 \\ X_i & \geqslant & 0, \forall i \end{array}\right.$$

Presentaremos la dinámica del método dual de dos maneras: primeramente — veremos una manera que podríamos llamar "empírica"; luego una manera generalizada que llamaremos "matricial".

1.1.- Modelo "empírico"

Este modelo pasa de una tabla de maximización del primal a otra de maximización en dual.

1er Paso: Sin deshacer desigualdades, ordenar la matriz de las restricciones, el vector de términos independientes y el de contribuciones como si se tratase de establecer la tabla inicial del primal:

		30	10.5
		X_1	X_2
1,500	$\geq$	2	1
600	$\geq$	1	1
400	$\geq$	1	0
700	$\geq$	0	1

2º Paso: Asociar una nueva variable a cada restricción. Estas variables serán llamadas "variables duales":

			30	10.5
			X_1	X_2
V_1	1,500	$\geq$	2	1
V_2	600	$\geq$	1	1
V_3	400	$\geq$	1	0
V_4	700	$\geq$	0	1

3er Paso: La columna de términos independientes de la tabla primal, con sus signos invertidos, pasa a ser el renglón objetivo de la tabla dual, al cual hacemos corresponder el renglón de variables duales asociadas:

-1,500	-600	-400	-700
V_1	V_2	V_3	V_4

4º Paso: El renglón objetivo de la tabla primal pasa a ser la columna de términos independientes en la tabla dual, y se invierte el sentido de desigualdades:

	-1,500	-600	-400	-700
	V_1	V_2	V_3	V_4
30				
10.5				

5º Paso: Las columnas de la matriz de coeficientes tecnológicos del primal pasan a ser renglones del dual, por consiguiente los renglones en aquél pasan a ser columnas en éste. Esto significa que la matriz de coeficientes de uno, es la transpuesta de la del otro. Esto nos da lo siguiente:

		-1,500	-600	-400	-700
		V_1	V_2	V_3	V_4
30	$\leq$	2	1	1	0
10.5	$\leq$	1	1	0	0

6º.- Paso: Agregar las variables de holgura y ficticias que se requieran — según el tipo de restricciones obtenidas, al igual que sus contribuciones — correspondientes, tomando en cuenta que si en el primal se está maximizando (o minimizando), en el dual también. Como en nuestro caso tenemos ahora restricciones del tipo " $\geq$ ", tendremos que restar, en cada renglón, una variable de holgura de contribución nula y sumar una ficticia de contribución "-M", pues estamos maximizando. Se obtiene:

	$-1,500$	-600	-400	-700	0	0	$-M$	$-M$
	V_1	V_2	V_3	V_4	W_1	W_2	V_1	V_2
30	2	1	1	0	-1	0	1	0
10.5	1	1	0	1	0	-1	0	1

7ª.- Paso: Completar la tabla de igual forma que para un problema primal y - resolver conforme al objetivo. La tabla inicial de nuestro problema dual queda entonces en la forma:

			$-1,500$	-600	-400	-700	0	0	$-M$	$-M$
			V_1	V_2	V_3	V_4	W_A	W_B	U_1	U_2
$-M$	U_1	30	2	1	1	0	-1	0	1	0
$-M$	U_2	10.5	1	1	0	1	0	-1	0	1
		$-40.5M$	$-3M+1,500$	$-2M+600$	$-M+400$	$-M+700$	M	M	0	0

Después de cuatro iteraciones la tabla óptima para el problema dual es - la siguiente:

			$-1,500$	-600	-400	-700	0	0	$-M$	$-M$
			V_1	V_2	V_3	V_4	W_A	W_B	U_1	U_2
-400	V_3	39/2	1	0	1	-1	-1	1	1	-1
-600	V_2	21/2	1	1	0	1	0	-1	0	1
		$\underbrace{-14,100}_{-Z}$	$\underbrace{500}_{W_1}$	$\underbrace{0}_{W_2}$	$\underbrace{0}_{W_3}$	$\underbrace{500}_{W_4}$	$\underbrace{400}_{X_1}$	$\underbrace{200}_{X_2}$	$M-400$	$M-200$

Interpretación de la solución.

1ª.- El valor de la función objetivo se encuentra en el mismo lugar, pero -- con signo contrario. Aquí:

$$-Z = -14,100$$
$$Z = 14,100$$

2ª.- El valor de cada variable real (del primal) se encuentra en el renglón índice de la tabla dual, bajo la columna de la variable de holgura correspondiente. De este modo encontraremos el valor de "X_1" bajo la columna de - "W_A", pues ésta fue la variable que se agregó al renglón formado por los -- coeficientes de las "X_1" en la matriz de las restricciones. De igual modo - encontraremos el valor de "X_2" bajo la columna de "W_B", y el de las varia-- bles de holgura del primal, bajo las columnas respectivas de las variables duales.

Tendremos entonces la solución de nuestro problema original en la forma:

$$Z_{\text{máx.}} = 14,100$$

$$X_1 = 400 \qquad W_1 = W_4 = 500$$

$$X_2 = 200 \qquad W_2 = W_3 = 0$$

que es exactamente la misma solución encontrada al resolver el problema primal original.

1.2.- Modelo general

Si expresamos el ejemplo anterior en su forma canónica, tendremos el modelo lineal (Primal):

$$\text{Max.}Z = cX$$

$$\left| \begin{array}{l} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{array} \right.$$

Al pasarlo nosotros a la forma dual, hicimos algunas transformaciones que, al final de cuentas, pueden resumirse en el modelo (Dual):

$$\text{Max.}(-G) = -b^T V$$
$$\left| \begin{array}{l} A^T V \geq c^T \\ V \geq 0 \end{array} \right.$$

Apoyándonos en las reglas de equivalencia, podremos escribir:

$$\text{Min.}G = b^T V$$
$$\left| \begin{array}{l} A^T V \geq c^T \\ V \geq 0 \end{array} \right.$$

donde:

G = Función objetivo dual,
b^T = Transpuesta del vector de términos independientes,
V = Vector columna de variables duales, de orden "m",
A^T = Transpuesta de la matriz de coeficientes tecnológicos,
c^T = Transpuesta del vector de contribuciones, y
0 = Vector columna de orden "m", cuyos elementos son cero.

Así, en el ejemplo anterior, hemos visto que al programa primal:

$$\text{Max.}Z = 30X_1 + 10X_2$$
$$\left| \begin{array}{l} 2X_1 + X_2 \leq 1{,}500 \\ X_1 + X_2 \leq 600 \\ X_1 \leq 400 \\ X_2 \leq 700 \\ X_i \geq 0, \forall i \end{array} \right.$$

correspondía un programa "Dual":

$$\text{Max.}(-G) = -1{,}500V_1 - 600V_2 - 400V_3 - 700V_4$$
$$\left| \begin{array}{l} 2V_1 + V_2 + V_3 \geq 30 \\ V_1 + V_2 + V_4 \geq 10.5 \\ V_i \geq 0, \forall i \end{array} \right.$$

que es equivalente a:

$$\text{Min.}G = 1{,}500V_1 + 600V_2 + 400V_3 + 700V_4$$
$$\left| \begin{array}{l} 2V_1 + V_2 + V_3 \geq 30 \\ V_1 + V_2 + V_4 \geq 10.5 \\ V_i \geq 0, \forall i \end{array} \right.$$

de esta última manera, la tabla óptima está dada por:

			-1,500	600	400	700	0	0	M	M
			V_1	V_2	V_3	V_4	W_A	W_B	U_1	U_2
400	V_3	39/2	1	0	1	-1	-1	1	1	-1
600	V_2	21/2	1	1	0	1	0	-1	0	1
		14,100	-500	0	0	-500	-400	-200	-M+400	-M+200

$Z_{máx} = G_{mín}$

Pregunta: ¿Debemos tomar en cuenta los signos negativos del renglón índice para determinar la solución del problema original? ¿Por qué?.

Generalizando, podemos establecer las siguientes relaciones entre el programa primal y el dual:

Si en el Primal tenemos:	en el Dual corresponde a:
$Max.Z = cX$	$Min.G = b^T V$
$Min.Z = cX$	$Max.G = b^T V$
$AX \leqslant b$	$A^T V \geqslant c^T$
$AX \geqslant b$	$A^T V \leqslant c^T$

2.- Dual asimétrico.

Llamaremos Dual asimétrico al método seguido para resolver por el Dual un programa lineal cuyas restricciones, en el programa Primal, incluyan relaciones de varios tipos ($\leqslant$, $\geqslant$ ó $=$).

Ejemplo:

$$Max.Z = 3X_1 + 6X_2$$

$$\left|\begin{array}{l} X_1 + 2X_2 \leqslant 8 \\ 2X_1 + X_2 \geqslant 4 \\ X_1 + X_2 = 6 \\ Xi \geqslant 0,\ \forall i \end{array}\right.$$

Se trata aquí de tener todas las restricciones de un solo tipo; Trataremos de hacerlo con ayuda de las reglas de equivalencia vistas anteriormente.

La primera restricción quedará : $X_1 + 2X_2 \leqslant 8$

La segunda restricción : $-2X_1 - X_2 \leqslant -4$

La tercera se descompone en dos :

$$X_1 + X_2 \leqslant 6$$
$$-X_1 - X_2 \leqslant -6$$

Obtenemos así la simetría quedando el programa lineal equivalente:

$$Max.Z = 3X_1 + 6X_2$$

$$\left|\begin{array}{l} X_1 + 2X_2 \leqslant 8 \\ -2X_1 - X_2 \leqslant -4 \\ X_1 + X_2 \leqslant 6 \\ -X_1 - X_2 \leqslant -6 \\ Xi \geqslant 0,\ \forall i \end{array}\right.$$

Procedemos ahora a aplicar nuestro criterio para pasar este programa a su forma Dual.

Teniendo el Primal en la forma $Max.Z = cX$ sujeto a $AX \leqslant b$, el Dual estará en la forma $Min.G = b^T V$, sujeto a $A^T V \geqslant C^T$, obteniendo así el programa :

$$Min.G = 8V_1 - 4V_2 + 6V_3 - 6V_4$$

$$\left|\begin{array}{l} V_1 - 2V_2 + V_3 - V_4 \geqslant 3 \\ 2V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \geqslant 6 \\ Vi \geqslant 0,\ \forall i \end{array}\right.$$

y resolviendo al aplicar el algoritmo Simplex se obtiene un resultado de:

$$X_1 = 4$$
$$X_2 = 2$$
$$Z_{máx.} = 24$$

Se recomienda al lector comprobar este resultado aplicando el algoritmo Simplex.

C. Teorema de dualidad.

Dado un programa lineal, y su correspondiente dual, de los siguientes casos uno, y sólo uno puede ocurrir:

1) Ambos tienen solución óptima, y sus funciones-objetivo respectivas son iguales, es decir que si X^* es el óptimo del Primal y V^* el óptimo del Dual, entonces $Z^* = cX^* = b^TV^* = G^*$.

2) Uno de ellos no tiene solución factible mientras que el otro -- tiene solución óptima no acotada.

3) En ninguna de sus formas (Primal o Dual) el programa lineal tiene solución.

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

C. Teorema de dualidad.

Dado un programa lineal, y su correspondiente dual, de los siguientes casos uno, y sólo uno puede ocurrir:

1) Ambos tienen solución óptima, y sus funciones-objetivo respectivas son iguales, es decir que si X^* es el óptimo del Primal y V^* el óptimo del Dual, entonces $Z^* = cX^* = b^T V^* = G^*$.

2) Uno de ellos no tiene solución factible mientras que el otro -- tiene solución óptima no acotada.

3) En ninguna de sus formas (Primal o Dual) el programa lineal tiene solución.

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

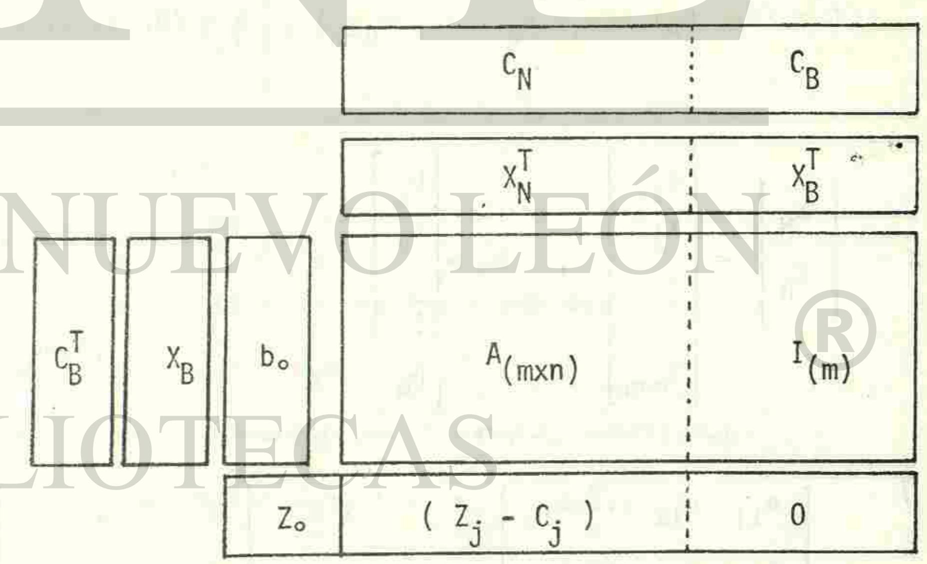
VII. ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Introducción.

En ocasiones, después de haber resuelto un programa lineal y aceptado sus resultados durante un cierto tiempo, podemos encontrar que las condiciones tomadas en cuenta para su solución, ya no son las mismas (han cambiado los costos, el proceso mismo, las disponibilidades, etc.). Volver a resolver el problema, sobre todo si es de gran tamaño, sería muy fastidioso y en ocasiones muy tardado; afortunadamente existen métodos que se ocupan de estos cambios "discretos" en programas lineales, los llamados métodos de Análisis de Sensibilidad. Los cambios "continuos" se estudiarán en una sección posterior.

El análisis de sensibilidad toma como punto de partida la tabla óptima (método Simplex) del problema original. Por esta razón creemos nosotros conveniente que el estudiante se familiarice y estudie a conciencia la división de la tabla Simplex que presentamos a continuación.

La primera tabla del Simplex, tal como la hemos estudiado en este curso, tiene la configuración siguiente[1]:



(1) Para fines de ilustración, hemos tratado de adoptar una nomenclatura relativamente simple con base a las exposiciones de diferentes autores.

...e:

C_N= Vector de contribuciones de las variables no básicas(vector fila),

C_B= " " " " " " básicas (vector fila de orden "m"),

X_N^T= Vector transpuesto de las variables no básicas,

X_B^T= " " " " " " básicas,

C_B^T= Vector transpuesto de C_B

X_B= Vector de variables de base (vector columna de orden "m"),

b_o= Vector original de términos independientes(de orden "m"),

Z_o= Valor inicial de la función objetivo,

A = Matriz (de orden "mxn") de coeficientes tecnológicos. Son los coeficientes de las variables que no están incluidas en la base.

I = Matriz identidad de orden "m",

(Z_j-C_j) =Vector fila de los elementos en el renglón índice, correspondientes a las variables no básicas,

0 =Vector fila de los elementos nulos en el renglón índice, correspondientes a las variables básicas.

Sabiendo que:

$$C = (C_N, C_B) = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+m}), \quad 0 = (0, 0, \ldots, 0),$$

$$X = \begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n+m} \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad Z_o = C_B b_o \tag{1}$$

$$(Z_j - C_j) = C_B A - C_N \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Distinguiremos en la parte central de la tabla inicial del Dimplex la matriz particionada $[A \mid I]$, que estará compuesta de "n+m" vectores columna, a los que llamaremos vectores "a_j". Así, esta primera tabla estaría formada de la manera siguiente:

			c_1	c_2	. . .	c_n	$c_{n+1} \cdots c_{n+m}$
			x_1	x_2	. . .	x_n	$x_{n+1} \cdots x_{n+m}$
c_{n+1} c_{n+2} $\vdots$ c_{n+m}	x_{n+1} x_{n+2} $\vdots$ x_{n+m}	b_1 b_2 $\vdots$ b_m	$[a_1]$	$[a_2]$	. . .	$[a_n]$	$[a_{n+1}] \cdots [a_{n+m}]$
		$C_B b_o$	(z_1-c_1)	(z_2-c_2)	. . .	(z_n-c_n)	$\ldots (z_{n+m}-c_{n+m})$

donde los vectores a_j son:

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n+m,$$

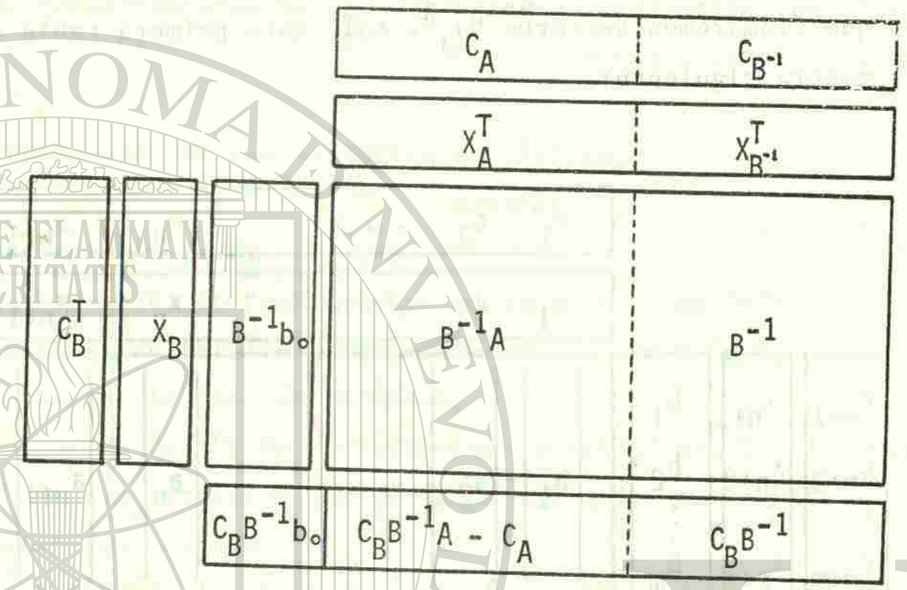
y los elementos del renglón índice son el resultado de:

$$(Z_j - C_j) = C_B A - C_N \tag{3}$$

que, tomando en consideración elemento por elemento, tendríamos:

$$(z_j - c_j) = C_B a_j - c_j \tag{4}$$

Puesto que con cada iteración se formará una nueva tabla, para las tablas siguientes (después de la primera iteración) haremos un ligero cambio la identificación de las partes de las mismas:



donde el vector X_B será :

$$X_B = \left[X_{Bi}\right] = \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{Bm} \end{bmatrix} ,$$

la matriz "B^{-1}" es la matriz inversa de "B", la matriz de base formada por los vectores "a_j" correspondientes a las variables básicas "X_{Bi}":

$$B^{-1} = \left[a_j\right]^{-1} , \quad j \in B ,$$

donde los vectores "a_j" están tomados de la tabla inicial.

El vector de términos independientes, diferente para cada nueva iteración, "b":

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} = B^{-1}b_o . \qquad (5)$$

Introduciremos aquí un nuevo vector, aquél formado por los elementos en el renglón índice, bajo la parte identidad. Lo llamaremos :

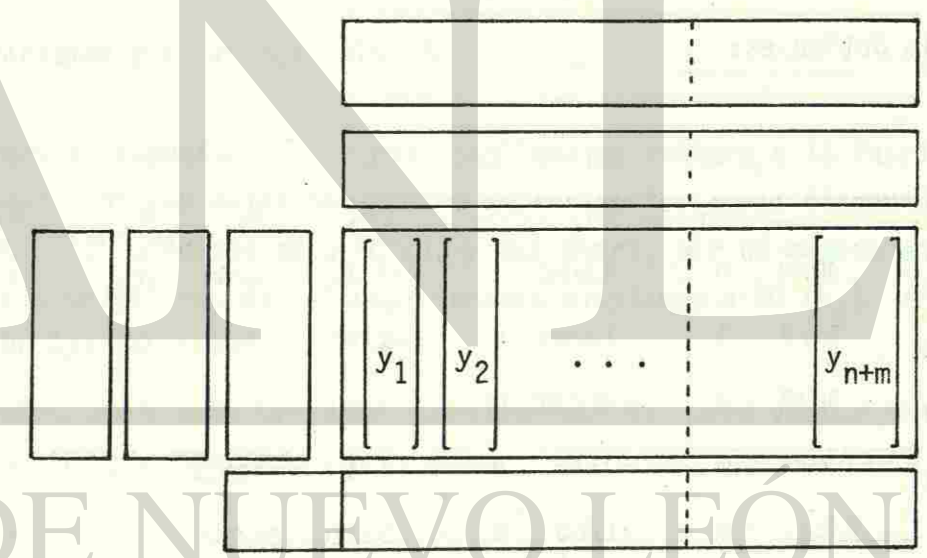
$$\pi = c_BB^{-1}. \qquad (6)$$

Este vector se puede utilizar para encontrar, en cualquier iteración:

a) $Z = \pi b_o$ (7)

b) $(z_j - c_j) = \pi a_j - c_j$ (8)

Identificaremos el contenido de la matriz, en cualquier iteración posterior, con los vectores " y_j" :



que varían con cada iteración, y cuyos elementos se pueden encontrar con la relación : $y_j = B^{-1}a_j$. (9)

Una vez comprendida la configuración matricial de las tablas del Simplex, veamos cómo podemos sacar provecho de sus propiedades.

1. Cambios discretos en los términos independientes (b_j)

Consideremos el programa lineal:

$$\text{Max. } Z = 15x_1 + 14x_2 + 16x_3$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 100 \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 100 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 100 \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \\ \qquad x_i \geq 0 \ , \ \forall \ i \end{array}\right.$$

cuya tabla óptima es:

			15	14	16	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4
16	x_3	40/3	0	41/60	1	3/20	-1/60	0	0
15	x_1	20/3	1	13/60	0	-1/20	7/60	0	0
0	w_3	80/3	0	-49/30	0	-7/10	-1/30	1	0
0	w_4	100/3	0	7/12	0	1/4	-11/12	0	1
		940/3	0	11/60	0	33/20	89/60	0	0

de donde:

$$b^* = \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 100/3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el vector original era:

$$b_o = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} ,$$

veamos lo que obtenemos al hacer la operación " $B^{-1}b_o$" :

$$B^{-1}b_o = \begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 100/3 \end{bmatrix} = b^*$$

que es exactamente el vector solución.

Aceptemos el supuesto de que este problema se refiere a la fabricación de tres productos que pasan por cuatro departamentos cuyas disponibilidades son iguales (100 unidades adecuadas), y que ahora, por un cambio en el proceso, la disponibilidad del 4° departamento disminuye a 90 (b_4). ¿ Cuál es la solución óptima ahora?

Para responder a esta pregunta, consideremos el nuevo vector "original" de términos independientes:

$$b_o' = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

que, al multiplicarlo por "B^{-1}" dará como resultado el vector solución correspondiente a la iteración actual (anteriormente óptima) del problema -- considerando el cambio:

$$b^{*'} = \begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 70/3 \end{bmatrix}$$

Vemos que "b_4^*" cambió de 100/3 a 70/3, lo que significa que el departamento 4 tendrá una holgura menor ($w_4 = 70/3$). Notemos que todos los elementos del nuevo vector son no negativos, por consiguiente es una solución factible, y sigue siendo óptima (el renglón índice no cambia) con una contribución máxima de:

$$Z^{*'} = C_B b^{*'} = (16,\ 15,\ 0,\ 0) \begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 70/3 \end{bmatrix} = 940/3 \;.$$

Supongamos ahora que en vez de una disminución, tenemos que, por un mejoramiento en el proceso, la disponibilidad del departamento 1 aumenta en un 50% su capacidad ($b_1' = 150$):

$$b_o' = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

y el vector en la última tabla sería:

$$b^{*'} = \begin{bmatrix} 125/6 \\ 25/6 \\ -25/3 \\ 165/2 \end{bmatrix} , \quad \text{con} \quad Z^{*'} = 2{,}375/6$$

que no podemos considerar como solución óptima, pues un elemento de la solución, $b_3^{*'}$, es negativo, que corresponde a la variable de holgura asignada al tercer departamento ($w_3 = -25/3$).

La tabla correspondiente es:

			15	14	16	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4
16	x_3	125/6	0	41/60	1	3/20	-1/60	0	0
15	x_1	25/6	1	13/60	0	-1/20	7/60	0	0
0	w_3	-25/3	0	-49/30	0	-7/10	-1/30	1	0
0	w_4	165/2	0	7/12	0	1/4	-11/12	0	1
		2375/6	0	11/60	0	33/	89/60	0	0

El procedimiento que utilizamos para llegar a esta tabla no fue el del algoritmo Simplex, sino una de sus propiedades, por lo tanto, podremos utilizar otra de sus propiedades (duales) para encontrar la tabla que correspondería normalmente a esta iteración si hubiésemos considerado el cambio a partir de la primera tabla.

Tratando de encontrar una solución básica factible, sacaremos de la base la variable negativa "w_3" (renglón clave), y buscamos la variable de entrada (columna clave) entre los cocientes positivos "b_3/y_{3j}", seleccionando como columna clave la correspondiente al menor de ellos:

$$\min_j \left[\frac{b_3}{y_{3j}} > 0 \right] = \min. \left[\frac{250}{49} , \frac{250}{21} , 250 \right] = \frac{250}{49}$$

La variable de entrada será entonces "x_2", y la tabla óptima, considerando el cambio en el vector original, resulta ser:

			15	14	16	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4
16	x_3	850/49	0	0	1	-1/7	-3/98	41/98	0
15	x_1	150/49	1	0	0	-3/70	11/98	13/98	0
14	x_2	250/49	0	1	0	1/7	1/49	30/49	0
0	w_4	1670/21	0	0	0	0	-91/98	35/98	1
		19350/49	0	0	0	11/7	145/98	11/98	0

2. Cambios discretos en las Contribuciones (c_j)

Los cambios en las contribuciones se pueden presentar de dos maneras: en la contribución de una variable básica, en cuyo caso puede variar el renglón índice y el valor de la F.O., y en la contribución de una variable no básica, lo que generaría una variación en su elemento índice. En ambos casos se puede presentar, o no, la necesidad de una nueva iteración.

2.1. Caso de una variable básica.

Tomemos de nuevo el ejemplo anterior y supongamos que, por una exigencia de calidad, la utilidad del producto "x_3" desciende a 15 en vez de 16 actuales. Como explicamos más arriba, este cambio afecta los valores del renglón índice y de la F.O., que pueden encontrarse como sigue:

$$Z' = C_B'B^{-1}b_\circ = C_B'b = (15,\ 15,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 40/3 \\ 20/3 \\ 80/3 \\ 100/3 \end{bmatrix} = 300 \qquad (7\ \text{bis})$$

y

$$(z_j - c_j)' = C_B'B^{-1}a_j - c_j \qquad (8\ \text{bis})$$

Tomando en cuenta que las variables básicas tienen un elemento índice -- igual a cero, podemos expresar el renglón índice de una manera más general:

$$(Z_j - C_j)' = C_B'B^{-1}N - C_N \quad , \quad j \notin B \qquad (1[illegible])$$

donde "N" es la matriz de vectores "a_j" correspondientes a las variables no básicas en la última tabla, extraídos de la primera tabla, conservando su orden de izquierda a derecha, y "C_N" es el vector de sus contribuciones.

En el caso que nos ocupa tenemos:

$$N = \left[\, a_2,\ a_4,\ a_5 \,\right] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_N = (c_2,\ c_4,\ c_5) = (\ 14,\ 0,\ 0\ )$$

entonces:

$$(Z_j - C_j)' = (15,\ 15,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 3/20 & -1/60 & 0 & 0 \\ -1/20 & 7/60 & 0 & 0 \\ -7/10 & -1/30 & 1 & 0 \\ 1/4 & -11/12 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (14,\ 0,\ 0\ )$$

$$= (3/2,\ 3/2,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - (\ 14,\ 0,\ 0\ )$$

$$= (\ 27/2,\ 3/2,\ 3/2\ ) - (\ 14,\ 0,\ 0\ )$$

$$= (\ -1/2,\ 3/2,\ 3/2\ )$$

Estos elementos índice de la nueva tabla pudieron haberse encontrado por la relación (8 bis), o por la relación (8), encontrando el nuevo vector - π .

La nueva tabla queda en la forma:

$$(z_7 - c_7) = \pi a_7 - c_7 = (3, 0, 0) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - 8 = -2$$

y la nueva tabla:

			9	10	8	0	0	0	8
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
9	x_1	50/3	1	2	3	1/3	0	0	2/3
0	x_5	115/3	0	1	7	-1/3	1	0	-2/3
0	x_6	40	0	2	2	0	0	1	4
		150	0	8	19	3	0	0	-2

que, efectuando las operaciones necesarias da una tabla óptima:

			9	10	8	0	0	0	8
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
9	x_1	10	1	5/3	8/3	1/3	0	-1/6	0
0	x_5	45	0	4/3	22/3	-1/3	1	1/6	0
8	x_7	10	0	1/2	1/2	0	0	1/4	0
		170	0	9	20	3	0	1/2	0

NOTA: El lector podrá ejercitarse en el Análisis de sensibilidad inventando cambios sobre los problemas propuestos, después de haberlos resuelto por el método Simplex.

APÉNDICE I

EXTRACTO Y CORRIDA DE UN PROGRAMA DEL ALGORITMO SIMPLEX

```
REM       ********************************************************
REM       *****                   " SIMPLEX "                  ****
REM       ********************************************************
REM       *****    Algoritmo Simplex de Programacion Lineal    ****
REM       *****     Version para microcomputadora APPLE IIe    ****
REM       ********************************************************
REM       **** Autor: Leopoldo J. Delgado Garza   Enero / 1984 ****
REM       ****           CENTRO DE EDUCACION CONTINUA/ FIME    ****
REM       ********************************************************
 DIM A(10,20),Y(10,20)
 DIM C(20),CB(10),B0(10),B(10),ZC(20),REN(10),XB(10)
 DIM SIG$(10),C$(20),A$(10,20),UTI$(20)
 REM          ****     Introduccion de datos       ****
 HOME
 HTAB 20: VTAB 12: INPUT "El nombre del problema es: ";PRO$: PRINT
 HOME : VTAB 8
 PRINT  TAB( 20)" Numero de restricciones";: INPUT " = ";M: PRINT
 PRINT  TAB( 20)"Numero de variables reales";: INPUT " = ";N: PRINT
H = 0:F = 0:IDEN = 0
 FOR I = 1 TO M: HOME : VTAB 10
 POKE 36,33: PRINT "Restriccion ";I: PRINT
 FOR J = 1 TO N
 POKE 36,30: PRINT "Coeficiente de X";J;: INPUT " = ";A(I,J)
 IF  SGN (A(I,J)) < 0 THEN A$(I,J) = " - ": GOTO 260
A$(I,J) = " + "
 NEXT J: PRINT
 POKE 36,25: PRINT "Tipo de restriccion ( <=, =  o  >= )  ";: INPUT S
 IG$(I): PRINT
 IF SIG$(I) = "=" THEN IDEN = IDEN + 1: GOTO 310
H = H + 1
 IF SIG$(I) = ">=" THEN F = F + 1
 POKE 36,26: PRINT "Termino independiente [b(";I;: INPUT ")] ";B0(I):
  PRINT
 HOME : NEXT I
COL = N + F + H + IDEN
 FOR J = (N + 1) TO COL:UTI$(J) = "0": NEXT J
 VTAB 10: HTAB 31
 PRINT "Funcion Objetivo": PRINT
 HTAB 30: INPUT "MAX  o  MIN ? ";FO$: PRINT
 FOR J = 1 TO N: POKE 36,27
 PRINT "Contribucion de X";J;: INPUT " = ";UTI$(J)
 IF  VAL (UTI$(J)) < 0 THEN C$(J) = " - ": GOTO 420
C$(J) = " + "
 NEXT J: PRINT : PRINT : HOME
 HTAB 17: VTAB 8: PRINT "La jmpresion de resultados sera :": PRINT
 PRINT : PRINT  TAB( 8)"1...............En impresora la 1a. y la ulti
ma tabla"
 PRINT  TAB( 8)"2...............En impresora todas las tablas"
 PRINT  TAB( 8)"3...............En pantalla 1a. y ultima tabla"
 PRINT  TAB( 8)"4...............En pantalla todas las tablas"
 PRINT : HTAB 35: PRINT "___";: HTAB 36: INPUT "";IMPRESI
```

```
490  REM        ****     Formalizacion del Problema      ****
500  HOME : VTAB 8: HTAB 5
510  PRINT "El problema ";PRO$;" es:": PRINT
520  PRINT TAB( 20);FO$;" Z = ";UTI$(1);"X1 ";
530  FOR J = 2 TO N: PRINT C$(J); ABS ( VAL (UTI$(J)));"X";J;
540  NEXT J: PRINT
550  PRINT TAB( 13)"Sujeto a: ";
560  FOR I = 1 TO M: HTAB 25
570  PRINT A(I,1);"X1 ";
580  FOR J = 2 TO N: PRINT A$(I,J); ABS (A(I,J));"X";J;
590  NEXT J: PRINT " ";: PRINT SIG$(I);" ";B0(I)
600  NEXT I: PRINT : PRINT : PRINT


860  REM          ***    Se completa el cuerpo y la identidad       ***
870 A = N + 1:I = 1
880  FOR J = (N + F + 1) TO COL
890  IF SIG$(I) = ">=" THEN A(I,A) = - 1:A = A + 1:UTI$(J) = "M"
900  IF SIG$(I) = "=" THEN UTI$(J) = "M"
910 A(I,J) = 1:I = I + 1
920  NEXT J
930  FOR I = 1 TO M
940  FOR J = 1 TO COL:Y(I,J) = A(I,J)
950  NEXT J: NEXT I
960  FOR J = 1 TO COL
970 C(J) =  VAL (UTI$(J)) - ((999999 * (FO$ = "MAX") - 999999 * (FO$ = "M
    IN")) * (UTI$(J) = "M"))
980  IF FO$ = "MIN" THEN C(J) = - C(J)
990  NEXT J
1000  FOR I = 1 TO M:XB(I) = (COL - M + I):B(I) = B0(I):CB(I) = C(XB(I))
1010  NEXT I
1020  GOSUB 1220: REM    a valor de F.O. y Reng. Ind.
1030  PRINT : PRINT : PRINT
1040  IF IMPRESI = 1 OR IMPRESI = 2 THEN  PR# 1
1050 CAMBIO = 50: GOTO 490
1060 S = 0: PRINT  TAB( 10);"PRIMERA TABLA: "
1070  GOSUB 1330: REM    Para imprimir tabla
1080  GOSUB 1630: REM     Optimalidad y Columna Clave
1090  ON S1 GOTO 1100,1170
1100  GOSUB 1330: REM    Impresion
1110  PRINT : PRINT :
1120  PRINT : PRINT  TAB( 30);"SOLUCION";SO$;" :": PRINT
1130  FOR I = 1 TO M: PRINT  TAB( 36)"X";XB(I);" = ";B(I)
1140  NEXT I
1150  PRINT  TAB( 40)"Z ";FO$;" = "; ABS (Z)
1160  GOTO 2030: REM   A "FIN"
1170  PRINT : PRINT SO$;" # ";S: PRINT
1180  GOSUB 1750: REM    A ITERACION

]
```

```
1630  REM    ***  SUBRUTINA " TEST DE OPTIMALIDAD Y COLUMNA CLAVE " ***
1640 A = ZC(1):K = 1
1650  FOR J = 2 TO COL
1660  IF ZC(J) < (A) THEN A = ZC(J):K = J
1670  NEXT J
1680  IF A < 0 THEN 1720
1690  PRINT : PRINT : PRINT
1700 SO$ = " OPTIMA ": PRINT  TAB( 10);"TABLA";SO$
1710 S1 = 1: GOTO 1740
1720 SO$ = "ITERACION"
1730 S = S + 1:S1 = 2
1740  RETURN
1750  REM                ****     SUBRUTINA DE ITERACION      ****
1760 RENG = 0
1770  FOR I = 1 TO M:REN(I) = 999999
1780  IF Y(I,K) > 0 THEN REN(I) = B(I) / Y(I,K): GOTO 1800
1790 RENG = RENG + 1
1800  NEXT I
1810  IF RENG = M THEN  PRINT  TAB( 20)"PROBLEMA SIN SOLUCION A LA ITERAC
     ION ";S: GOTO 2030
1820 A = REN(1):R = 1
1830  FOR I = 2 TO M
1840  IF REN(I) <  = (A) THEN A = REN(I):R = I
1850  NEXT I
1860  FOR I = 1 TO M
1870  IF I = R THEN 1920
1880 B(I) = B(I) - B(R) * Y(I,K) / Y(R,K)
1890  FOR J = 1 TO COL
1900  IF J <  > K THEN Y(I,J) = Y(I,J) - Y(I,K) * Y(R,J) / Y(R,K)
1910  NEXT J
1920  NEXT I
1930 B(R) = B(R) / Y(R,K)
1940 CB(R) = C(K):XB(R) = K
1950 RIN = Y(R,K)
1960  FOR J = 1 TO COL:Y(R,J) = Y(R,J) / RIN
1970  NEXT J
1980  FOR I = 1 TO M
1990  IF I <  > R THEN Y(I,K) = 0
2000  NEXT I
2010  GOSUB 1220: REM  RENG. IND. Y F.O.
2020  RETURN
2030  END
```

El nombre del problema es: 'PRUEBA'

Numero de restricciones = 3

Numero de variables reales = 4

Restriccion 1

Coeficiente de X1 = 3
Coeficiente de X2 = 6
Coeficiente de X3 = 9
Coeficiente de X4 = 2

Tipo de restriccion (<=, = o >=) ?<=

Termino independiente [b(1)] 50

Restriccion 2

Coeficiente de X1 = 1
Coeficiente de X2 = 3
Coeficiente de X3 = 10
Coeficiente de X4 = 0

Tipo de restriccion (<=, = o >=) ?<=

Termino independiente [b(2)] 55

Restriccion 3

Coeficiente de X1 = 0
Coeficiente de X2 = 2
Coeficiente de X3 = 2
Coeficiente de X4 = 4

Tipo de restriccion (<=, = o >=) ?<=

Termino independiente [b(3)] 40

Funcion Objetivo

MAX o MIN ? MAX

Contribucion de X1 = 9
Contribucion de X2 = 10
Contribucion de X3 = 8
Contribucion de X4 = 8

El problema 'PRUEBA' es:

MAX Z = 9X1 + 10X2 + 8X3 + 8X4
Sujeto a: 3X1 + 6X2 + 9X3 + 2X4 <= 50
1X1 + 3X2 + 10X3 + 0X4 <= 55
0X1 + 2X2 + 2X3 + 4X4 <= 40

Deseas cambiar algo ? (indica el No. de tu seleccion)

1..............Nada
2..............Contribuciones
3..............Terminos Independientes
4..............Coeficientes Tecnologicos (A(I,
5..............Desigualdades
6..............Objetivo (MAX o MIN)
7..............Todo

_____1

PRIMERA TABLA:

			9	10	8	8	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
0	X5	50	3	6	9	2	1	0	0
0	X6	55	1	3	10	0	0	1	0
0	X7	40	0	2	2	4	0	0	1
		0	-9	-10	-8	-8	0	0	0

ITERACION # 1

ITERACION # 2

ITERACION # 3

TABLA OPTIMA

			9	10	8	8	0	0	0
			X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
9	X1	9.99	1	1.66	2.66	0	.33	0	-.17
0	X6	45	0	1.33	7.33	0	-.34	1	[illegible]
8	X4	10	0	.5	.5	1	-.01	0	.25
		170	0	9	19.99	0	2.99	0	.5

SOLUCION OPTIMA :

X1 = 10
X6 = 45
X4 = 10
Z MAX = 170

APÉNDICE II

EXTRACTO Y CORRIDA DE UN PROGRAMA DEL ALGORITMO MONTANTE

```
]LIST-510

   REM      *********************************************************
   REM      *******             ALGORITMO MONTANTE              *****
30 REM      ***  Autor: Leopoldo Delgado Garza /   3 / III / 84    ***
40 REM      *********************************************************
50 REM      ****         Version Microcomputadora APPLE IIe         ****
60 REM      *********************************************************
70 REM      *******   Centro de Educacion Continua  /  F. I. M. E. *****
80 REM      *********************************************************
90 REM
100  DIM A(10,20),Y(10,10)
110  HOME : HTAB 20: VTAB 12
120  INPUT "Orden de la matriz a invertir ?";M
130 CAMBIO = 0
140  FOR I = 1 TO M
150  FOR J = (M + 1) TO 2 * M
160 A(I,J) = 0
170  NEXT J
180  NEXT I: PRINT
190  REM   ****          " Introduccion de la matriz "        ****
200  HOME : VTAB 9
210  FOR I = 1 TO M
220  FOR J = 1 TO M
230  HTAB 25
240  PRINT "Elemento  a";I;J;" : ";: INPUT A(I,J)
250 Y(I,J) = A(I,J)
260  NEXT J
270 A(I,(I + M)) = 1
280  NEXT I: PRINT
290  HOME : VTAB 12: HTAB 25: PRINT "Un momento por favor ..."
300 PAN = 1: REM  "" Pivote anterior ""
310  FOR K = 1 TO M:R = K
320  IF A(K,K) <  > 0 THEN 420: REM   ***   Prueba del pivote   ***
330 R = M * (K = M) + (R + 1) * (K < M)
340  IF A(R,K) <  > 0 THEN 370: REM    ***    a Intercambio de filas  ***
350  IF R = M THEN 820: REM  ** INVERSA NO EXISTE **
360  GOTO 330
370  REM   *****     " Intercambio  de  filas "      *****
380 CAMBIO = CAMBIO + 1
390  FOR J = 1 TO 2 * M
400 V = A(K,J):A(K,J) = A(R,J):A(R,J) = V
410  NEXT J
420  REM   ********          " Iteraciones "          ********
430  FOR I = 1 TO M
440  IF I = K THEN 490
450  FOR J = (K + 1) TO 2 * M
460 A(I,J) = (A(I,J) * A(K,K) - A(I,K) * A(K,J)) / PAN
470  NEXT J
480 A(I,K) = 0: IF I < K THEN A(I,I) = A(K,K)
490  NEXT I:PAN = A(K,K)
500  NEXT K
510  HOME : PRINT
```

```
Orden de la matriz a invertir ?4

          Elemento  a11 : ?2
          Elemento  a12 : ?0
          Elemento  a13 : ?1
          Elemento  a14 : ?3
          Elemento  a21 : ?2
          Elemento  a22 : ?-1
          Elemento  a23 : ?0
          Elemento  a24 : ?5
          Elemento  a31 : ?2
          Elemento  a32 : ?6
          Elemento  a33 : ?1
          Elemento  a34 : ?1
          Elemento  a41 : ?0
          Elemento  a42 : ?2
          Elemento  a43 : ?1
          Elemento  a44 : ?3

          Un momento por favor ...


La matriz original es :

          2        0        1        3
          2       -1        0        5
          2        6        1        1
          0        2        1        3


La Adjunta de la matriz es :

         18        4       10      -28
        -14        4       10        4
         58      -44      -14       20
        -10       12       -2       12


El determinante es : |A| = 64


La matriz inversa es :

      .2812     .0625     .1562    -.4375
     -.2188     .0625     .1562     .0625
      .9062    -.6875    -.2188     .3125
     -.1563     .1875    -.0313     .1875


Tienes otra matriz a invertir? NO
```

Apéndice III

Problemas propuestos

```
Orden de la matriz a invertir ?4

          Elemento  a11 : ?2
          Elemento  a12 : ?0
          Elemento  a13 : ?1
          Elemento  a14 : ?3
          Elemento  a21 : ?2
          Elemento  a22 : ?-1
          Elemento  a23 : ?0
          Elemento  a24 : ?5
          Elemento  a31 : ?2
          Elemento  a32 : ?6
          Elemento  a33 : ?1
          Elemento  a34 : ?1
          Elemento  a41 : ?0
          Elemento  a42 : ?2
          Elemento  a43 : ?1
          Elemento  a44 : ?3

          Un momento por favor ...


La matriz original es :

          2       0       1       3
          2      -1       0       5
          2       6       1       1
          0       2       1       3


La Adjunta de la matriz es :

         18       4      10     -28
        -14       4      10       4
         58     -44     -14      20
        -10      12      -2      12


El determinante es : |A| = 64


La matriz inversa es :

        .2812    .0625    .1562   -.4375
       -.2188    .0625    .1562    .0625
        .9062   -.6875   -.2188    .3125
       -.1563    .1875   -.0313    .1875


Tienes otra matriz a invertir? NO
```

Apéndice III

Problemas propuestos

Los problemas de la siguiente lista fueron extraídos o inspirados de los ejercicios propuestos por los autores de la mayoría de los libros que se listan en la bibliografía. Estos problemas pueden ser resueltos utilizando los diferentes métodos estudiados en el presente instructivo; El lector podrá usar su ingenio para practicar el tema de análisis de sensibilidad.

Con dos recursos escasos "R1" y "R2" (por ejemplo, capital y trabajo), se pueden elaborar dos productos distintos : "P1" y "P2". Para producir una unidad de "P1" necesitamos 8 unidades de "R1" y 2 unidades de "R2"; para producir una unidad de "P2" necesitamos 6 unidades de "R1" y 4 de "R2". Se cuenta con 20 unidades de "R1" y 10 unidades de "R2"; y se sabe que "P1" produce una utilidad de $18.00 mientras que "P2" produce una utilidad de $20.00.

Suponiendo que los valores dados son fijos para cualquier nivel de producción, se pide encontrar el nivel de producción de cada producto (nivel positivo de actividad), sin sobrepasar las limitaciones de recursos, de modo que se maximice la utilidad.

2] Para fabricar dos productos (A1 y A2), se utilizan tres máquinas : M1, M2 y M3, sin que sea necesario ajustarse a un orden. Los tiempos unitarios están dados en la siguiente tabla:

	M1	M2	M3
A1	11	7	6
A2	9	12	16

Tiempo necesario por unidad (en minutos)

Se supone que las máquinas no tienen tiempos muertos al esperar un producto que se esté procesando en otra máquina, ya que el orden de las operaciones es indiferente. Las horas disponibles para cada máquina, para una actividad de un mes son :

* 165 hrs. para la máquina M1
* 140 " " " " M2
* 160 " " " " M3

La utilidad que producen los artículos A1 y A2 por unidad producida es $ 90.00 y $100.00 respectivamente. En las condiciones señaladas anteriormente ¿Cuántas unidades de A1 y A2 se deben fabricar mensualmente para tener un beneficio total máximo?

MAQUINA / PRODUCTO	M1	M2	M3
A1	11	7	6
A2	9	12	16

Se supone que las maquinas no tienen tiempos muertos al esperar un producto que se este procesando en otra maquina ya que el orden de las operaciones es indiferente. Las horas disponibles para cada maquina, para una actividad de un mes son:

165 Horas para la maquina M1
140 Horas para la maquina M2
160 Horas para la maquina M3

La utilidad que producen los articulos A1 y A2 por unidad producida es \$0.90 y \$1.00, respectivamente. En las condiciones señaladas anteriormente. Cuantas unidades de A1 y A2 se deben fabricar mensualmente para tener un beneficio total maximo ?

3) Una compañía manufactura aparatos de televisión y radios; tiene 4 departamentos principales: de chasises, gabinetes, de ensamble, y de pruebas finales. las capacidades mensuales son las siguientes:

Departamento	Capacidad para Televisores		Capacidad para Radios
Chasis	1500	ó	4500
Gabinete	1000	ó	8000
Ensamble	2000	ó	4000
Prueba	3000	ó	9000

La contribución de la televisión es de \$30.00 Dólares cada una, la contribución del radio es de 15 Dólares cada uno.
Suponiendo que la compañía puede vender cualquier cantidad de los 2 productos, determínese la contribución óptima de producción.

4) Un agricultor quiere cultivar maíz y trigo en un terreno de 70 hectáreas, sabe que una hectárea puede rendir 30 toneladas de maíz o 25 toneladas de trigo. Cada hectárea requiere un capital de \$3,000.00 si se cultiva con maíz y de \$4,000.00 si se cultiva con trigo. El capital total disponible es de \$250,000.00. Las necesidades de agua de riego son 900 metros cúbicos por hectárea de maíz y 650 metros cúbicos por hectárea de trigo en octubre, y de 1200 y 850 metros cúbicos por hectárea de maíz y trigo, respectivamente en el mes de noviembre. La disponibilidad de agua en octubre es de 57,900 mts. cúbicos y en noviembre de 115,200 mts. cúbicos.

Si los precios de venta de maíz y trigo son \$4,500.00 y \$6,000.00 por tonelada respectivamente. Hay que determinar la cantidad de maíz y trigo que debe producirse para obtener el beneficio máximo.

5) Una madre desea que sus niños obtengan ciertas cantidades de elementos nutritivos de sus cereales de desayuno. Los niños pueden escoger entre comer tronados, dorados o una mezcla de los dos. De su desayuno deben obtener, cuando menos, de tiamina, 5 mg de niacina y 400 calorías. Una onza de tronados contiene 0.10 mg de tiamina, 1 mg de niacina y 110 calorías; una onza de dorados contiene 0.25 mg de tiamina, 0.25mg de niacina y 120 calorías. Una onza de tronados cuesta \$38.00 y una onza de dorados \$42.00. Encontrar el costo mínimo que satisfaga las necesidades.

6) Una panadería empieza el día con una provisión segura de harina, grasa, huevos, azúcar, leche y levadura.
Se especializa en hacer pan, pasteles, panecillos y galletas. Desea determinar cuánto debe hacer de cada producto para maximizar su utilidad. Las recetas están dadas en la tabla siguiente. (No hacemos caso de provisiones abundantes como son la sal, el agua, etc.).

Ingred.	Pan	Pastel	Panec.	Gallet.	Mats. primas Disponibles
Harina	3 tzas	12 tzas	9/2 tza	3/2 tza	15,000 tazas
Grasas	2 cuchs	12 cuchs	3 cuchs	4 cuchs	12,000 cuchs
Huevos	-	3	1	1	3,000 huevos
Azúcar	1/4 tza	3/2 tza	1/8 tza	1 tza	7,500 tazas
Leche	2 tzas	3/4 tza	1 taza	-	8,750 tazas
Levadura	1 paq.	-	1 paq.	-	9,000 paqs.
Utilidad	\$0.40	\$1.10	\$0.45	\$0.30	

Suponiendo que la panadería puede vender todo lo que produce, determine La cantidad que debe producirse de los productos para reportar la máxima utilidad.

7) Una compañía produce tres artículos A, B y C, de los tres materiales P1, P2, y P3 los tres productos usan unidades de los tres materiales de acuerdo con la siguiente tabla:

Materiales / Productos	P1	P2	P3
A	2	-	3
B	3	2	2
C	-	5	4

Las contribuciones unitarias de los tres productos son:

A	\$3.00
B	\$5.00
C	\$4.00

Y la disponibilidad de los tres materiales son:

Material	Cantidad disponible en unidades
P1	8
P2	10
P3	15

Determínese la mezcla óptima a producir de los productos

8] Una compañía fabrica cinco productos U, V, X, Y, y Z, los cuales fluyen atravez de 5 departamentos, Estampado, Formado, Rectificado, Esmerilado y Ensamble, requiriendo los siguientes tiempos de procesamiento.

Tiempo requerido (en horas)

Producto	Estampado	Formado	Rectificado	Esmerilado	Ensamble
U	1	1	2	-	1
V	1	-	.5	1	2
X	2	3	-	.5	1
Y	-	2	2	1	2
Z	.5	1	.5	2	1

La contribución de cada producto es la siguiente:

Producto	Contribucion por unidad (en dolares)
U	$ 8.00
V	$ 9.00
X	$13.00
Y	$15.00
Z	$ 7.00

El tiempo disponible en los diversos departamentos y el costo incremental estimado del tiempo ocioso son:

Departamento	Tiempo disponible (en horas)	Costo del tiempo de ocio por hora (en dólares)
Estampado	115	$12.00
Formado	100	$ 8.00
Rectificado	140	$ 3.50
Esmerilado	90	$30.00
Ensamble	110	$12.00

Determínese la mezcla óptima a producir de los artículos, que nos reporte una utilidad máxima.

] Una compañía elabora 3 productos A, B y C, empleando 7 materiales. Los requerimientos del material y las contribuciones de cada uno de los 3 productos son las siguientes:

Requerimientos de material por unidad

Producto	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
A	3	-	2	-	1	-	1
alternativa A	-	3	-	4	-	-	1
B	-	2	1	-	-	2	-
alternativa B	1		-	2	3	-	-
C	-	-	-	4	-	2	1
alternativa C	-	-	2	-	6	-	-

Producto	Contribución unitaria (en dólares)
A	$6.00
B	$5.00
C	$9.00

Las cantidades disponibles de cada material son:

P1	100	Unidades
P2	115	Unidades
P3	135	Unidades
P4	90	Unidades
P5	85	Unidades
P6	140	Unidades
P7	170	Unidades

Resuélvase el problema con el objetivo de maximizar la contribución.

10] Un granjero cría pavos, gallinas y patos. El costo de la crianza de una gallina, un pato y un pavo es de $150, $100, y $400 respectivamente hasta el momento de su venta. Las gallinas se venden a $300, los patos a $200 y los pavos a $550 c/u. Sabiendo que la granja puede alojar sólo 500 aves y que el granjero no desea tener más de 300 patos ala vez, ¿Cuántas aves de cada especie debe criar a fin de maximizar sus utilidades? ¿Qué pasa si los pavos solamente se pueden vender en $500 ?, ¿Debe criar gallinas si los pavos se venden en $600 ?

11] Con base en sólo dos alimentos, papas y carne, se desea obtener una dieta que debe tener los siguientes requerimientos mínimos diarios:

8 Unidades de carbohidratos
19 Unidades de vitaminas
7 Unidades de proteínas

Se sabe que el contenido de elementos dietéticos de las papas y de la carne es el siguiente:

	Unidad	
	Papas (100 gr)	carne (50 gr)
Carbohidratos	3	1
Vitaminas	4	3
Proteínas	1	3

Si los costos unitarios son de $10.00 para la unidad de papa y de $40.00 para la unidad de carne. Obtener la dieta que satisfaga los requerimientos a un mínimo de costo.

12] Cierta corporación tiene 3 plantas sucursales con capacidad de producción en exceso. Las tres plantas tienen los elementos necesarios como para producir determinado producto, y el gerente ha decidido usar parte de la capacidad de producción en exceso con tal fin.

Este producto puede hacerse en tres tamaños (grande, mediano y pequeño), que dan como resultado una utilidad unitaria neta de $140, $120 y $100 respectivamente. Las plantas 1, 2 y 3 tienen la capacidad de mano de obra y equipo en exceso como para producir 750, 900, y 450 unidades por día, de este producto respectivamente, sin importar el tamaño o la combinación de tamaños que se apliquen.

Sin embargo, el espacio de almacenamiento disponible para productos en proceso, también impone una limitación en las tazas de producción. Las plantas 1, 2, y 3 tienen 13,000, 12,000, y 5,000 pies cúbicos de espacio de almacenamiento disponible para productos en proceso, para un día de producción de este artículo.

Cada unidad de los tamaños grande, mediano y pequeño producida por día requiere de 20, 15 y 12 pies cúbicos respectivamente.

Los pronósticos de ventas indican que pueden venderse al día 900, 1,200 y 750 unidades de los tamaños grande, medio y pequeño respectivamente.

Con el fin de mantener una carga uniforme de trabajo entre las plantas, y conservar cierta flexibilidad, el gerente ha decidido que la producción adicional asignada a cada planta debe usar el mismo porcentaje de la capacidad de mano de obra y equipo en exceso.

El gerente desea saber cuánto debe producirse de cada uno de los tamaños en cada planta para maximizar las utilidades.

13] Supóngase que el departamento de policía ha pronosticado la demanda de carros-patrulla en la ciudad de México para el período que empieza a las 12 del medio día del 31 de Dic. y termina a las 12 del medio día del 1 de enero.

Las 24 horas han sido divididas en períodos de 4 horas, y la demanda tanto de carros-patrulla como de personal motorizado (2 personas por patrulla) están dados a continuación:

Horas del día	Carros-patrulla	Personal motorizado
12 a 16	300	600
16 a 20	400	800
20 a 24	500	1000
24 a 4	600	1200
4 a 8	400	800
8 a 12	200	400

El personal motorizado puede trabajar 8 hrs. consecutivas y se cuenta con un total de 4,000 individos.

Formule un programa lineal que encuentre el número mínimo requerido para satisfacer la demanda en cada período de 4 hr.

14] Una compañía de artículos electrónicos produce 3 líneas de productos para venderlos al gobierno: Transistores, micro módulos y circuitos armados.

Cuenta con 4 áreas de proceso: Producción de transistores armaduría de circuito; control de transistores y módulos, y prueba de circuitos y embalaje.

La producción de un transistor requiere:

0.1 horas de trabajo en producción de transistores
0.5 horas de trabajo en control de transistores y módulos
$10.7 en costo directo

La producción de un micromódulo requiere:

0.4 horas de trabajo en el área de armaduría de circuito
0.5 horas en el área de control de transistores y modulos
3 transistores
$10.5 en costo directo

La producción de un circuito armado requiere:

0.1 horas de trabajo en el área de armado de circuitos
0.5 horas en el área de prueba de circuitos y embalaje
1 transistor
3 micromódulos
$20.0 en costo directo

Cualquiera de los 3 productos se puede vender en cantidades ilimitadas con los precios de $20.00, $80.00 y $250.00 respectivamente.

Si hay 200 horas de producción en cada una de las 4 áreas en el mes próximo, ¿Cuál deberá ser el programa de producción a fin de obtener una ganancia máxima ?

15] Supóngase que el instituto nacional de desayunos escolares debe de satisfaser una demanda diaria de 500,000 desayunos para alumnos de escuelas primarias públicas en la ciudad de México.

Los desayunos consisten en huevos, leche, pan, **chocolate** fruta fresca (generalmente un plátano). La siguiente tabla da una descripción de las calorías, proteínas, carbohidratos, grasas, minerales y vitaminas de cada uno de los alimentos, así como los requerimientos promedios mínimos diarios para niños en edad escolar.

	Alimentos				
	1 Huevo	1 Vaso de leche	1 Pan bolillo	1 Barra chocolate	1 Plátano
Peso (grs.)	100.0	984.0	23.0	56.0	150.0
Calorías	150.0	660.0	60.0	290.0	85.0
Proteínas	12.0	32.0	2.0	2.0	1.0
Carbohidratos	--	48.0	12.0	44.0	23.0
Grasas (grs.)	12.0	40.0	1.0	6.0	--
Minerales:					
Hierro (mg)	2.3	0.4	0.4	0.6	0.7
Calcio (mg)	54.0	1140.0	16.0	72.0	8.0
Fósforo (mg)	205.0	930.0	25.0	115.0	44.0
Potasio (mg)	129.0	210.0	50.0	192.0	390.0
Sodio (mg)	122.0	75.0	125.0	47.0	1.0
Vitaminas:					
A (mg)	1180.0	1560.0	--	100.0	190.0
B1 (mg)	--	0.32	--	--	--
B2 (mg)	0.3	1.7	--	--	--
Niacina (mg)	--	0.8	0.3	--	0.7
C (mg)	--	6.0	--	--	10.0

Requerimientos promedios mínimos diarios para niños en una edad escolar (6 a 15 años) es:

Calorías	2000	unidades
Proteínas	50	grs.
Calcio	800	mg.
Hierro	10	mg.
Vitamina A	2500	unidades
Vitamina B1	.6	mg.
Vitamina B2	1.0	mg.
Niacina	11.0	mg.
Vitamina C	50.0	mg.

Se recomienda asímismo que las grasas no excedan los 100 gramos diarios, para evitar el colesterol. Los costos unitarios asociados con cada uno de los productos que forman los desayunos escolares son:

1 Pan bolillo	$ 3.00
1 Vaso de leche	$12.00
1 Barra de chocolate	$ 7.00
1 Plátano	$ 1.50
1 Huevo	$ 9.50

Formule un programa lineal que le permita al Instituto nacional de desayunos escolares determinar el número de huevos, panes-bolillos, vasos de leche, barras de chocolate y el número de plátanos que deben constituir un desayuno escolar primario diario tal que satisfaga la demanda diaria de desayunos.
Que los requerimientos mínimos promedios diarios de calorías, proteínas, minerales y vitaminas, no excedan los límites tolerables de grasas y se minimicen los costos.
El presupuesto diario del instituto es de $25´000,000.00.

16] Supóngase que una empresa de investigación de mercado desea obtener información acerca de las cuotas dadas en la primera columna de la siguiente tabla:

Tipo de unidad Familiar	Cuota	Probabilidad de respuesta en las visitas: Mañana	Tarde	Noche
Unipersonal	50	0.1	0.1	0.5
Matrimonios sin hijos	100	0.5	0.4	0.7
Matrimonios con hijos	150	0.75	0.6	0.9

¿Cómo se deben distribuir las visitas entre los 3 tipos de unidad familiar y las distintas partes del día, a fin de que se cumplan las cuotas señaladas con un mínimo de visitas, cuando los contratos con los agentes enumerados imponen las siguientes condiciones:

a).- El número de visitas de la mañana no debe de ser superior al de la tarde.
b).- El número de visitas de la noche no debe ser superior a la mitad de la tarde.?

17] Supóngase que una planta en San Luis Potosí (planta 1) fabrica un producto 1, que sirve como componente insumo para la fabricación de un producto final 2, en Monterrey y otro producto final 3, en Monclova.
Así mismo, el producto 3 requiere como insumo adicional al producto 2.
La capacidad mensual de producción de cada planta es:

Fábrica	Capacidad de producción
San Luis Potosí	200,000 unidades de producto 1
Monterrey	120,000 unidades de producto 2
Monclova	100,000 unidades de producto 3

La siguiente tabla da la cantidad de unidades 'i' reque--
-idas en la fabricación de una unidad 'j'.

Insumo necesario del	Para producir Producto 1	Producto 2	Producto 3
Producto 1	1	4	2
Producto 2	–	1	1
Producto 3	–	–	1

La demanda mensual mínima y máxima nacional para cada producto está dada a continuación:

	Venta mínima mensual	Venta máxima mensual
Producto 1	10,000	30,000
Producto 2	25,000	50,000
Producto 3	40,000	60,000

Además, por ley se debe de exportar al extranjero el 10% de la venta nacional mensual. Los costos unitarios de producción son de $300.00, $500.00 y $1,000.00 respectivamente para los productos 1, 2 y 3. Los cuales se venden en el mercado - nacional a $600.00, $1,000.00 y $1,500.00 y en el extranjero un 20% más caro, respectivamente.

Formule un programa lineal que determine la producción - mensual de los Productos 1, 2 y 3; tal que satisfaga todas las condiciones descritas anteriormente y maximice los ingresos provenientes de su venta nacional e internacional.

18] Supóngase que el banco de crédito al campesino tiene dos planes de inversión, a saber, el primero en el programa de - tierras de riego y el segundo en el programa de tierras de - temporal. El primer programa regresa un 30% de la inversión al final del año, mientras que el segundo plan regresa un 65% de la inversión, pero al término de dos años.

Los intereses recibidos en ambos planes son reinvertidos de nuevo en cualquiera de ambos planes. Formule un programa lineal que le permita al banco maximizar la inversión total - en un sexenio, si la inversión anual es de $1,000'000,000.00.

19] Un fabricante tiene 4 órdenes de producción, A, B, C y D.

La tabla que se incluye acontinuación indica el número de horas que se requieren para fabricar estas órdenes en c/u de los tres talleres de la industria, X, Y y Z. Es posible dividir las órdenes entre los talleres. (por ejemplo, parte de - la orden 'A' puede ser procesada en el taller X, parte en el taller Y y el resto en Z).

Taller	Horas necesarias para fabricar las órdenes A	B	C	D	Costo por hora en $	Horas disponibles
X	32	151	72	118	89	160
Y	39	147	61	126	81	160
Z	46	155	57	12[illegible]	84	[illegible]

El fabricante desea minimizar los costos de producción.

20] Un carpintero fabrica tres tipos de productos: Sillas, - Marcos y Bandejas. Su producción está limitada por las existencias disponibles de madera, cepillo y mano de obra.

Las relaciones que ligan los insumos y productos son los siguientes:

Insumos	Requerimientos por unidad Sillas	Marcos	Bandejas	Disponibilidades
Maderas	3	1	2	60
Cepillo	4	–	1	10
Mano de obra	2	1	1	20
Utilidad unitaria	$30	$20	$40	

Establezca el programa de producción óptimo, considerando que el carpintero quiere maximizar sus utilidades.

21] Una compañía petrolera tiene dos aditivos X e Y que se - mezclan con la gasolina de mejor grado. Después de un cuidadoso análisis se ha determinado las siguientes restricciones:

a).- Si se emplean más de un cuarto de litro de aditivo total es por carro-tanque, los aditivos forman depósitos perjudiciales en los carburadores.

b).- $2x + y$ no puede ser menor que 1/4, o la gasolina no tendrá su color distintivo (Un punto principal en las ventas).

c).- Medio litro de aditivo X añadirá 100 unidades equivalentes de octano por carro-tanque y medio litro del aditivo Y - añadirá 200 unidades equivalentes de octano por carro-tanque. El número total de unidades equivalentes por carro-tanque no puede ser menor a 60, a fin de asegurar los estándares de rendimiento.

d).- El aditivo X cuesta 150 dólares por medio litro y el aditivo Y cuesta 400 dólares por medio litro. Determínese gráficamente la mezcla óptima de aditivo; Compruébese algebraica-- mente los resultados y calcúlese el costo total por carro-tanque.

Para una cafetería que trabaja 24 horas se requieren las siguientes meseras:

Horas del día	número mínimo de meseras
2 - 6	4
6 - 10	8
10 - 14	10
14 - 18	7
18 - 22	12
22 - 2	4

Cada mesera trabaja 8 horas consecutivas por día. El objetivo es encontrar el número más pequeño requerido para cumplir los requisitos anteriores.

Formule el programa como un modelo de programación lineal.

23] La REVCO compañía tiene una pequeña fábrica situada en los alrrededores de una gran ciudad. Su producción se limita a dos productos industriales, Alfa y Beta.

El departamento de contabilidad de la empresa ha calculado las contribuciones de cada producto en $1,000.00 para el producto Alfa y $1,200.00 para el Beta. Cada producto pasa por tres departamentos de la fábrica. Los requerimientos de tiempo disponibles en cada departamento son los siguientes:

Departamento	Horas requeridas producto Alfa	Horas requeridas producto Beta	Horas disponibles este mes
1	2.0	3.0	1500
2	3.0	2.0	1500
3	1.0	1.0	600

Establezca el programa de producción óptimo que maximice las utilidades.

24] Una compañía debe producir 10,000 lbs. de una mezcla especial para un cliente. La mezcla se compone de los ingredientes X1, X2 y X3. X1 cuesta $80.00 la lb., X2 cuesta $100.00 la libra y X3 $110.00 la lb.

No pueden usarse más de 3,000 lbs. de X1, y por lo menos deberán usarse 1,500 lbs. de X2. Además se requieren por lo menos 2,000 lbs. de X3.

a).- Calcúlese el número de libras de cada ingrediente que habrá que emplear, a fin de reducir al mínimo el costo total de las 10,000 lbs.

b).- Calcúlese el costo total más bajo posible.

c).- ¿Hay libras sobrantes en el problema?.

25] Una compañía manufacturera está considerando la fabricación de una nueva línea de productos, compuesta de cuatro productos.

Cada producto puede fabricarse con dos métodos diferentes y completamente distintos, uno de los cuales consta de dos procesos y el otro de tres. Se fabricaran basándose en un segundo turno. El precio de venta de estos productos y sus costos variables, así como las cantides que probablemente pueden venderse, de acuerdo con el grupo de investigadores de mercadotecnia, son los siguientes:

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Precio de venta al mayoreo (40% de descto.)	$100	$150	$125	$140
Costo variable mtdo. A	$ 80	$135	$120	$135
Costo variable mtdo. B	$110	$150	$100	$110
Cantidad que puede venderse	1000	3000	4000	6000

La sección de manufactura de la empresa ha determinado que los tiempos de manufactura para cada proceso son los sig.

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Método 'A'				
Depto 20	3.0	3.6	2.0	3.5
Depto 21	9.0	10.0	8.0	9.0
Depto 22	1.0	1.0	0.5	0.5
Método 'B'				
Depto 31	4.0	4.0	2.0	4.0
Depto 32	5.0	8.0	4.0	3.0

Horas disponibles al mes

Departamento	Horas
20	15,000
21	50,000
22	8,000
31	10,000
32	10,000

¿Qué debe hacer la empresa en virtud de los tiempos de producción y de las posibles congestiones de producción, a fin de aumentar al máximo la contribución total mensual ?.

26] La maripo-sa ha seguido constantemente una política de fabricación de aquellos productos que contribuyen con la mayor cantidad a los costos fijos y a las ganancias. Sin embargo siempre se ha procurado producir los requerimientos mínimos semanales de ventas, que son los siguientes para los productos K, L, M y N:

Producto	K	25	unidades
Producto	L	30	unidades
Producto	M	30	unidades
Producto	N	25	unidades

Los requerimientos de producción y el tiempo disponible para la semana siguiente son:

	Tiempo requerido por prod. (horas) K	L	M	N	Tiempo disp. la semana prox. (horas)
Depto 1	0.25	0.2	0.15	0.25	400
Depto 2	0.3	0.4	0.5	0.3	1000
Depto 3	0.25	0.3	0.25	0.3	500
Depto 4	0.25	0.25	0.25	0.25	500
Contribución por unidad	$10.5	$9.00	$8.00	$10.00	

Actualmente la mezcla semanal de producción (considerando los requerimientos mínimos de venta), es de:

Producto	K	1533
Producto	L	30
Producto	M	30
Producto	N	25

a).-¿son la mezcla actual de productos y la contribución para la empresa las óptimas ?. En caso contrario¿cuáles deben ser ?.

b).-¿Qué recomendaciones deben hacerse a la empresa con respecto a las instalaciones de producción, basándose en las respuestas de (a) ?.

27] Un expendio de carnes de la ciudad acostumbra preparar la carne para albondigón con una combinación de carne molida de res y carne molida de cerdo. La carne de res contiene 80% de carne y 20% de grasa y le cuesta a la tienda $600.00 kilo; la carne de cerdo contiene 68% de carne y 32% de grasa y cuesta $500.00 por kilo. ¿Qué cantidad de cada tipo de carne debe emplear la tienda en cada kilo de albondigón, si se desea minimizar el costo y mantener el contenido de grasa no mayor de un 25% ?.

28] El pronóstico de ventas mensuales para un cierto producto está presentado en el siguiente cuadro:

	Unidades		
Enero	2,000	Julio	10,000
Febrero	3,000	Agosto	6,000
Marzo	4,000	Septiembre	4,000
Abril	6,000	Octubre	3,000
Mayo	8,000	Noviembre	2,000
Junio	10,000	Diciembre	2,000

El costo unitario de aumentar o disminuir la producción de un mes a otro es de $100.00 y $50.00 respectivamente.

La producción programada para el mes de diciembre de este año es de 2,000 unidades, y está calculado que el nivel inventario en enero 1 será de 1,000 unidades. La capacidad de almacenaje está limitada a 5,000 unidades.

Obtener la programación de la producción para el año entrante que minimice el costo producido al cambiar tazas de producción y asegure al mismo tiempo la disponibilidad de un stock suficiente para cubrir el pronóstico de ventas en cualquier momento (supóngase que la programación durante un mes justo esté disponible justo en el momento de cubrir la demanda de ventas en el mes corriente).

29] Se procesan tres productos através de tres operaciones diferentes. Los tiempos (en minutos) requeridos por unidad de cada producto y la capacidad diaria de operaciones (en minutos por dia) y el beneficio por unidad vendida de cada producto (en pesos) son como sigue:

Operación	Tiempo por unidad (minutos) Producto 1	Producto 2	Producto 3	Capacidad de operación (minutos/día)
1	1	2	1	430
2	3	-	2	460
3	1	4	-	420
Ganancias por unidad ($)	30	20	50	

Los tiempos cero indican que el producto no requiere la operación dada. Se supone que todas las unidades se venden.

Además los beneficios dados por unidad son valores netos que resultan después que se deducen todos los costos pertinentes. La meta del modelo es determinar la producción diaria óptima para los tres productos que maximice el beneficio.

30] Se procesan 4 productos sucesivamente en 2 máquinas. Los tiempos de manufactura en horas por unidad de cada producto se tabulan a continuación por las dos máquinas;

Máquina	Tiempo por unidad (horas) Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

El costo total de producir una unidad de cada prodcuto -á basada directamente en el tiempo de máquina. Supóngase que el costo por hora para la máquina 1 y 2 es de $ 150.00 y $ 200.00.

Las horas totales presupuestadas para todos los productos en las máquinas 1 y 2 son 500 y 380.

Si el precio de venta por unidad para los productos 1, 2, 3 y 4 es de $ 1,200.00; $ 1,400.00; $ 1,100.00, y $ 1,000.00, formule el problema como un modelo de programación lineal para maximizar el beneficio neto total.

31] Una tienda de quesos tiene 20 lbs. de una mezcla de frutas de estación y 60 lbs. de un queso caro, con los cuales se preparan dos tipos de queso para untar, fino y normal que son populares durante la semana de navidad.

Cada libra del queso fino para untar se compone de 0.2 lbs. de la mezcla de frutas, 0.3 lbs. del queso caro y 0.5 lbs. de un queso de relleno que es barato y del cual se tiene abundante reserva; el queso normal se compone de 0.1 lbs. de la mezcla de frutas, 0.3 lbs. del queso caro y de 0.6 de relleno. Debido a las políticas de precios empleadas en el proceso por la tienda, se sabe que la demanda para cada tipo de queso para untar depende de su precio, de la siguiente forma:

$$D1 = 150 - 25\ P1 \qquad y \qquad D2 = 250 - 50\ P2$$

Donde D denota la demanda (en lbs.), P denota el precio (en dólares por lb.), y los subíndices 1 y 2 se refieren respectivamente al queso para untar, fino y normal.

¿Cuántas libras de cada tipo de queso para untar deben prepararse y qué precios deben establecerse si se desea maximizar el ingreso y vender totalmente ambos tipos hacia el fin de la semana de Navidad ?

32] Una competencia de relevos de 400 mts. incluye a 4 diferentes nadadores, quienes nadan sucesivamente 100 mts. de dorso, de pecho, de mariposa y libre.

Un entrenador tiene 6 nadadores muy veloces, cuyos tiempos esperados (en segundos) en los eventos individuales se dan en la siguiente tabla:

	Evento 1 dorso	Evento 2 pecho	Evento 3 mariposa	Evento 4 libre
Nadador 1	65	73	63	57
Nadador 2	67	70	65	58
Nadador 3	68	72	69	55
Nadador 4	67	75	70	59
Nadador 5	71	69	75	57
Nadador 6	69	71	66	59

¿Cómo deberá el entrenador asignar los nadadores a los relevos, a fin de minimizar la suma de sus tiempos ?

33] Una importante compañía petrolera desea construir una refinería que recibirá suministros desde tres ciudades portuarias. El puerto 'B' está 300 kms. al este y 400 kms. al norte del puerto 'A', mientras que el puerto 'C' está 400 kms. al este y 100 kms. al sur del puerto 'B'.

Determínese la localización de la refinería, de tal manera que la cantidad total de tubería necesaria para conectar a la refinería con los puertos se minimice.

34] Fay Klein ha desarrollado 2 tipos de juegos de salón para adultos, hechos a mano, que vende a tiendas en todo el país.

Aunque la demanda de estos juegos excede su capacidad de producción, la sra. Klein continúa trabajando sola y limita su trabajo semanal a 50 horas.

El juego tipo 1 se produce en 3.5 hrs. y arroja una ganancia de $280.00, mientras que el juego 2 toma 4 hrs. para su producción y da una ganancia de $310.00. ¿Cuántos juegos de cada tipo deberá producir semanalmente la sra. Klein, si su objetivo es maximizar la ganancia total ?.

35] Una comunidad ha reunido $2'500,000.00 para desarrollar nuevas áreas de eliminación de desechos. Hay 7 sitios disponibles, cuyos costos de desarrollo y capacidades se muestran a continuación.

¿Qué sitios deberá desarrollar la comunidad ?, según la siguiente tabla:

Sitio	A	B	C	D	E	F	G
Capacidad ton/semana	20	17	15	15	10	8	5
Costo (miles $)	1,450	920	700	700	840	140	470

36] Un proveedor debe preparar con 5 bebidas de fruta en existencia, 500 galones de un ponche que contenga por lo menos 20% de jugo de naranja, 10% de jugo de toronja y 5% de jugo de mandarina. Si los datos del inventario son los que se presentan a continuación, ¿Qué cantidad de cada bebida de fruta deberá emplear el proveedor a fin de obtener la composición requerida a un costo total mínimo ?.

	Jugo de naranja %	Jugo de toronja %	Jugo de mandarina %	Exists. gals.	Costo $/gal
Bebida A	40	40	0	200	15.00
Bebida B	5	10	20	400	7.50
Bebida C	100	0	0	100	20.00
Bebida D	0	100	0	50	17.50
Bebida E	0	0	100	800	2.50

37] Una tienda de animales ha determinado que cada perro pastor alemán debería recibir diariamente al menos 70 unidades de proteína, 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasa. Si la tienda vende los 6 tipos de alimento mostrados en la siguiente tabla. ¿Qué mezcla de alimento satisface las necesidades a un costo mínimo para la tienda ?.

Alimento	Proteínas Us./onza	Carbohidratos Us./onza	Grasa Us./onza	Costo $/onza
A	20	50	4	2.00
B	30	30	9	3.00
C	40	20	11	5.00
D	40	25	10	6.00
E	45	50	9	8.00
F	30	20	10	8.00

38] Un Bufete de abogados ha aceptado 5 nuevos casos, cada uno de los cuales puede ser llevado adecuadamente por cualquiera de los cinco asociados más recientes. Debido a la diferencia en experiencia y práctica, los abogados emplearán distintos tiempos en los casos. Uno de los asociados más experimentados ha estimado las necesidades de tiempo (en horas) como sigue:

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
Abogado 1	145	122	130	95	115
Abogado 2	80	63	85	48	78
Abogado 3	121	107	93	69	95
Abogado 4	118	83	116	80	105
Abogado 5	97	75	120	80	111

Determínese la forma óptima de asignar los casos a los abogados, de manera que cada uno de ellos se dedique a un caso diferente y que el tiempo total de horas empleadas sea mínimo.

39] Para una dieta determinada, se consideran dos alimentos A1 y A2 con dos elememtos nutritivos medidos en calorías y gramos de proteína. Un kilo de A1 contiene 1000 calorías y 25 gramos de proteínas y un kilo de A2 contiene 2000 calorías y 100 gramos de proteínas.

La dieta debe contener 3000 calorías y 100 gramos de proteínas al día. Si el kilo de A1 vale $600.00 y el kilo de A2 vale $2,100.00. ¿Cuánto debe comprarse diariamente de A1 y A2 para satisfacer los requerimientos dietéticos a un costo mínimo ?.

40] Se conocen los siguientes datos técnicos y económicos de una economía:

a).- El sistema comprende tres sectores: (1), (2) y (3). Las industrias (1) y (2) poseen dos tecnologías alternativas para producir el mismo producto.

Los coeficientes de insumo de bienes y servicios de las actividades que comprende el sistema son los siguientes:

	Industria (1) tecnología 1.1	Industria (1) tecnología 1.2	Industria (2) tecnología 2.1	Industria (2) tecnología 2.2	Servicios (3)
	X1	X2	X3	X4	X5
1 Bienes agropecuarios	0.10	0.15	0.13	0.17	0.05
2 Bienes industriales	0.25	0.30	0.25	0.23	0.25
3 Servicios	0.20	0.20	0.15	0.20	0.20

b).- Los precios en moneda extranjera de la exportación e importación son:

	Bienes agropecuarios	Bienes industriales
Exportación	0.90	1.25
Importación (por origen)	1.10	1.50

c).- Capital y mano de obra especializada necesarias por unidad de producción:

	Industria (1) tecnología 1.1	Industria (1) tecnología 1.2	Industria (2) tecnología 2.1	Industria (2) tecnología 2.2	Servicios (3)
Capital (pesos por unidad de producción)	1.20	1.05	1.10	2.00	0.90
Mano de obra especializada (horas-hombre por unidad de producción)	0.80	1.50	0.90	0.30	0.40

d).- Demanda final interna que se debe satisfacer:

1. Bienes agropecuarios	800
2. Bienes industriales	400
3. Servicios	200

e).- El país puede endeudarse con 50 unidades monetarias extranjeras como máximo.

f).- Se ha determinado una disponibilidad de 1,200 horas-hombre para mano de obra especializada.

Plantear y resolver el modelo de programación lineal para minimizar el requerimiento de capital.

41] Una compañía desea mezclar una nueva aleación de 40% de …o, 35% de zinc y 25% de estaño, a partir de varias aleaciones disponibles que tienen las propiedades siguientes:

Propiedad	ALEACION 1	2	3	4	5
% de Plomo	60	25	45	20	50
% de Zinc	10	15	45	50	40
% de Estaño	30	60	10	30	10
Costo ($/lb.)	120	110	140	130	150

El objetivo es determinar las proporciones de estas aleaciones que deben mezclarce para producir la nueva aleación a un costo mínimo.

42] Una cierta corporación está planeando producir y lanzar al mercado tres productos diferentes. Denotemos por X1, X2 y X3 el número de unidades de los tres productos respectivos que van a producirse. Las estimaciones preliminares de su rentabilidad potencial son las siguientes:

Para las 15 primeras unidades fabricadas del producto 1, la utilidad unitaria sería aproximadamente $240.00. La utilidad unitaria sería únicamente de $20.00 para cualquier unidad adicional del producto 1. Para las primeras 20 unidades producidas del producto 2, la utilidad unitaria, se estima en $160.00. La utilidad unitaria sería de $80.00 para cada una de las siguientes 20 unidades y de $50.00 para cada unidad adicional. Para las primeras 10 unidades del producto 3, la utilidad unitaria sería de $300.00. La utilidad unitaria sería de $200.00 para cada una de las 5 unidades siguientes y de $120.00 para cualquier unidad adicional.

43] Un avión de carga tiene 3 compartimientos para almacenarla: Adelante, adentro y atrás. Estos compartimientos tienen límites de capacidad, tanto respecto al peso como al espacio según se resume a continuación:

Compartimiento	Capacidad en peso (toneladas)	Capacidad en espacio (pies cúbicos)
Adelante	12	7,000
al Centro	18	9,000
Atrás	10	5,000

Además, el peso de la carga en los compartimientos respectivos debe encontrarse en la misma proporción respecto a la capacidad en peso de ese compartimiento, para mantener el equilibrio del avión.

Se han ofrecido las cuatro cargas siguientes para embarque en un vuelo próximo, según se disponga de espacio:

Carga	Peso (tons.)	Volumen (pies cúbicos/tons.)	Utilidad ($/ton.)
1	20	500	2,200
2	16	700	2,800
3	25	600	2,500
4	13	400	2,000

Puede aceptarse cualquier proporción de estas cargas. El objetivo es determinar cuánto (si se acepta alguna) de cada carga debe aceptarse y cómo distrubuir cada una entre los requerimientos para maximizar la utilidad total obtenida por el vuelo.

44] 'Alimentos Balanceados, S.A.', compañía dedicada a la producción de forrajes, desea preparar una fórmula que contengan 100 g/kg. de proteínas y 100 g/kg. de grasa, como requerimiento mínimo. Para ello cuenta con las materias primas A, B, C y D que contienen según análisis, 190 g/kg., 200 g/kg., 190 g/kg. y 170 g/kg. respectivamente de proteínas; además, 160 g/kg., 180 g/kg., 100 g/kg. y 200 g/kg. respectivamente de grasa. Se usarán inertes como relleno, con un costo despreciable.

Si el costo por kg. de cada una de las materias primas es de $6.90, $9.80, $11.90 y $11.65 respectivamente.

¿Qué cantidades de A, B, C y D hay que mezclar para obtener los requerimientos de la formula con costo mínimo ?.

45] Cierto Hacendado dispone de los siguientes recursos para emplearlos en la próxima cosecha:

1).- $700,000.00 de capital disponible
2).- 1,000 horas-tractor
3).- 50 hectáreas de tierra cultivable

Estas tierras son propias para sembrar maíz, milo forrajero o frijol. Se supone que tiene a su disposición hombres suficientes y sin restricción, y sus costos de producción son los siguientes: Tractor e implementos, $500.00 hora; mano de obra, $50.00 hora; cada hectárea no sembrada $3,000.00.

Además, se supondrá un costo como pena, de $1.00 por cada peso no invertido. Los siguientes datos son por Hectárea.

Cosecha	Mano de obra hr.	Horas de tractor	Otros costos	Valor de la cosecha ha.
Maiz	10	20	$ 6,500	$ 130,000
Maiz milo	25	25	8,000	138,000
Frijol	30	15	12,000	141,000

46] Una empresa de ingenieros consultores debe diseñar, dibujar y calcar tres tipos de planos. Dispone de dos ingenieros dos dibujantes y un calcador en su oficina. El diseño del tipo A produce una contribución neta de $2,000.00, el B de $3,000.00 y el C de $1,500.00. La siguiente tabla muestra las restricciones en horas disponibles por mes:

		Horas disponibles	Tiempo requerido por diseno A	B	C
Ingeniero	I1	400	25	45	20
	I2	350	30	40	25
Dibujante	D1	250	10	12	10
	D2	250	15	18	8
Calcador	C1	300	5	5	5

Calcule el número de diseños de cada tipo que es necesario realizar para obtener la utilidad máxima.

47] Una pequeña fábrica produce bajo contrato partes de zapatos y botas de hule para algunas grandes empresas zapateras. Acaba de recibir un pedido para hacer las punteras y los tacones de 9,000 pares de botas. Una bota requiere una puntera y un tacón. El pedido debe entregarse en tres días. La empresa tiene dos talleres disponibles para formar las láminas de hule, y dispone de dos prensas para formar las piezas a partir de las láminas. Las piezas de hule de cualquier taller pueden dividirse entre las dos prensas. La información de producción es la siguiente:

	Taller 1 (m/min)	Taller 2 (m/min)	Prensa 1 (ciclos/min)	Prensa 2 (ciclos/min)
Punteras	2.5	2.0	2.0	1.5
Tacones	1.5	1.0	2.0	1.5

Cada ciclo forma cierto número de piezas, como sigue:

	Prensa 1 (piezas/ciclo)	Prensa 2 (piezas/ciclo)
Punteras	10	12
Tacones	7	8

La rapidez de alimentación de las prensas es:

Prensa 1	1 m/min
Prensa 2	1 m/min

Los costos correspondientes son los siguientes:

	Taller 1 (hora)	Taller 2 (hora)	Prensa 1 (hora)	Prensa 2 (hora)
Punteras	$150.00	$120.00	$ 70.00	$ 60.00
Tacones	150.00	100.00	140.00	90.00

La disponibilidad de las máquinas es la siguiente durante los tres próximos días:

Taller 1	18.0	horas
Taller 2	10.0	horas
Prensa 1	20.0	horas
Prensa 2	22.0	horas

Determine la mejor manera en que esta empresa pueda cumplir el pedido e indique cuál es la función de optimización.

48] Una gran empresa que fabrica postres empacados tiene la idea de producir un nuevo tipo de gelatina instantánea. Este nuevo producto se forma simplemente mezclando ciertas cantidades de 4 tipos de gelatina ya en producción. El nuevo tipo de gelatina debe llenar los siguientes requisitos:

(A) Contenido de sabor artificial: entre 4 y 5%
(B) Solubilidad: máximo 90 gr./lt.
(C) Temperatura de formación del gel: entre 40 y 45 °C
(D) Porcentaje de gelatina: máximo 80

Los cuatro ingredientes tienen las siguientes características:

	I	J	K	L
(A)	3	5	2	3
(B)	90	60	120	60
(C)	49	32	54	43
(D)	80	80	70	90

Los costos de producción de los ingredientes son:

I	$ 225.00/kg
J	221.00/kg
K	235.00/kg
L	215.00/kg

¿Cuál es la mejor combinación de estos materiales que resultará en el costo mínimo si se toman en cuenta sus características individuales ?. Suponga que todas esas características se combinan linealmente. Formúlelo en forma simplex y encuentre la solución.

49] En una planta, la demanda estimada para el próximo año es la siguiente:

1 trimestre: 15,000 unidades de 'A'
2° trimestre: 25,000 unidades de 'A'
3° trimestre: 40,000 unidades de 'A'
4° trimestre: 20,000 unidades de 'A'

En el almacén se cuenta con 10,000 unidades al iniciarse el período y se desea disponer de un inventario de 5,000 unidades, al finalizar el año. La producción durante el último trimestre del período anterior fue de 5,000 unidades.
Si el costo de aumento de la producción c1 = \$500.00 por unidad, el costo de disminución de la producción c2 = \$300.00 por unidad y el costo de almacenaje c3 = \$200.00 por unidad.
¿Qué cantidad deberá producirse en cada trimestre para minimizar costos de manejo de la producción ?.

50] Una empresa realiza dos procesos principales que constituyen su principal fuente de ingresos. Cada uno de esos procesos resulta en un subproducto residual que hasta la fecha ha sido desperdiciado sin utilidad alguna.
Los subproductos pueden ser recuperados y combinados a un costo de \$2.00 por kg. del subproducto X y de \$3.00 por kg. del subproducto Y. Los subproductos tienen las siguientes características:

	Subproducto X (%)	Subproducto Y (%)
Contenido de alfa	25	20
Contenido de beta	50	20
Contenido de gamma	8	3
Otros	17	57
Producción diaria (kg)	1,200	2,000

El subproducto Y todavía puede ser tratado a un costo adicional de \$5.00 por kg. Este tratamiento adicional reduce su peso en 50%. En esas condiciones tendrá las siguientes características:

Contenido de alfa	40%
Contenido de beta	40%
Contenido de gamma	6%
Otros	14%

La empresa tiene oportunidad de firmar un contrato para vender 2,000 kg. diarios de megalita a \$ 10.00 el kg..
La megalita tiene las siguientes especificaciones:

El contenido de alfa debe ser cuando menos de 30%.
El contenido de beta debe estar comprendido entre 35% y 45%.
El contenido de gamma no debe ser mayor del 6%.

¿Debe la empresa aceptar el contrato para vender 2,000 kg. por día de megalita ? Obtenga una solución de costo mínimo para la megalita y compárela con el precio de \$ 10.00.

51] Un fabricante de esquíes metálicos produce tres modelos:

Normal
Profesional
Competencia

Un análisis del mercado ha revelado las siguientes demandas para los tres modelos de esquíes:

Normales: Un esquí durable para principiantes o expertos. La demanda de este esquí es grande. Las ventas proyectadas son de, cuando menos, 30,000 pares por año, probablemente hasta 50,000. El precio sugerido por el fabricante para el tipo normal es de \$ 9,055.50, lo que permite un sobreprecio del 15% para ventas al menudeo sobre el precio de fábrica.

Profesional: Un esquí diseñado para esquiadores desde avanzados hasta expertos. Las ventas proyectadas están comprendidas entre 15,000 y 20,000 pares al año. Este tipo se vende al menudeo a \$ 10,170.50, con un sobreprecio del 15%.

Competencia: Como su nombre lo indica, este es un esquí diseñado para corredores, profesionales y expertos que piden lo mejor en esquíes. Las ventas proyectadas son del orden de 3,000 a 5,000 pares por año. El aumento sobre el precio de fábrica es del 20% y se vende al menudeo a \$ 10,850.00.

Los costos variables para cada tipo de esquíes son:

Normal	\$ 4,500.00
Profesional	4,800.00
Competencia	5,050.00

La producción de los esquíes requiere de cuatro operaciones:

Estampado de los marcos metálicos
Unión de los marcos alrededor del núcleo de plástico
Ensamble (durante el que se agregan las orillas, los extremos y otros aditamentos)
Acabado (durante el que se agrega una superficie de plástico fenólico en la parte superior, y de polietileno en la inferior)

Los tiempos de operación para los diferentes modelos y las capacidades de tiempo se dan a continuación. Suponga que producción anual se distribuye uniformrnente a lo largo de año de trabajo de 50 semanas.

	Estampado (min.)	Unión (min.)	Ensamble (min.)	Acabado (min.)
Normal	15	25	45	105
Profesional	15	30	60	120
Competencia	15	40	80	180
Cap. (hrs./sem.)	300	550	1,100	2,400

Además de fabricar esquíes, la compañía también reacondiciona esquíes gastados o dañados, cambiando las orillas, las guardas y los aditamentos y reacabando las superficies. Esta operación requiere de 30 minutos de tiempo de ensamble y de 45 minutos de tiempo de acabado. La demanda de reparaciones es constante a lo largo del año. La política de la compañía es que no se reparen más de 100 pares de esquíes por semana a causa de la disminución que se ocasiona en la capacidad de fabricación. Una reparación completa produce una contribución de $ 2,000.00 al costo fijo y a la utilidad.

Determine un programa de producción óptimo para la compañía.

APÉNDICE IV

RESPUESTA A ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Los tiempos de operación para los diferentes modelos y las capacidades de tiempo se dan a continuación. Suponga que la producción anual se distribuye uniformmente a lo largo de un año de trabajo de 50 semanas.

	Estampado (min.)	Unión (min.)	Ensamble (min.)	Acabado (min.)
Normal	15	25	45	105
Profesional	15	30	60	120
Competencia	15	40	80	180
Cap. (hrs./sem.)	300	550	1,100	2,400

Además de fabricar esquíes, la compañía también reacondiciona esquíes gastados o dañados, cambiando las orillas, las guardas y los aditamentos y reacabando las superficies. Esta operación requiere de 30 minutos de tiempo de ensamble y de 45 minutos de tiempo de acabado. La demanda de reparaciones es constante a lo largo del año. La política de la compañía es que no se reparen más de 100 pares de esquíes por semana a causa de la disminución que se ocasiona en la capacidad de fabricación. Una reparación completa produce una contribución de $ 2,000.00 al costo fijo y a la utilidad.

Determine un programa de producción óptimo para la compañía.

APÉNDICE IV

RESPUESTA A ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1.

$$\text{Max.}Z = 18x_1 + 20x_2$$

Sujeto a:

$$\left|\begin{array}{l} 8x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ \quad x_i \geq 0 \ , \ \forall i \end{array}\right.$$

Respuesta: Producir una unidad de "P1" y dos de "P2", con una utilidad máxima de \$ 58.00.

Problema 3.

Soluciones múltiples: Para una utilidad máxima de 60,000 USD, producir 500 televisores y 3,000 radios.
También: Producir únicamente 4,000 radios.

Problema 4.

Se obtiene un beneficio máximo sembrando 30has. con maíz y 40has. con trigo. Beneficio: \$ 9'800,000.00.

Problema 5.

La madre deberá incluir en el desayuno de los niños:

2 onzas y 2/9 de Dorados
4 " " 4/9 de Tronados

para tener un costo mínimo de \$ 262.22.

Problema 9.

Producto "A": producir 33unidades 1/3 con el proceso normal, y 4 con alterno.
Producto"B": producir 51.5 unidades con proceso normal.
Producto "C": producir 18.5 unidades con proceso normal, y 8.61 con alterno.

Contribución máxima: \$ 725.50.

Problema 10.

a) $Max.Z = 150x_1 + 150x_2 + 100x_3$

sujeto a: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ x_3 \leq 300 \\ x_i \geq 0 \ , \ \forall i \end{cases}$

Criar 500 pavos para una utilidad máxima de \$ 75,000.00.

b) Se tendrá que criar 500 gallinas para la utilidad máxima de \$ 75,000.00.

c) No. deberá criar 500 pavos para una utilidad de \$ 100,000.00.

Problema 12.

Grande: producir 516.66 unidades en la planta 1.
Mediano: producir 177.77 unidades en la planta 1 y 666.66 en la 2.
Pequeño: producir 166.66 unidades en la planta 2 y 416.66 en la 3.

Utilidad máxima: \$ 232,000.00.

Problema 14.

Sean las "x_i" la cantidad a vender de cada producto, entonces, el problema se expresa:

$$Max.Z = 9.3x_1 + 69.5x_2 + 230x_3$$

sujeto a: $\begin{cases} 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 \leq 200 \\ 0.4x_1 \qquad + 1.3x_3 \leq 200 \\ 0.5x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 \leq 200 \\ x_i \geq 0 \ , \ \forall i \end{cases}$

y se deberán producir:

400 transistores
300 micromódulos
100 circuitos armados

para una ganancia máxima de \$ 23,000.00 el mes próximo.

Problema 17.

Producir 200,000 unidades en San Luis; 69,250 unidades en Monterrey, y 44,000 unidades en Monclova.

Problema 19.

Orden "A": Procesar el 100% en el taller "X".
Orden "B": Procesar el 100% en el taller "Y".
Orden "C": Procesar el 100% en el taller "Z".
Orden "D": Procesar el 4.56% en el taller "X",
Procesar el 10.32% en el taller "Y" y
procesar el 85.12% en el taller "Z".

El costo mínimo alcanzado sería de \$ 29,726.74.

Problema 21.

(a la vuelta)

Problema 24.

a) 3,000 lbs. de "X1"; 5,000 lbs de "X2" y 2,000 lbs de "X3".
b) Costo mínimo: \$ 960,000.00.
c) Sí.

Problema 25.

Para una contribución mensual máxima de \$ 153,000.00 la empresa deberá fabricar:

1,000 unidades del producto 1 por el método "A"
3,000 " " " 2 " " " "A"
600 unidades del producto 3 por el método "A"
1,000 unidades del producto 3 por el método "B"
2,000 " " " 4 " " " "B".

Problema 27.

58.33% de carne de res y 41.67% de carne de cerdo para un costo mínimo de \$ 558.33 por Kilogramo de albondigón.

Problema 36.

Para un costo mínimo de \$ 1,252.90, el proveedor deberá utilizar:

0.4 galones de la bebida "B",
0.06 galones de la bebida "D" y
499.54 galones de la bebida "E".

Problema 39.

Para el costo mínimo de $ 2,250.00, la dieta diaria debe contener:

Alimento "A1": 2 Kilogramos.
Alimento "A2": 0.5 Kilogramos.

Problema 41.

Se logra un costo mínimo de $ 129.06 con la siguiente proporción:

Aleación 1 : 34.375%
Aleación 3 : 25%
Aleación 4 : 40.625%.

Problema 43.

Una distribución de máxima utilidad de $ 92,300.00 puede ser:

Comp. / carga	Adelante (tons)	Centro (tons)	Atrás (tons.)	Total (tons.)
1	-	13	-	13
2	22/3	5/3	-	9
3	-	-	5	5
4	14/3	10/3	5	13
Total	12	18	10	40

Problema 48.

La combinación óptima con el mínimo costo de $ 222.88 es:

Ingrediente I: 47.06%
Ingrediente J: 52.94%.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

Los libros enlistados aquí fueron consultados tanto para la redacción de este trabajo como para la inspiración de los problemas propuestos en anexo.

Se han marcado con un asterisco las obras recomendadas para un estudio - más profundo de la materia.

(1) AYRES
Matrices
Mc.Graw-Hill,Méx.,1969

(2) BUFFA, E. S.
Dirección de Operaciones
LIMUSA,Méx.,1977

(3) FRAZER, J. R.
Programación Lineal Aplicada
E.T.S.A.,Méx.,1972

*(4) GASS, S.I.
Programación Lineal
CECSA,Méx.,1981

(5) HILLIER, F. y LIEBERMAN, G.
Introducción a la Investigación de Operaciones
Mc.Graw-Hill,Méx.,1980

(6) KAUFMANN, A.
Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones (V. 1)
CECSA,Méx.,1979

(7) KLEIMAN, A. y KLEIMAN, E. de
Matrices: Aplicaciones matemáticas en Economía y Administración
LIMUSA,Méx.,1982

(8) MIZRAHI,A. y SULLIVAN,M.
Matemáticas finitas
LIMUSA,Méx.,1978

*(9) PEÑAFIEL, L.
Programación Lineal
Trillas,Méx.,1976

*(10) PRAWDA, J.
Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones (V. 1)
LIMUSA,Méx.,1981

(11) SASIENI,M.; YASPAN,A. y FRIEDMAN,L.
Investigación de Operaciones
LIMUSA,Méx,1982

(12) TAHA,H.A.
Investigación de Operaciones
R.S.I.,Méx.,1981

(13) THIERAUF,R. y GROSSE,R.
Toma de decisiones por medio de Investigación de Operaciones
LIMUSA,Méx.,1983

(14) TRUJILLO,J.J.
Elementos de Ingeniería Industrial
LIMUSA,Méx.,1970