De la (13-14) se observa que la pérdida de energía es directamente proporcional al gasto, a la viscosidad y a la longitud e inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro. Debe notarse -- que la rugosidad del tubo no entra en la ecuación. La ecuación -- (13-12) es conocida como la ecuación de Hagen-Poiseuille en honor de Hagen que la obtuvo en 1839 e independientemente obtenida por Pouseville un año más tarde, la deducción analítica se debe a Wiedemann (1856).

14. Gradiente Hidráulico y Gradiente de Energía: Las pérdidas de carga en un tubo recto se muestran gráficamente en la fig. (16) en la cual se trazan 2 líneas designadas respectivamente gradiente hidráulico y gradiente de energía. El gradiente hidráulico se define como el lugar geométrico de las elevaciones, a las cuales el líquido se levantaría en tubos piezométricos colocados sucesivamente en el tubo y es por lo tanto, una representación gráfica con respecto a cualquier plano arbitrario tomado como origen, de la carga de presión más la carga potencial que el líquido posee en todas las -- secciones del tubo.

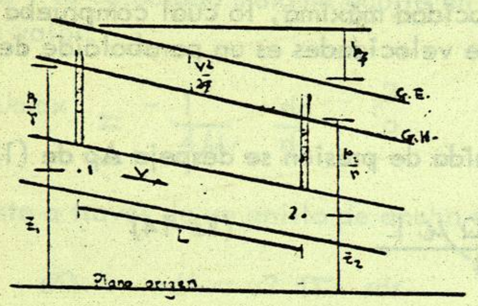


Fig. #16

El gradiente de energía esta sobre el gradiente hidráulico una distancia igual a la carga por velocidad en cada sección y es así una representación gráfica, con respecto a un plano arbitrario tomando como origen, de la carga total que posee el fluído.

15. Resistencia al flujo turbulento en conductos abiertos y cerrados: En flujo turbulento permanente en conductos de sección constante actúa en la pared del tubo que moja el líquido como fuerza resistente, una fricción superficial, la cual es igual al producto -- del valor medio del esfuerzo de corte τ_0 en la pared por la superficie de la pared del tubo que moja el fluído. Pl, donde P es el perímetro mojado.

El esfuerzo de corte en la pared en flujo turbulento varía proporcionalmente con el cuadrado de velocidad.

$$\tau_o = \lambda \rho \frac{V^2}{2} \quad (15\text{-}1)$$

donde λ es un coeficiente sin dimensiones.

Las fuerzas cortantes en la pared en flujo permanente están equilibradas por las fuerzas debidas a la presión, por la componente --- axial del peso del fluído en el conducto o por ambas fuerzas Fig.- (7) Tomando suma de fuerzas en la dirección axial.

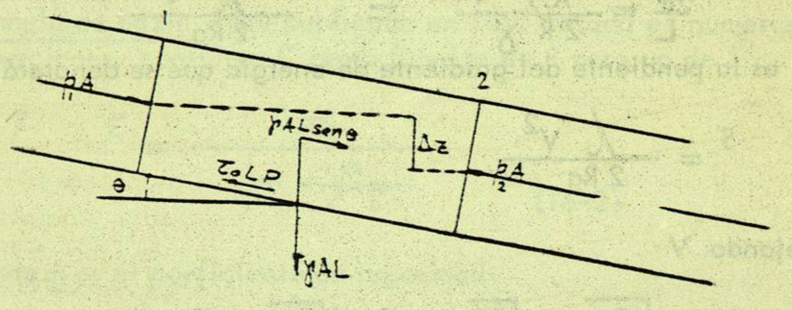


Fig. #17

$$(p_1 - p_2)\, A + \gamma AL \operatorname{sen}\theta = \tau_o LP$$

$$L \operatorname{sen}\theta = \Delta z$$

$$(p_1 - p_2)\, A + \gamma A\, \Delta z = \tau_o LP$$

Dividiendo ente AL y llamando

$$\Delta p \quad a \quad p_1 - p_2$$

$$\frac{\Delta p + \gamma \Delta z}{L} = \frac{\tau_o P}{A} \qquad (15\text{-}2)$$

La relación $\frac{A}{P}$ se llama radio hidráulico del conducto y se nombra por R

$$\frac{\Delta p + \gamma \Delta z}{L} = \frac{\tau_o}{R} = \frac{\lambda \rho V^2}{2R} \qquad (15\text{-}3)$$

Si dividimos por γ, $\frac{\Delta p + \gamma \Delta z}{\gamma}$ representa la pérdida de energía mecánica por unidad de peso o la pérdida de carga.

$$h_f = \frac{\Delta p + \gamma z}{\gamma}$$

$$\frac{h_f}{L} = \frac{\lambda \rho V^2}{2R\gamma} = \frac{\lambda V^2}{2Rg}$$

$\frac{h_f}{L}$ es la pendiente del gradiente de energía que se denotará por S

$$S = \frac{\lambda V^2}{2Rg}$$

Despejando V

$$V \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS} = C \sqrt{RS} \qquad (15\text{-}4)$$

Esta es la fórmula de Chezy en la que originalmente se creyó que el coeficiente C era constante para cualquier tamaño de conducto y condiciones de la superficie de la pared, actualmente se usan diversas fórmulas para encontrar el coeficiente de Chezy.

16.- Resistencia debida al rozamiento de canales abiertos:

Numerosas fórmulas empíricas han sido desarrolladas para encontrar

el coeficiente en la fórmula de Chezy para aplicarse a canales abiertos. Aquí solo mencionaremos las 3 fómulas más usadas en la hidráulica:

Fómula de Ganguillet y Kutter (1877) en el sistema métrico es:

$$C = \frac{23 + \frac{0.00155}{S} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R}}\left[23 + \frac{0.00155}{S}\right]} \qquad (16\text{-}1)$$

Donde n es el coeficiente de rugosidad, R es el radio hidráulico y S la pendiente del gradiente de energía. Esta fórmula es conocida como la fórmula de Kutter.

Fómula de Bazin fué publicada en 1897 basada en numerosas observaciones, considera C como función de R pero no de S

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}} \qquad (16\text{-}2)$$

donde m es el coeficiente de rugosidad.

Fómula de Manning (1890) da el siguiente valor de C para la fórmula de Chezy

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \qquad (16\text{-}3)$$

pero la fórmula se escribe generalmente:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \qquad (16\text{-}4)$$

n es el coeficiente de rugosidad de la fórmula de Kutter. Ha sido encontrado en la práctica que la fórmula de Manning es válida en un amplio rango de flujos en canales abiertos así como en tubos rugosos, razón por la cual es una de las fórmulas más usadas en la práctica actualmente.

17. Resistencia debida al rozamiento en tuberías:

En la fórmula de Chezy (15-4)

$$V = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{RS}$$

Cuando se substituye $\lambda = f/4$ y $R = \frac{D}{4}$ (para tubos circulares) se obtiene la fórmula

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \qquad (17\text{-}1)$$

Conocida como la ecuación de Darcy-Weisbach, donde D es el diámetro interior de la tubería y f es un factor adimensional. Todas las magnitudes de la fórmula pueden medirse experimentalmente excepto f. Una manera de determinar h_f en la práctica es medir en una tubería recta el gasto y el diámetro interior para determinar la velocidad media V. La pérdida de energía se puede medir conectando un manómetro diferencial en 2 tomas de presión en 2 secciones separadas por una distancia L.

La experiencia demuestra que en flujo permanente la pérdida de energía por unidad de peso.

a) Es directamento proporcional a la longitud de la tubería,
b) Es proporcional aprox. al cuadrado de la velocidad,
c) Es inversamente proporcional aprox. al diámetro.
d) Depende de la rugosidad de las paredes internas del tubo,
e) Depende de la densidad y viscosidad del fluído,
f) Es independiente de la presión,

El coeficiente f debe determinarse de tal forma que la fórmula (17-1) de la pérdida de carga, f no es consonante, depende de la velocidad V, del diámetro D, de la densidad ρ, de la viscosidad μ y de ciertas carac terísticas de la rugosidad de la pared que se designan con las letras E, E', m. las cuales significan: E, es una medida del tamaño de las rugosidades, E', es una medida de la localización o disposición de las rugosidades y m es un factor que depende de la foma de las rugosidades, E y E' tienen unidades de longitud y m no tiene unidades. El coeficiente f como se ve de lo anterior no es un coeficiente constante sino que depende de siete magnitudes:

$$f = \text{función } (V, D, \rho, \mu, E, E', m)$$

Como f es un factor adimensional debe depender de varios parámetros sin dimensiones, agrupando en forma conveniente estas siete magnitudes. Para tuberías lisas $E = E' = 0$, con lo que f solo depende de las 4 primeras magnitudes. Estas pueden agruparse en la forma $\frac{VD\rho}{\mu}$ para formar un parámetro adimensional, que es el número de Reynolds. Los términos E y E' pueden hacerse adimencionales dividiéndolos por D.

$$f = \text{función } \left(\frac{VD}{\nu}, \frac{E}{D}, \frac{E'}{D}, m\right)$$

La prueba de esta relación se hace experimentalmente. El gráfico del coeficiente de rozamiento en función del número de Reynolds en un papel logarítmico se llama diagrama de Stanton.

Blasius hizo investigaciones en tuberías lisas con flujo turbulento obteniendo una fórmula emprírica válida hasta $R_e = 80{,}000$ que es

$$f = \frac{0.316}{R_e^{1/4}}$$

En tuberías rugosas el término E/D se llama rugosidad relativa, Nikuradse probó la validez del concepto de la rugosidad relativa con investigaciones en tuberías de rugosidad artificial formada con arena. Estas investigaciones demostraron que para un valor de ---

E/D la función que liga f con R_e es independiente del diámetro de la tubería. Dichas investigaciones no permiten variaciones de E'/D y m para un tipo de rugosidad pero prueban la validez de que

$$f = \text{función} \ \left(R_e, \frac{E}{D}\right)$$

Estudios hechos por Prandtl y vonKarman dieron por resultado las siguientes ecuaciones para determinar f para 2 condiciones extremas de flujo en tubos.

Para tubos lisos:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{R_e \sqrt{f}}{2.51}$$

Para tubos rugosos con turbulencia completamente desarrollada

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(3.7 \frac{D}{E}\right) \qquad (17\text{-}4)$$

Estas ecuaciones han sido comprobadas en la práctica y muestra que para tuberías lisas f depende solamente del R_e y cuando la turbulencia está completamente desarrollada f depende solamente de la rugosidad relativa.

Entre estas 2 condiciones límites de flujo existe una región de transición para la cual Colebrook y White desarrollaron la siguiente ecuación para tubos comerciales.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{E}{3.7\,D} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}}\right) \qquad (17\text{-}5)$$

Esta ecuación cumple también con las condiciones límites de flujo. Cuando R_e es pequeño E/D tiende a cero y la (17-5) se transforma en la (17-3) cuando R_e es grande y la turbulencia es total el segundo término del paréntesis tiende a cero y la (17-5) deja la (17-4). Moody (1944) ha construído una de las gráficas más prácticas para la determinación de f en tubos comerciales, basado en la ecuación-

de Colebrook.

Para flujo laminar se encontró que la ecuación de Hagen (13-11) puede transformarse para darle la forma de la ecuación de Darcy:

dividiendo (13-11) por: γ; $\frac{\Delta p}{\gamma} = h_f$ y substituyendo $r_o = \frac{D}{2}$

$$h_f = \frac{8 V \mu L}{\gamma r_o^2} = \frac{32 \mu}{\gamma D} \ \frac{L}{D} \ V$$

Dividiendo y multiplicando por 2g y teniendo que $\frac{\gamma}{g} = \rho$

$$h_f = \frac{64 \mu}{\rho D} \ \frac{L}{D} \ \frac{V}{2g} = \frac{64 \mu}{\rho D V} \ \frac{L}{D} \ \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\frac{DV}{\nu}} \ \frac{L}{D} \ \frac{V^2}{2g}$$

$\frac{DV}{\nu}$ número de Reynolds.

$$h_f = f \ \frac{L}{D} \ \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{R_e} \ \frac{L}{D} \ \frac{V^2}{2g} \qquad (17\text{-}6)$$

de donde $f = \frac{64}{R_e}$ (17-7)

Lo cual muestra que en flujo laminar el coeficiente f es función de R_e. Estos valores también se incluyen en la gráfica de Moody.

Cuando la turbulencia está completamente desarrollada se enunció que f depende de la rugosidad relativa; Rouse sugiere la ecuación.

$$R = 400 \ \frac{D}{E} \ \log \left(3.7 \ \frac{D}{E}\right)$$

Para determinar el número de Reynolds a partir del cual la turbulencia es total y f es de ese número en adelante constante.

(Diagrama de Moody)

18.- Otras fórmulas de tuberías: La fórmula de Darcy es una fórmula general para la determinación de la pérdida de carga en tuberías para cualquier fluído. Debido a que el agua es el fluído más común de uso en el diseño de tuberías se han desarrollado otras fórmulas -- además de la Darcy para tuberías que se usen para conducción de -- agua.

Fórmula de Manning: Al hablar de conductos abiertos se hizo mención que la fórmula de Manning.

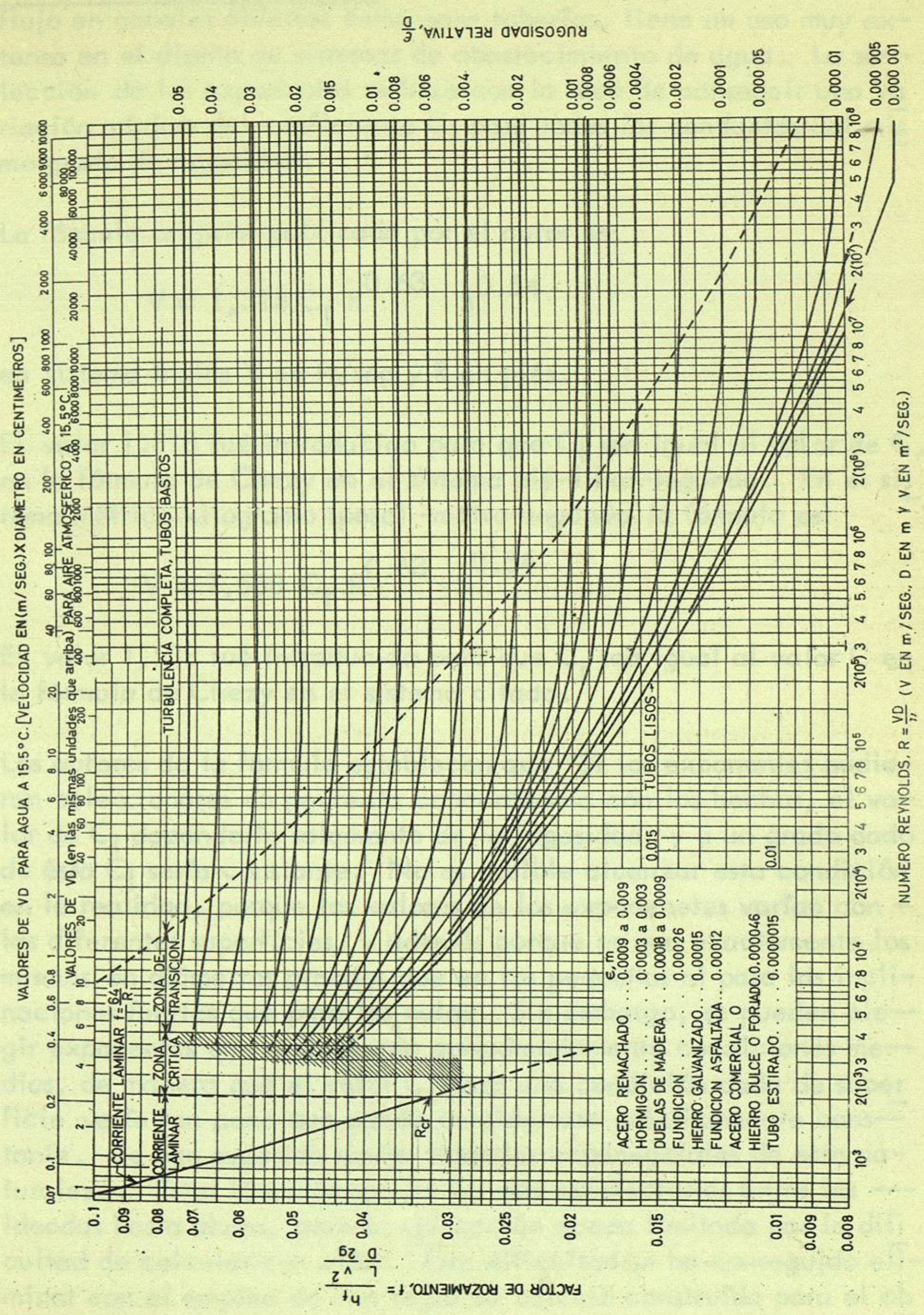
$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2}$$

era válida en un amplio rango para flujo en tubos rugosos. Para tuberías es más conveniente usar la fórmula en las formas siguientes:

$$V = \frac{0.397}{n} D^{2/3} S^{1/2}$$

$$Q = \frac{0.312}{n} D^{8/3} S^{1/2}$$

$$h_f = 6.35\, n^2 \frac{L V^2}{D^{4/3}}$$



Fórmula de Hazen Williams: Esta fórmula establecida tanto para flujo en canales abiertos como para tuberías, tiene un uso muy extenso en el diseño de sistemas de abastecimiento de agua. La selección de los exponentes se hizo con la idea de conseguir una variación mínima del coeficiente C_1 para todos los conductos del mismo grado de rugosidad.

La fórmula original publicada por el autor es:

$$V = 1,318\, C_1\, R^{0.63}\, S^{0.54}$$

en sistema inglés V en ft/seg y R en piés.

El valor 1.318 fué introducido para que C_1 sea igual al valor de C, en la fórmula de Chezy en el sistema pié-libra-segundo. En el sistema métrico kilogramo (peso) -metro-segundo la fórmula es:

$$V = 1,538\, C_1\, R^{0.63}\, S^{0.54}$$

El valor 1,538 fué introducido para que C_1 sea igual al valor C en la fórmula de Chezy en el sistema citado.

Los autores de la fórmula establecen que "Si los exponentes pudieran seleccionarse en perfecta concordancia con los hechos, el valor de C_1 dependería solamente de la rugosidad, y a un grado dado de ésta C_1 sería constante. No es posible alcanzar esta condición en la realidad, porque los valores de los exponenetes varían con las diferentes superficies, y además porque no son exactamente los mismos en diámetros grandes que en los pequeños ni para las inclinaciones fuertes que para las nulas. Sin embargo, se pueden elegir exponentes que representen aproximadamente condiciones medias, de manera que el valor C_1 para una condición dada de superficie varíe tan poco que pueda considerarse prácticamente constante. Se han sugerido varias fórmulas exponenciales de esta naturaleza. Estas fórmulas son de las más satisfactorias entre las ideadas hasta ahora, pero su aplicación queda limitada por la dificultad de calcular con ellas. Esta dificultad se ha conseguido eliminar con el empleo de una regla de cálculo construída para el objeto".