productos obtenidos, se tiene:

$$\left(\frac{1}{m}\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx = (X - u')dx$$

de donde:

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = (X-u')dx + (Y-v')dy + (Z-w')dz =$$

$$= Xdx + Ydy + Zdz - u'dx - v'dy - w'dz \qquad \textbf{(10)}$$

como la presión p, es función de x, y, z, y t, se tiene:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial t}dt$$

también, de la (5):

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{dx}{dx}\cdot\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{du}{dx} = u\frac{du}{dx}$$

La ecuación (10) queda:

$$\frac{1}{m}\left(dp - \frac{\partial p}{\partial t}\cdot dt\right) = Xdx + Ydy + Zdz - u\frac{du}{dx}dx - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dw}{dz}dz =$$

$$= Xdx + Ydy + Zdz - (u\,du + v\,dv + w\,dw).$$

La suma de los siguientes vectores es:

$$u\,du + v\,dv + w\,dw = V.dV$$

de donde se tiene la ECUACION FUNDAMENTAL:

$$\frac{1}{m}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz-V.dV \qquad (11)$$

En esta ecuación fundamental, las diferenciales dx, dy, dz, no son independientes, puesto que son las proyecciones sobre los ejes coordenados de un elemento de trayectoria (9), por lo cual esta ecuación podrá integrarse solamente entre dos puntos de la misma trayectoria.

En el caso de las ecuaciones de Euler (1, 2, 3, 6, 7 y 8), la integración puede efectuarse entre dos puntos cualesquiera de la masa de fluido en movimiento.

1.4 ECUACION DE BERNOULLI.

Si en el caso de la ecuación fundamental, se hacen las siguientes consideraciones:

Que la presión no varía en función del tiempo t,

Que el líquido es incompresible, y por consiguiente la masa m, no es función de p.

Que por ser el líquido incompresible, la variación de la velocidad en un punto cualquiera es nula, o sea, que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Y que en consecuencia, hay continuidad en el flujo del líqui do.

Que la única fuerza exterior que actúa sobre el líquido, es la fuerza de la gravedad, por lo que si escogemos como acele ración debida a esta fuerza, el valor de Z sobre el eje co- rrespondiente, y en consecuencia, los valores de X y Y son 0.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la ecuación (11) nos queda:

$$\frac{1}{m}(dp - 0) = 0 + 0 + Z dz - V.dV \quad \therefore$$

$$\frac{1}{m} dp = Z.dz - V.dV \quad ó$$

$$\frac{1}{m} dp - Z dz + V.dV = 0$$

Si la aceleración debida a la fuerza de gravedad la denomi- namos por - g (puesto que su sentido es contrario al de Z), tenemos:

$$\frac{1}{m} dp + g dz + V dV = 0$$

Dividiendo entre g e integrando, se tiene:

$$\frac{p}{mg} + z + \frac{V^2}{2g} = K; \quad K = \text{constante.} \tag{12}$$

que es la ECUACION DE BERNOULLI.

Como la ecuación de Bernoulli se ha deducido a partir de la ecuación fundamental, su integración únicamente se puede efectuar a lo largo de una línea de corriente.

Cada uno de los términos de la ecuación, tiene dimensiones de energía por unidad de peso, es decir, kilogramos-metro por kilogramos-peso, o más simplemente, metros del líquido de que se trate.

Los términos de la ecuación de Bernoulli se pueden interpretar como formas de energía, en forma de metros del líquido, o cargas. Así, $\frac{p}{mg}$ es la carga por presión, Z, la carga por posición o energía potencia, y $\frac{V^2}{2g}$, la carga por velocidad, o energía cinética.

La ecuación de Bernoulli establece que la suma de las energías cinéticas, potencial y de presión, por unidad de peso, permanece constante a lo largo de una línea de corriente.

Como el flujo de un líquido a lo largo de un canal abierto o de un conducto cerrado, la velocidad de las distintas líneas de corriente son diferentes, al aplicar la ecuación de

Bernoulli a una vena líquida o tubo de flujo, es necesario - tomar como energía cinética, el promedio de las energías cinéticas de las distintas líneas de corriente, o en todo caso, tomar como carga por velocidad, la que corresponde a la velocidad media, modificada por un factor de corrección.

Experimentos realizados por Bazin y otros investigadores, indican que para agua con flujo turbulento en un tubo recto, el factor de corrección tiene un valor medio de 1.06 (entre 1.01 y 1.10). En cambio, para flujo laminar, el factor tiene un valor de 2.

Al aplicar la ecuación de la energía a dos puntos de una línea de corriente, se encuentra que la suma de las tres formas de energía en ambos puntos, son iguales, no importando que los distintos términos de cada miembro de la ecuación, tengan valores diferentes. Sin embargo, como los fluidos reales en movimiento, debido a su viscosidad, desarrollan fuertes tensiones de cortadura (esfuerzos cortantes), que convierten la energía mecánica en energía térmica que en muchas aplicaciones no vuelve a convertirse nuevamente en energía mecánica, esta transformación de energía debe estimarse como una pérdida. - En consecuencia, para fluidos reales, al segundo miembro de la ecuación de Bernoulli se le deberá añadir un término adicional que corresponda a la pérdida mencionada y que tuvo lu gar al desplazarse el líquido desde el punto inicial hasta el final considerado.

La naturaleza de las pérdidas varía con las aplicaciones, necesitándose generalmente evaluarlas en forma experimental.

Cuando entre los dos puntos en que se aplica la ecuación de la energía, se añade energía al fluido (con una bomba, por - ejemplo), esta energía se incluye como un término más del -- primer miembro de la ecuación de Bernoulli.