Debido al efecto del interés sobre el dinero, es necesario especificar el momento en el cual se va a definir el valor de la utilidad; en este análisis se consideró que el valor de una utilidad se calculaba hasta el momento en el cual se termina el inventario correspondiente a la corrida.

El cálculo de la utilidad se lleva a cabo de la siguiente manera. (Ver programa 2 y Diagrama de flujo 1)

c.1 <u>Valor presente de los costos</u>.-

Se difieren a la fecha del arranque, todos los costos ocurridos desde el arranque hasta el día que termine la corrida; es decir, se calcula el valor presente de todos los costos.

Si el costo del día i se denomina C (i), entonces el valor presente de los costos de N días será:

$$\text{Valor presente de los costos} = \sum_{i=1}^{N} C(i)\ (1 + r)^{-i} \qquad (34)$$

en donde r es el interés diario.

Para simplificar la ecuación anterior, expandemos el binomio según el desarrollo de Newton:

$$(1 + r)^{-1} = 1 - ir + i(i + 1)\ \frac{r^2}{2}\ \ldots\ldots \qquad (35)$$

despreciando los términos con exponente mayor a 1, tenemos:

$$(1 + r)^{-i} = 1 - ir \qquad (36)$$

por lo tanto:

$$\text{Valor presente de los costos} = \sum_{i=1}^{N} C(i)\ (1 - i\ r) \qquad (37)$$

c.2 <u>Valor diferido de los ingresos</u>.-

Se difieren todos los ingresos correspondientes a la venta del producto hasta la fecha en que se termina de vender esa corrida; para realizar lo anterior se considera que la venta puede iniciarse el primer día de fabricación.

Si la demanda es constante y tiene un valor D y la duración del inventario es d, entonces el valor de los ingresos diferidos será:

Ingresos diferidos al día d después del arranque =

$$\sum_{i=1}^{d} vD\ (1 + r)^{d-i} \qquad (38)$$

donde v es el valor de venta de cada unidad de producción, y d será igual al valor total de la producción acumulada entre la demanda diaria.

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{N} P(i)}{D} \qquad (39)$$

donde P(i) es la producción del día i y N es la cantidad de días trabajados.

Para simplificar la ecuación 35, podemos hacer lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{d} vD(1+r)^{d} = vD(1+r)^{d} \sum_{i=1}^{d} (1+r)^{-i} \qquad (40)$$

$$= vD(1+rd) \sum_{i=1}^{d} (1+ri) \qquad (41)$$

la suma puede simplificarse de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{d} (1 - ri) = d - \sum_{i=1}^{d} ri \qquad (42)$$

$$= d - \frac{r\,d\,(d+1)}{2} = d\left(1 - \frac{r(d+1)}{2}\right) \qquad (43)$$

por lo tanto la ecuación 41 se reduce a la siguiente ecuación:

$$vD(1 + rd)\, d\left(1 - \frac{r(d+1)}{2}\right) \qquad (44)$$

eliminando los términos en los que r esté a un exponente mayor que 1 obtenemos:

$$vDd\left(1 + r\frac{(d-1)}{2}\right) = \text{Ingresos diferidos al día d.} \qquad (45)$$

c.3 Valor diferido de los costos.-

Se difiere el costo en valor presente hasta la fecha en que se termina el inventario.

El costo diferido hasta el día d será:

$$\text{Costo diferido al día d} = (\text{costo en valor presente}) \sum_{i=1}^{d} (1 + r)^{i} \qquad (46)$$

$$= (\text{costo en valor presente})\ d\left(1 + \frac{r(d+1)}{2}\right) \qquad (47)$$

Substituyendo la ecuación 37 tenemos:

$$\text{Costo diferido al día d} = d\left(1 + \frac{r(d+1)}{2}\right) \sum_{i=1}^{N} C(i)\,(1 - ir) \qquad (48)$$

c.4 Utilidad.-

Se calcula la utilidad en el día d como la diferencia entre los ingresos y los egresos diferidos a ese día.

$$\text{Utilidad (N)} = \text{Ingresos} - \text{Egresos} \qquad (49)$$

$$= vDd\left(1 + \frac{r(d-1)}{2}\right) - d\left(1 + \frac{r(d+1)}{2}\right) \sum_{i=1}^{N} C(i)\ (1-ir) \qquad (50)$$

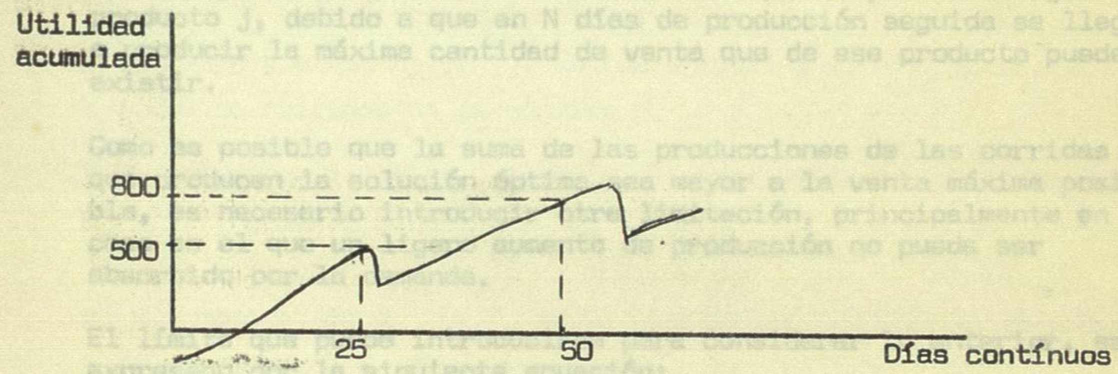
Este valor de utilidad se calculará para todos los valores de N posibles; es decir, mientras la producción no exceda el valor máximo de demanda anual del producto.

d) Asignación óptima de corridas.-

La función de utilidad obtenida en el inciso c.4, corresponde a la utilidad que se obtendría en caso de que se trabajara el producto durante N días seguidos, pero indudablemente que no representa la máxima utilidad que podría obtenerse de el producto si se le dedicaran N días del año, no en forma contínua, sino en varias corridas separadas.

Lo anterior se puede mostrar fácilmente con el siguiente ejemplo:

Supongamos que un producto tiene la siguiente curva de utilidad para cuando se trabaja una sola corrida contínua.



Puede deducirse de la gráfica anterior, que en caso de que a ese producto se le asignarán 50 días, no convendría hacer una sola corrida de 50 días con la cual se obtendrían 800 unidades de utilidad sino que sería mas conveniente hacer dos corridas de 25 días cada una, con las que se obtendría una utilidad de 1000.

Indudablemente que la segunda solución propuesta es mejor que la primera, pero no podemos estar seguros de que ésta sea la óptima, pues existen muchas otras combinaciones aún con dos corridas que podrían representar una utilidad mayor, quedando todavía la posibilidad de usar tres o más corridas con las que puede obtenerse una utilidad mas alta.

Si obtenemos la utilidad óptima para todas las posibles cantidades de días que pueden ser asignados al producto, tendremos una nueva función de utilidad por días asignados al producto.

Esta nueva función tiene implícito que para cada cantidad de días asignados, existe una determinada combinación de corridas que produce la utilidad óptima.

El procedimiento para encontrar esa nueva función de utilidad, así como las combinaciones que las producen, es el siguiente:

d.1 Planteamiento.-

Si $UT_j(m)$ es la utilidad que dá el producto j cuando se trabajan m días seguidos, entonces el valor de la utilidad máxima que podremos obtener del producto j, será dada por la siguiente ecuación:

$$U_j(N) = \underset{m_i}{\text{maximizar}} \sum_{i=1} UT_j(m_i) \qquad (51)$$

sujeta a los siguientes límites:

$$\sum_{i=1} m_i = N \qquad (52)$$

$$m_i \geq r \qquad (53)$$

en donde N es la máxima cantidad de días que se puede trabajar el producto j, debido a que en N días de producción seguida se llega a producir la máxima cantidad de venta que de ese producto puede existir.

Como es posible que la suma de las producciones de las corridas que producen la solución óptima sea mayor a la venta máxima posible, es necesario introducir otra limitación, principalmente en el caso en el que un ligero aumento de producción no pueda ser absorbido por la demanda.

El límite que puede introducirse para considerar lo anterior, es expresado por la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1} PU_j(m_i) \leq Dm_j \qquad (54)$$

En donde Dm_j es la demanda máxima anual del producto j, y PU_j es la producción de la corrida i del producto j obtenida en m_i días.

No se ha indicado límite para las sumas de las ecuaciones 51 y 54, debido a que éstas se realizarán hasta el valor de i en el que exista la primer corrida con cero días asignados para cualquier valor de N; este punto será visto mas claro en el siguiente inciso:

d.2 Procedimiento de cálculo.-

El problema consiste en maximizar la ecuación 51.

Como podemos observar, esta ecuación es bastante similar a la ecuación 1 del capítulo I, con la única diferencia en que ahora la ecuación 51 está formada por una suma de funciones iguales UT_j

Esta situación no es en sí una complicación, sino que al contrario, dá oportunidad de simplificar el cálculo de la solución.

En la tabla I, se muestra esquemáticamente el tipo de tablas que se obtienen al resolver este problema por el método de programación dinámica.

Puede demostrarse que en el camino de la solución óptima, no es posible que exista un cero intermedio, sino que éstos deberán existir concentrados al final, es decir, a la derecha de la tabla.

Esto se debe a que en caso de que exista un cero en la corrida r, quiere decir que no se localizó una combinación que produjera mas utilidad que en la corrida r-1 con la misma cantidad x_o de días; ahora supongamos que en la corrida r + 1 existiera un valor de $m_{r+1}(x_1) = x_1 - x_o$; esto no está de acuerdo con el hecho de que al calcular $m_r(x_1)$ obtendríamos ese valor de $x_1 - x_o$, y por lo tanto exigiría que $m_{r+1}(x_1)$, no fuera igual a $x_1 - x_o$ pues ese caso ya ha sido abarcado en la corrida r.

Para demostrar que $m_r(x_1)$ tendría el mismo valor de la supuesta $m_{r+1}(x_1)$, podemos basarnos en el hecho de que debido a la presencia del cero para $m_{r+1}(x_p)$, se origina que tanto el cálculo de $m_r(x_1)$ como el de $m_{r+1}(x_1)$, estén basados en la utilidad obtenida en r-1 corridas con x_o días; es decir $g_{r-1}(x_o)$.

Con base en lo anterior, ha sido posible eliminar considerablemente la cantidad de operaciones.

En el diagrama de flujo que se muestra, (ver diagrama de flujo 2) se ha indicado únicamente la parte relacionada con el proceso de cálculo con objeto de simplificarlo; por lo tanto, se han suprimido las ordenes de entrada y salida de discos y las rutinas o comparaciones para reducir o eliminar las operaciones inecesarias; además no se ha usado en todos los casos, la misma nomenclatura que en el programa. con objeto de simplificar la escritura en el diagrama de flujo.