Multiplicando (10-5) por g ds

$$gdz + vdv + \frac{dp}{\rho} = 0 \qquad (10\text{-}6)$$

integrando (10-6)

$$dz + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{constante} \quad (10\text{-}7)$$

En la cual la constante de integración varía de una línea de corriente a otra, pero permanece invariable a lo largo de una misma línea de corriente.

Para aplicar la ecuación (10-7) a casos particulares debe tomarse en cuenta la hipótesis que se hicieron para establecer la ecuación, las cuales son: Un fluído sin rozamiento, flujo permanente, y que ρ función únicamente de P.

Si además suponemos que el fluído es incomprensible la (10-5) puede escribirse.

$$\frac{d}{ds}\left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

Integrando con respecto a s

$$gz + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2} = \text{constante} \quad (10\text{-}8)$$

Donde la constante toma diferentes valores para cada línea de corriente.

Esta es la ecuación de Bernouilli para flujo permanente de un fluído sin rozamiento e incompresible a lo largo de una línea de corriente. Las dimensiones de (10-8) son long^2/tiempo^2, o sea, energía por unidad de masa.

Dividiendo (10-8) por g.

$$Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante} \quad (10\text{-}9)$$

Cada uno de los términos de la ecuación (10-9) tiene dimensiones de energía por unidad de peso es decir kilogrametros por kilogramo peso. o más simplemento metros. Multiplicando (10-8) por γ :

$$\gamma Z + p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const.} \quad (10\text{-}10)$$

Cuyas dimensiones son energía por unidad de volumen es decir; kilogrametros por metro cúbico, y es la forma más conveniente para aplicarla cuando el fluído es un gas (que se supone incompresible)

Cada uno de los términos de la ecuación de Bernouilli (10-9) puede ser interpretado como una forma de energía, Z es la energía potencial del fluído por unidad de peso, medida a partir de un origen arbitrario. El trabajo necesario para elevar Wkg desde orgen a la altura Z es Wz kg-m que es su energía potencial. Su energía potencial por kilogramo es Wz/W Kgm/kg o m.

El trabajo que el fluído es capaz de realizar en virtud de su presión se ilustra en la figura 10. Si el pistón empujado por la fuerza debida a la presión del fluído pA (donde A es el área del pistón), se desplaza una distancia "dl" contra una fuerza resistente, realiza un trabajo que es producto de la fuerza por el desplazamiento, o sea pA dl kg-m; el número de kilogramos de fluído necesarios para realizar este trabajo es γA dl, ya que esta cantidad de fluído debe ser de vuelta al cilindro para permitir al pistón volver a su posición original para otra embolada. Dividiendo el trabajo realizado por el peso del fluído necesario se calcula el trabajo realizado por unidad de peso que es

$$\frac{pA}{\gamma A} \quad \frac{dl}{dl} = \frac{p}{\gamma}$$

El término p/γ se refiere al trabajo de un fluído en movimiento y se aplica sólo cuando el flujo es permanente. Asī por ejemplo en un recipiente de agua puede haber un gran valor de p/γ si el tapón se aprieta fuertemente

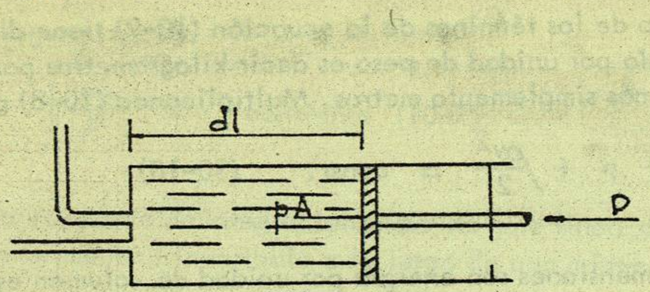

Fig. #10

pero el agua es incapaz de realizar mucho trabajo, porque la presión cae rápidamente cuando el desplazamiento del tapón aumenta su volumen. El término p/γ se llama también energīa de presión.

La energīa cinética de un elemento de fluīdo es $mv^2/2$, o sea $(W/g)v^2/2$, siendo W el peso del elemento. Por consiguiente, la energīa cinética por unidad de peso es.

$$\frac{\frac{1}{2}\,(W/g)v^2}{W} = \frac{v^2}{2g}$$

que es el tercer término de (10-9). El término $v^2/2g$ se llama altura de velocidad. La ecuación de Bernouilli establece que la suma de las energīas cinética, potencial y de presión por unidad de peso permanece constante a lo largo de una līnea de corriente.

Modificación de las hipótesis bajo las que se estableció la ecuación de Bernouilli. En condiciones especiales, cada una de las cuatro hipótesis que se hicieron para establecer la ecuación de Bernouilli puede ser modificada.

a. Cuando todas las līneas de corriente tiene su origen en un depósito donde la energī contenida es la misma en todos los puntos, la constante de integración no cambia de una līnea de corriente a otra y los puntos 1 y 2, para aplicar la ecuación de Bernouilli, pueden elegirse arbitrariamente, es decir, no es necesario que estén en la misma līnea de corriente.

b. En el movimiento de un gas, tal como en un sistema de ventilación, donde el cambio de presión es solo una pequeña fracción (un pequeño tanto porciento) de la presión absoluta, el gas puede considerarse incompresible. La ecuación (10-10) puede aplicarse, con un peso especīfico medio.

c. Para flujo no permanente con un cambio muy lento de las condiciones de permanencia, tal como el vaciado de un gran depósito, la ecuación de Bernouilli puede aplicarse sin error apreciable.

d. Todos los fluīdos reales son viscosos y en su movimiento aparecen tensiones de cortadura que convierten la energīa mecánica en energīa térmica. En muchas aplicaciones esta energīa no vuelve a convertirse en su foma mecánica, y debe considerarse como una pérdida. La ecuación de Bernouilli puede aplicarse a un fluīdo real añadiéndole un término adicional que tiene en cuenta esta pérdida de energīa mecánica. Si se considera un punto, aguas arriba, y un punto 2, abajo, la energīa por unidad de peso E_1 en 1, es igual a la energīa por unidad de peso E_2 en 2 más toda la energīa perdida entre los dos puntos:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + P_2/\gamma + \frac{V_1^2}{2g} + \text{pérdidas}$$

Aplicaciones: Orificios: El problema de un orificio a través del cual descarga un fluīdo de un recipiente se puede resolver por la ecuación de Bernouilli en la fig. 11 aplicando la ecuación de Bernouilli entre el punto 1 en la superficie del līquido y el punto 2 exactamente a la salida del chorro tenemos:

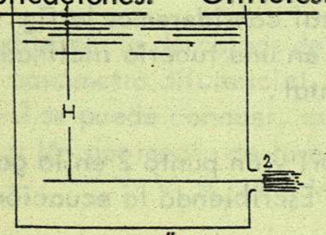

Fig. #11

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2^2}{\gamma} + Z_2 + \text{pérdidas}$$

Tomando como origen la presión atmosférica $P_1 = P_2 = 0$ tomando - como origen de alturas un plano horizonte que pase por el punto ---- $2\; Z_2 = 0\; Z_1 = H$. Despreciando las pérdidas y la velocidad del -- fluído en el recipiente y substituyendo nos da:

$$0 + 0 + H = \frac{V^2}{2g} + 0 + 0 \quad ----$$

$$V_2 = \sqrt{2gh} \qquad (10\text{-}11)$$

que establece que la velocidad teórica de sálida del fluído es igual - a la velocidad de caída libre desde la sup. del depósito o sea la teoría de Torricelli.

Para calcular el gasto Q aplicando la ecuación

$$Q = AV$$

para que quede determinado el problema completamente.

Por el mismo método se podría aplicar a un orificio colocado en una tubería usado para determinar gastos.

Venturímetro: Otra aplicación de la ecuación de Bermouilli es re-- solver el problema del tubo de venturí, usado para medición de gasto en tuberías. Para tomar un caso general consideremos la fig. 12 que muestra un tubo de venturí colocado en una tubería inclinada - arbitrariamente con respecto a la horizontal.

Tomemos un punto 1 en la base del Venturí y un punto 2 en la garganta o parte mas estrecha del medidor. Escribiendo la ecuación de Bermouilli entre estos puntos:

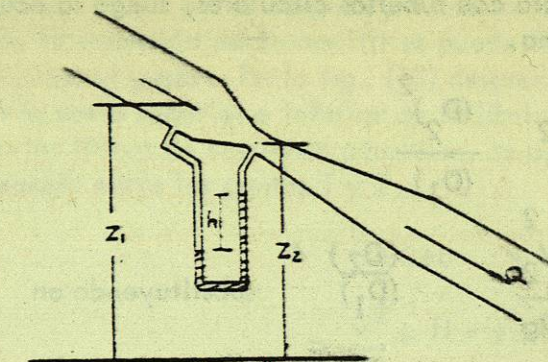

Fig. #12

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P1}{\gamma} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \text{pérdidas}$$

Despreciando las pérdidas y transfiriendo términos

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{p_1}{\gamma} + Z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\gamma} + Z_2\right) \qquad (10\text{-}12)$$

Esta ecuación muestra que el aumento en energía cinética es igual a la disminución de energía potencial. La ecuación puede escri-- birse en forma.

$$\frac{V2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2 \qquad (10\text{-}13)$$

La diferencia de cargas de presión puede conocerse por medio de - un manómetro diferencial, la diferencia de alturas entre los puntos 1 y 2 se puede conocer, queda solo por relacionar las velocidades V_1 y V_2 por medio de la ecuación de la continuidad:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \qquad (9\text{-}1)$$

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} \qquad (9\text{-}1a)$$

generalmente se trata con tuberías circulares, luego la ecuación se puede poner en forma.

$$V_1 = V_2 \frac{(D_2)^2}{(D_1)}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \frac{(D_2)^4}{(D_1)} \quad \text{substituyendo en} \quad (10\text{-}13)$$

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} \frac{(D_2)^4}{(D_1)} = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2$$

$$\frac{V^2}{2g}\left[1 - \frac{(D_2)^4}{(D_1)}\right] = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2$$

Despejando V_2

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g\left[\frac{P_1 - P_2}{\gamma} + Z_1 - Z_2\right]}{1 - \frac{(D_2)^4}{(D_1)}}}$$

Vertederos: El caudal de un conducto abierto, puede medirse con un vertedero, el cual es una obstrucción en el canal que obliga al líquido a estancarse detrás y a verter por encima de él. Midiendo la altura aguas arriba se puede determinar el caudal del canal.

En este párrafo de aplicación tomaremos el vertedero mas simple o --

a un vertedero rectangular de pared delgada sin contracciones-
iterales. Aplicando la ecuación de Bernouilli se puede llegar a
na fórmula para calcular el gasto. En la fig. (13) despreciando-
is contracciones en la parte superior e inferior de la lámina de -
íquido y suponiendo las líneas de corriente paralelas, se aplica -
ı ecuación de la energía entre los puntos 1 y 2.

$$H + 0 + 0 = \frac{v^2}{2g} + H - y + 0$$

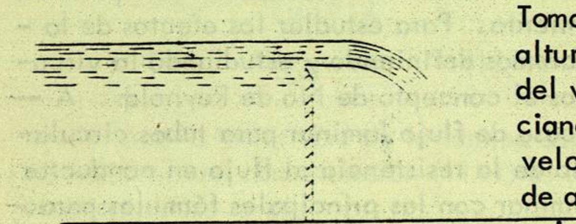

Fig. #13

Tomando el origen de alturas en la cresta del vertedero y despreciando la carga por velocidad en el canal de aproximación. Despejando v

$$v = \sqrt{2g\,y}$$

l gasto teórico Qt es

$$Qt = \int v dA = \int_0^H vLdy = \sqrt{2g}L \int_0^H y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,LH^{3/2}$$

iendo L el ancho del vertedero. La experiencia demuestra que el
xponente de H es correcto, pero que el coeficiente $\frac{2}{3}\sqrt{2g}$, es --
nuy grande para un vertedero de cresta afilada. La contracción y
as pérdidas hacen que el caudal real, sea un 60% del caudal teó-
ico, la fórmula quedaría

$$Q \quad 1.84\ LH^{\frac{3}{2}}$$

londe Q está en m^3/seg y L y H en metros.