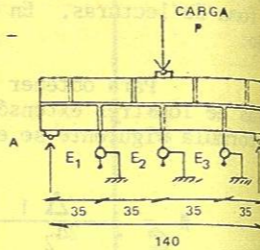


IMCYC DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS
- MAMPOSTERIA DE CONCRETO EN FLEXION -

Tabla 4

ELEMENTO No.	D-1-1
REF. LONGITUDINAL	1 Vw No. 4
REF. VERTICAL	1 Rama No. 2
REF. EN JUNTAS	2 Alambres No. 9
FECHA DE PRUEBA	16/VIII/74
EDAD	41 DIAS



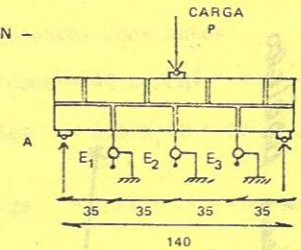
PUNT	CARGA P	E1	E2	E3	GIRO A	GIRO B	OBSERVACIONES
1	0	4.182	0.0303	3.130			
2	100	4.300	0.0308	3.240			
3	200	4.400	0.0312	3.340			
4	300	4.480	0.0314	3.410			
5	400	4.554	0.0317	3.480			
6	500	4.632	0.0320	3.560			
7	600	4.700	0.0323	3.630			
8	800	4.830	0.0328	3.750			
9	1000	4.947	0.0333	3.860			
10	1250	5.130	0.0340	4.020			
11	1500	5.298	0.0348	4.200			
12	1750	5.500	0.0357	4.400			
13	2000	5.690	0.0366	4.580			
14	2250	5.890	0.0375	4.770			
15	2500	6.080	0.0383	4.950			
16	2750	6.250	0.0390	5.120			
17	3000	6.440	0.0398	5.290			
18	3250	6.720	0.0409	5.550			
19	3500	6.842	0.0418	5.670			
20	3750	7.040	0.0429	5.850			
21	4000	7.260	0.0440	6.060			
22	4250	7.580	0.0452	6.320			
23	4500	7.990	0.0474	6.640			
24	4750	8.550	0.0502	7.120			
25	5000	10.150	0.0546	7.70			
26	5500	12.060	0.0625	9.15			
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							

CARGA MAXIMA
5860 Kg.

IMCYC DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS
- MAMPOSTERIA DE CONCRETO EN FLEXION -

Tabla 5

ELEMENTO No.	D1-1
REF. LONGITUDINAL	1 Varilla No. 4
REF. VERTICAL	1 Rama No. 2
REF. EN JUNTAS	2 Alambres No. 9
FECHA DE PRUEBA	16/VIII/74
EDAD	41 DIAS



PUNT	CARGA P	E1	E2	E3	GIRO A	GIRO B	OBSERVACIONES
1	0.000	0	0	0	0	0	
2	100	0.1180	0.127	0.110	0.0002	0.0002	
3	200	0.2182	0.2287	0.210	0.0004	0.0004	
4	300	0.2980	0.2794	0.280	0.0007	0.0005	
5	400	0.3720	0.3556	0.350	0.0008	0.0007	
6	500	0.4500	0.4318	0.430	0.0010	0.0010	
7	600	0.5180	0.500	0.500	0.0011	0.0011	
8	800	0.6480	0.6350	0.620	0.0014	0.0013	
9	1000	0.7650	0.7620	0.730	0.0017	0.0015	
10	1250	0.9480	0.9398	0.890	0.0020	0.0018	
11	1500	1.1160	1.1430	1.070	0.0024	0.0023	
12	1750	1.3180	1.3716	1.270	0.0029	0.0027	
13	2000	1.5080	1.6002	1.450	0.0034	0.0030	
14	2250	1.7080	1.8288	1.640	0.0039	0.0036	
15	2500	1.8980	2.0320	1.820	0.0043	0.0039	
16	2750	2.0680	2.7098	1.990	0.0046	0.0042	
17	3000	2.2580	2.4130	2.160	0.0050	0.0046	
18	3250	2.5380	2.6924	2.420	0.0056	0.0052	
19	3500	2.6590	2.9210	2.540	0.0061	0.0053	
20	3750	2.8580	3.2004	2.720	0.0063	0.0058	
21	4000	3.0780	3.4798	2.930	0.0066	0.0062	
22	4250	3.3980	3.7846	3.190	0.0077	0.0068	
23	4500	3.8080	4.3434	3.510	0.0085	0.0075	
24	4750	4.3680	5.0546	3.990	0.0100	0.0085	
25	5000	5.9680	6.1722	4.570	0.0133	0.0098	
26	5500	7.8720	8.1788	6.020	0.0178	0.0129	
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							

NOTA: LAS DEFORMACIONES (E1, E2 Y E3) EN MM.

CARGA MAXIMA
5860 Kg.

concreto 82.8 Kg/cm²
(5 das) mortero 55.0 Kg/cm²

DI-1

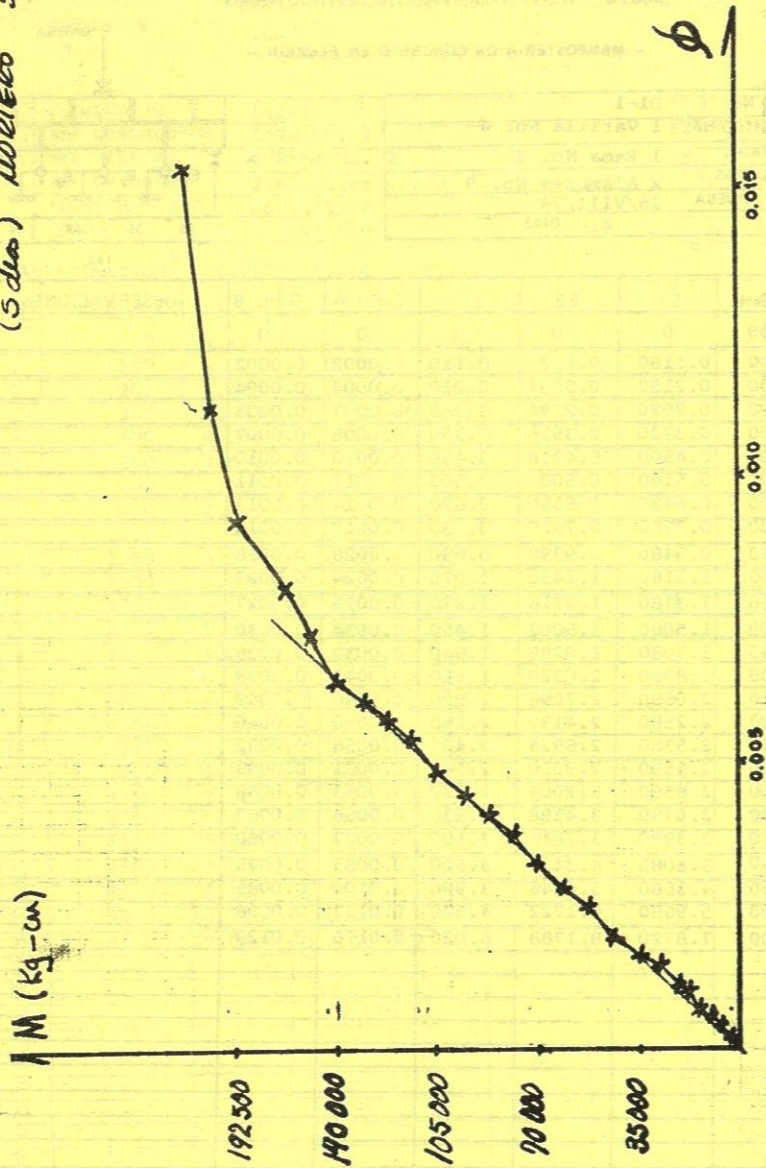


FIGURA 5

gún el caso- trabajan como una unidad.

- 7.- Las fuerzas externas están en equilibrio.
- 8.- El elemento es de eje recto y sección transversal constante.

El diseño fue seguido considerando las siguientes constantes:

- 1.- Esfuerzo máximo del bloque: $f'_{bloque} = 40 \text{ kg/cm}^2$
- 2.- Esfuerzo máximo en la viga: $f'_{viga} = 0.6 \times 40 = 24 \text{ kg/cm}^2$
- 3.- Esfuerzo permisible de compresión por flexión: $f_{viga} = 0.33 \times 24 = 8 \text{ kg/cm}^2$
- 4.- Esfuerzo permisible del refuerzo (horizontal y vertical) $f_s = 1400 \text{ kg/cm}^2$
- 5.- Relación modular: $n = \frac{2110}{f'_{viga}} = 88$

A continuación se presenta el cálculo de la carga elástica y revisión por cortante para las vigas de dos hiladas. Conviene subrayar que para las vigas de tres y cuatro hiladas, se siguió el mismo procedimiento.

Diseño viga de 2 hiladas

a) Cargas:

Peso de bloques completos: 1122 kg/m^3

Peso de bloques U: 1249 kg/m^3

Peso de huecos llenos de concreto

Completo: $.003263 \text{ m}^3 \times 1800 = 5.87 \text{ kg}$

Bloque U: $.002406 \text{ m}^3 \times 1800 = 5.33 \text{ kg}$

Pesos totales bloques + rellenos

Completo: $4 \times 9.5 + 4 \times 5.87 = 61.48 \text{ kg.}$

Bloques U: $4 \times 11 + 4 \times 4.33 = \frac{61.32 \text{ kg}}{122.80 \text{ kg}}$

Peso mortero: $0.001465 \text{ m}^3 \times 1800 = 2.63 \text{ kg.}$

Peso alambón: 2.63 kg.

Peso varilla: $\frac{1.70 \text{ kg}}{129.38 \text{ kg}}$

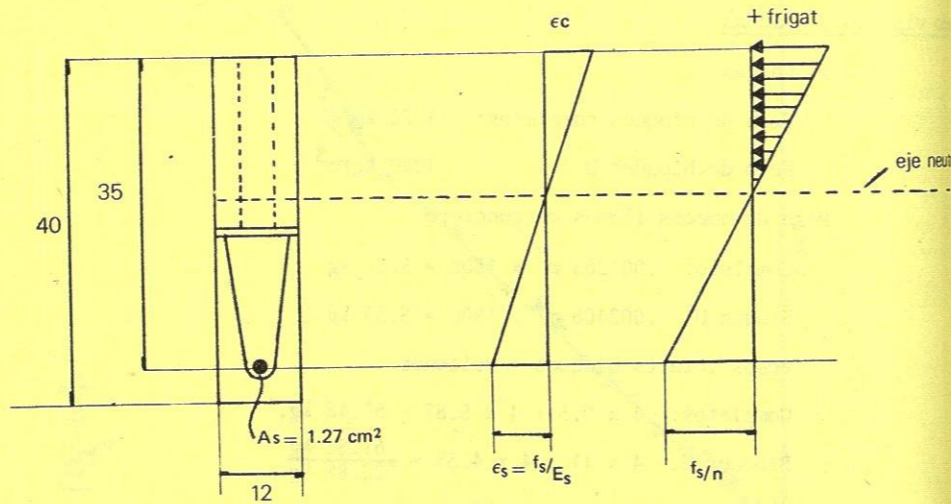
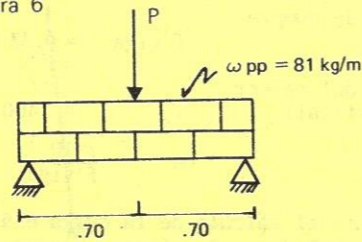
Carga repartida por peso propio: $\frac{129.38}{1.60} = 81. \text{kg/m}$

b) Flexión.

El momento en el centro del claro será: (figura 6).

$$M = \frac{0.7 P}{2} + \frac{81 \times 1.40^2}{8} = 0.35 P + 19.85$$

Figura 6



El momento resistente de la sección, según las hipótesis anotadas y con base en la figura 5, vale:

$$M_R = A_s f_s j d \quad \text{o bien} \quad M_R = \frac{1}{2} f_{viga} k j b d^2$$

Para valuar j, se parte de la expresión:

$$k = -np + \sqrt{(np)^2 + 2np}$$

$$p = \frac{AS}{bd} = \frac{1.27}{12 \times 35} = 0.0030; \quad np = 0.0030 \times 88 = 0.264$$

$$k = -0.264 + \sqrt{0.0696 + 0.528} = 0.51; \quad j = 1 - \frac{k}{3} = 0.83$$

Suponiendo falla por tensión:

$$M_R = A_s f_s j d = 1.27 \times 1400 \times 0.83 \times 35 = 51650 \text{ kg-cm}$$

Suponiendo falla por compresión:

$$M_R = \frac{1}{2} f_{viga} k j b d^2 = 0.5 \times 8 \times 0.51 \times 0.83 \times 12 \times \frac{35^2}{2} = 24890 \text{ kg-cm}$$

Se ve que la falla es por compresión, y $M_R = 24890 \text{ kg-cm}$

la carga correspondiente se obtiene al hacer $M_R = M$

$$P = (248.90 - 19.85) / 0.35 = 654 \text{ kg.}$$

c) Cortante.

$$v = \frac{654}{2} + \frac{81 \times 1.4}{2} = 383.7 \text{ kg}; \quad v = \frac{383.7}{12 \times 35} = 0.914 \text{ kg/cm}^2$$

Si no se tiene refuerzo:

$$v_{perm} = 0.02 \times 24 = 0.48 \text{ kg/cm}^2$$

Si el refuerzo toma todo el cortante:

$$v_{perm} = 0.05 \times 24 = 1.2 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_{perm(sin)} < v < v_{perm(con)}$$

La conclusión a que se llegó, es la de que se necesitan estribos, y la sección es aceptable.

$$s = \frac{A_y f_y}{v b} = \frac{0.32 \times 1400}{0.926 \times 12} = 40.5 \text{ cm.}$$

Del valor correspondiente al cortante con refuerzo, se desprende que las vigas con estribos en cada hueco, podrán desarrollar su resistencia elástica a flexión; las que no tienen este refuerzo encontrarán que, su comportamiento elástico estará regido por la fuerza cortante.

A continuación se calculan las cargas elásticas máximas por cortante para los tres tipos de vigas. Para las vigas con estribos de una rama en cada hueco, de $s = 20 \text{ cm}$, el esfuerzo cortante correspondiente será:

$$v = \frac{0.32 \times 1400}{20 \times 12} = 1.86 > 1.2$$

Como este valor es mayor que $0.05 f'_{\text{viga}}$, el cortante máximo que puede soportar la viga es: $V = 1.2 \times 12 \times 35 = 503 \text{ kg.}$
 y la carga máxima: $P = (503 - 56.7)2 = 892.6 \text{ kg.}$

Para las vigas con estribos de dos ramas en cada hueco:

$$v = \frac{0.64 \times 1400}{20 \times 12} = 3.72 > 1.2$$

Por lo que la carga máxima es igual a la anterior, o sea: 892.6 kg

Para las vigas sin estribos: $v = 0.02 f'_{\text{viga}} = 0.48$

$$v = 0.48 \times 12 \times 35 = 201.6 \text{ kg} ; P = (201.6 - 56.7)2 = 289.8 \text{ kg.}$$

Cargas máximas.

Los reglamentos para el diseño de mamposterías, sólo consideran el criterio por esfuerzos de trabajo. Nosotros pensamos que esto se debe al desconocimiento del comportamiento de la mampostería, vista como la combinación de varios materiales: bloques, mortero, concreto fluido y acero de refuerzo, cuando los esfuerzos están próximos a los máximos que pueden soportar los materiales componentes.

Para lograr la aplicación del criterio de resistencia en el diseño de elementos de mampostería de concreto, es necesario efectuar una serie de programas de investigación que permitan conocer dicho comportamiento. Por esto, una de las finalidades del presente estudio es la de investigar hasta dónde se puede predecir la carga máxima o de falla en las vigas de mampostería.

Se calcularon las cargas máximas para cada tipo de viga siguiendo el procedimiento y recomendaciones de ACI-318.71 para elementos de concreto reforzado. El siguiente es el cálculo de las cargas máximas teóricas por flexión y las revisiones por cortante y aplastamiento para las vigas de dos hiladas. Las cargas correspondientes a las vigas de tres y cuatro hiladas se obtuvieron siguiendo el mismo procedimiento.

Cálculo de la carga máxima: viga de 2 hiladas.

a) Flexión.

Se parte de la expresión: $M_u = bd^2 \rho f_y (1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c})$ con $\rho =$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = 0.003 ; f_y = 3200 \text{ kg/cm}^2 ; f'_c = f'_{\text{viga}} = 24 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_u = 12 \times 35^2 \times 0.003 \times 3200 (1 - 0.59 \frac{0.003 \times 3200}{24}) = 107816 \text{ kg-cm}$$

$$\therefore P_u = (1076.16 - 19.85) / 0.35 = 3024 \text{ kg.}$$

b) Cortante.

$$V_u = \frac{3024}{2} + \frac{81 \times 1.4}{2} = 1568.7 \text{ kg} ; V_u = \frac{1568.7}{12 \times 35} = 3.735 \text{ kg/cm}^2$$

El esfuerzo cortante permisible se puede valorar con la siguiente presión:

$$0.5 \sqrt{f'_c} \text{ haciendo } f'_c = f'_{\text{viga}}$$

$$0.5 \sqrt{f'_{\text{viga}}} = 0.5 \sqrt{24} = 2.45 \text{ kg/cm}^2$$

Como el valor es menor que el cortante total, es de esperarse que las vigas con refuerzo transversal desarrollen su resistencia máxima a flexión; las que no cuenten con dicho refuerzo, alcanzarán antes su resistencia máxima por cortante.

A continuación, se calculan las cargas máximas o de falla, suponiendo solamente el efecto de la fuerza cortante:

b. 1. Para las vigas con estribos de una rama: $S = 20 \text{ cm.}$

$$v_u = \frac{Avfv}{sb} + 2.45 = 5.81 \text{ kg/cm}^2$$

Este valor no debe ser mayor de $1.5 \sqrt{f'_{\text{viga}}} = 7.35 \text{ kg/cm}^2$

$$\text{Se tiene que } v_u = 5.81 \text{ kg/cm}^2, V_u = 5.81 \times 12 \times 35 = 2440 \text{ kg.}$$

$$\text{y finalmente } P_u = (2440 - 56.7)2 = 4766.6 \text{ kg.}$$

b. 2. Para las vigas con estribos de dos ramas: $S = 20 \text{ cm,}$

$$A_v = 0.64 \text{ cm}^2$$

$$v_u = \frac{Avfv}{sb} + 2.45 = 9.17 \text{ kg/cm}^2$$

Como este valor es mayor que $1.5 \sqrt{f'_{\text{viga}}}$, se toma

$$v_u = 7.35 \text{ kg/cm}^2, \text{ y } V_u = 7.35 \times 12 \times 35 = 3090 \text{ kg}$$

$$\text{finalmente } P_u = (3090 - 56.7)2 = 6066.6 \text{ kg.}$$

b. 3. Para las vigas sin estribos:

$$v_u = 0.5 \sqrt{f'_{\text{viga}}} = 2.45 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_u = 2.45 \times 12 \times 35 = 1029 \text{ kg}$$

$$P_u = (1029 - 56.7)2 = 1944.6 \text{ kg.}$$

c) Ancho del apoyo:

El área requerida para apoyo es:

$$A_{\text{req}} = \frac{V_u}{v_u} = \frac{1568.7}{20.4} = 76.9 \text{ cm}^2$$

Como el ancho de la viga es 12 cm, el ancho del apoyo debe ser por lo menos de: $\frac{76.9}{12} = 6.4 \text{ cm.}$

Para el punto de aplicación de la carga central se usó una placa con un ancho de 15 cm.

Comparación de cargas calculadas y cargas de ensaye.

Para poder comparar los resultados de las pruebas con los valores calculados, se construyó la tabla 6. Esta misma tabla sirve para sacar conclusiones sobre el comportamiento de los distintos tipos de vigas utilizadas; desafortunadamente, en la fecha en que se requirió este reporte aún no se tenían procesados los datos para que todas las vigas de cuatro hiladas. Sin embargo, gracias a que todos los especímenes habían sido ensayados a la fecha, en las conclusiones se hace una mención comparativa de los tres tipos de vigas.

Conclusiones de la investigación.

Los datos anotados en la tabla 6, permiten realizar algunas observaciones acerca de la influencia de las variables que se han considerado. Las más importantes son las siguientes:

Número de hiladas.- Las cargas elásticas y máximas, tanto calculadas como de ensaye, se incrementaron más o menos en proporción directa al número de hiladas. Esto significa que el momento resistente se incrementa, al aumentar el número de hiladas. Por consiguiente, si tomamos como ejemplo un dintel, cuanto más hiladas se pueden considerar como efectivas para resistir cargas que producen flexión. Lo anterior indica que se puede reforzar el mismo muro -utilizando bloques tipo U- para formar el dintel, evitando cerramientos y traves y, por lo tanto, ahorrando cimbra y tiempo de construcción.

Sin embargo, queremos insistir en que la falla de todas las vigas estuvo regida por la compresión en los bloques, no obstante que se utilizaron porcentajes muy pequeños de acero de refuerzo. Con la utilización de bloques de mayor resistencia, junto con mortero y concreto fluido compatibles con la misma, podrán lograr vigas de bloques que funcionen y se comporten en forma similar a bloques de concreto reforzado.

Refuerzo horizontal en las juntas de mortero.- Las cargas elásticas y máximas reales de las vigas con refuerzo horizontal, se incrementaron en una poca apreciable en relación con las que no lo tenían. Este incremento resulta más notable en las vigas de tres y cuatro hiladas que en las de dos, lo cual se explica por la posición del eje neutro con respecto al alambre de alta resistencia usado en las juntas.

Forma del refuerzo por cortante. Todas las vigas con estribos tuvieron un comportamiento dúctil. La ductilidad se incrementó notablemente en las vigas con estribos de dos ramas, en relación con las vigas con estribos de una sola rama. Asimismo, la carga real de falla fue superior a la calculada; este efecto se hizo más notable en las vigas con estribos de dos ramas que en las que solo tienen una rama. El mismo fenómeno se puede apuntar en cuanto a las cargas elásticas real y calculada.

En las vigas sin estribos, no obstante que la carga final fue superior a la calculada, la falla se presentó con una deformación menor a la correspondiente a las vigas con estribos: es decir, las vigas sin estribos tuvieron una falla frágil.

Resistencias del mortero y del concreto fluido.- La variabilidad en las resistencias del mortero y del concreto fluido, ocasionó que algunas de las vigas se comportaran en forma extraña; por ejemplo no fue posible determinar la influencia de las variables en el caso de la T2-3 y la T6-2. En investigaciones futuras, se tratará de controlar la resistencia de estos materiales, haciendo constante la resistencia del mortero y del concreto para cada tipo de elementos.

Además de lo que se ha comentado, es importante hacer notar que

TABLA 6

COMPARACION DE CARGAS CALCULADAS Y CARGAS DE ENSAYE

V I G A	CARGAS CALCULADAS		CARGA REAL		COMPORTAMIENTO			
	FLEXION		CORTANTE		ESPERADO	REAL		
	ELASTICA	ULTIMA	ELASTICA	ULTIMA				
D1-1	654	3024	895	4767	3750	5860	flexión	flexión
D1-2	654	3024	895	4767	3000	4750	flexión	
D1-3	654	3024	895	4767	3000	4490	flexión	
D2-1	654	3024	895	4767	2250	4050	flexión	
D2-2	654	3024	895	4767	2250	4290	flexión	
D2-3	654	3024	895	4767	3500	4830	flexión	
D3-1	654	3024	895	6067	3000	5720	flexión	
D3-2	654	3024	895	6067	4250	5590	flexión	
D3-3	654	3024	895	6067	4000	5620	flexión	
D4-1	654	3024	895	6067	3500	5163	flexión	
D4-2	654	3024	895	6067	4000	5000	flexión	
D4-3	654	3024	895	6067	4500	5720	flexión	
D5-1	654	3024	290	1945	2100	3110	cortante	flexión
D5-2	654	3024	290	1945	2700	4050	cortante	flexión
D5-3	654	3024	290	1945	2400	3970	cortante	flexión
D6-1	654	3024	290	1945	2300	3500	cortante	flexión
D6-2	654	3024	290	1945	2200	3400	cortante	flexión
D6-3	654	3024	290	1945	2200	3500	cortante	flexión
T1-1	1463	5325	1416	7501	5000	7280	flexión	flexión
T1-2	1463	5325	1416	7501	5000	7600	flexión	flexión
T1-3	1463	5325	1416	7501	5250	8250	flexión	flexión
T2-1	1463	5325	1416	7501	5250	8520	flexión	flexión
T2-2	1463	5325	1416	7501			-----	-----
T2-3	1463	5325	1416	7501	3500	5250	flexión	cortante
T3-1	1463	5325	1416	9534	5000	8320	flexión	flexión
T3-2	1463	5325	1416	9534	4250	7770	flexión	flexión
T3-3	1463	5325	1416	9534	5250	8420	flexión	flexión
T4-1	1463	5325	1416	9534	5000	7150	flexión	flexión
T4-2	1463	5325	1416	9534	5000	7450	flexión	flexión
T4-3	1463	5325	1416	9534	5000	7500	flexión	flexión
T5-1	1463	5325	466	3066	3750	6300	cortante	flexión
T5-2	1463	5325	466	3066	6250	8840	cortante	flexión
T5-3	1463	5325	466	3066	3750	5090	cortante	cortante
T6-1	1463	5325	466	3066	5250	7500	cortante	flexión
T6-2	1463	5325	466	3066	3250	5350	cortante	flexión
T6-3	1463	5325	466	3066	5000	8000	cortante	flexión

criterio elástico, tal como se presenta en los reglamentos, da lugar a cargas muy por debajo de las reales. La relación entre la carga elástica real y la carga elástica calculada para todas las vigas de dos hiladas, quedó comprendida en el intervalo de 3.2 a 6.8, para las de tres hiladas entre 2.2 y 4.3.

Si se considera la relación entre la carga de falla real y la carga elástica calculada, ésta será mayor que los valores anotados anteriormente; lo que hace pensar que el criterio resulta muy conservador en el diseño de mampostería de concreto a flexión.

Con respecto a las cargas calculadas con base en el criterio de resistencia de ACI-318-71, éstos resultaron inferiores a las cargas de falla reales incluso en las vigas sin refuerzo transversal en que era de esperarse una falla frágil bajo cargas inferiores a las calculadas. Esto permite asegurar que, por lo menos para este estudio, el criterio de resistencia es adecuado para el diseño de mamposterías a flexión sin embargo, todavía no se puede asegurar categóricamente nada: habrá que esperar el resultado de un mayor número de programas de investigación.

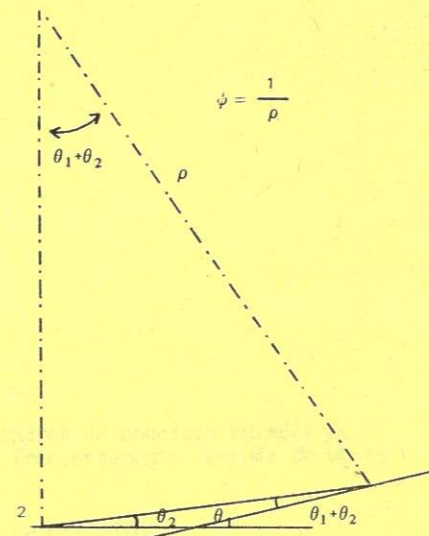
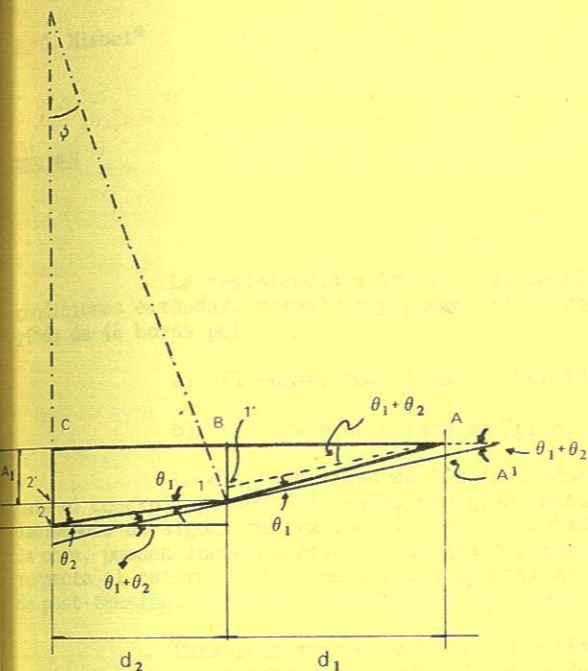
En general, durante la investigación se pudo notar que todas las vigas iniciaron su falla por flexión presentándose grietas imperceptibles hasta la carga correspondiente al final del comportamiento elástico: carga real elástica; partir de ese momento, el ancho y longitud de las grietas se incrementaron hasta que la falla final se presentó por cortante o por compresión en las zonas más forzadas.

Table with multiple columns and rows, containing numerical data and labels like 'flexión', 'cortante', 'compresión'.

en las resistencias del mortero y del concreto fluido, la variación en las resistencias del mortero y del concreto fluido, ocasionó que algunas vigas se comportaran en forma extraña, por lo que no fue posible determinar la influencia de las variables en el caso de las T3-1 y la T6-2. En investigaciones futuras, se tratará de controlar la resistencia de estos materiales, haciendo constante la resistencia del mortero y del concreto para cada tipo de elemento.

Además de lo que se ha comentado, es importante hacer notar

ANEXO 1



Suponiendo deformaciones pequeñas

$$(\theta_1 + \theta_2) \rho = d_2$$

$$\rho = \frac{d_2}{(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\therefore \phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{d_2}$$

Para cálculo de θ_2 : $\Delta 2'2'1$ se tiene $\overline{\theta_1 1'2'} = \overline{2'2}$ si las deformaciones son pequeñas, $\overline{1'2'} = d_2$; $\overline{2'2} = \Delta_2 - \Delta_1$

$$\theta_2 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{d_2}$$

Para cálculo de θ_1 : suponiendo que la tangente por 1 forma el mismo ángulo con la deformada θ_1 , se tiene:

$\overline{B1} - \overline{1'1'} = \overline{B1'}$ pero $\overline{B1} = \Delta_1$; $\overline{1'1'} = \theta_1 d_1$ (si las deformaciones son pequeñas) y $\overline{B1'} = (\theta_1 + \theta_2) d_1$.

$$\therefore \Delta_1 - \theta_1 d_1 = (\theta_1 + \theta_2) d_1 \quad ; \quad \Delta_1 - \theta_2 d_1 = 2\theta_1 d_1 \quad ; \quad \theta_1 = \frac{\Delta_1 - \theta_2 d_1}{2d_1}$$

$$\theta_1 = \frac{\Delta_1}{2d_1} - \frac{\theta_2}{2} \quad \text{pero } \theta_2 = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{d_2} \quad \therefore \theta_1 = \frac{\Delta_1}{2d_1} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2d_2}$$

sustituyendo θ_1, θ_2 en ϕ :

$$\phi = \frac{\Delta_1}{2d_1 d_2} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2d_2^2} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{d_2^2} = \frac{\Delta_1}{2d_1 d_2} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2d_2^2} = \frac{\Delta_1}{2d_2} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{\Delta_2}{2d_2^2}$$