UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

ORGANIZACION PANAMERICANA DE LA SALUD

CURSO INTENSIVO SOBRE

"ADMINISTRACION Y DIRECCION DE SISTEMAS DE AGUA POTABLE Y DE ALCANTARILLADO"

TEMA No. 7.9-C

PROGRAMACION LINEAL

ING. OSCAR M. ROBLES SANCHEZ

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

Marzo 1974

PROGRAMACION LINEAL

Para entender la programación lineal tenemos que definir primeramente el problema de optimización y la programación matemática.

El problema de optimización es aquél en el que se nos ofrece como solución un conjunto de alternativas de las cuales deseamos seleccionar aquélla que nos optimice la cifra de mérito. La alternativa que optimice (maximizar o Minimizar) la cifra de mérito es aquel parámetro variable involucrado en la definición del problema con respecto al cual jerarquizamos las soluciones alternativas.

Los métodos a usar en los problemas de optimización pueden - ser:

1) Análisis numérico
2) Teoría Lagrange
3) Cálculo diferencial
4) Teoría del control
5) Programación matemática
6) Teoría de juegos
7) Teoría de decisiones
8) Programación dinámica, etc.

El tipo de enfoque de acuerdo con la técnica o metodología a usar, debe ser en cualquier caso la siguiente secuela:

Definir el problema

Especificar la cifra de mérito

Planteamiento del modelo matemático

Seleccionar la técnica de solución

Aplicaciones de la solución del problema

Para aceptar el flujo anterior es necesario efectuar un análisis heurístico, que es aquél que de acuerdo a ciertas suposiciones para acortar el problema, ver si éstas son verdaderas al solucionarlo y si no es así volver de nuevo al principio y hacer otras suposiciones.

Los problemas de programación matemática son una de las variantes del problema de optimización, siendo su característica principal que en su planteamiento está integrado con ecuaciones algebráicas.

Un problema de programación matemática consiste en determinar formas de proceder de manera de utilizar en forma eficiente los recursos disponibles, de manera de alcanzar ciertas metas u objetivos prefijados. Para problemas de este tipo debemos plantear un modelo matemático que exprese las relaciones existentes entre todas las variables del problema a resolver.

Un modelo matemático está constituido por una función objetiva sujeta a una serie de restricciones.

Función objetiva es la expresión matemática del modelo donde están incluidas las metas prefijadas para la solución de un problema.

Por ejemplo:	Minimizar	Costos de transporte
	Minimizar	Costos de producción
	Maximizar	Utilidades
	Maximizar	Beneficios sociales
	Maximizar	Eficiencias
	Minimizar	Tiempos muertos de maquinaria, etc.

Caracterizándose estos problemas por el gran número de soluciones que tienen.

Restricciones - son las expresiones matemáticas del modelo que indican las limitaciones de recursos, ciertos niveles de aspiración o satisfacer niveles de consistencia y compatibilidad.

A todas las soluciones que cumplen con las restricciones las llamaremos conjunto de soluciones básicas factibles.

Sol óptima - es aquella solución básica factible que optimiza la función objetivo.

Si las variables que resultan al plantear el modelo resultan de línea recta o lineales, o sea de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

diremos que se trata de un problema de programación lineal.

La programación lineal es una variante de la programación matemática.

En este curso no se pretende estudiar exhaustivamente la programación lineal, sino el propósito principal es ilustrar y explicar en la forma más simple posible los fundamentos de esta disciplina.

El problema general sobre programación lineal fue formulado y resuelto por primera vez en 1947 por George Dantzing y se publicó en 1951, fue el primer instrumento de programación matemática que se desarrolló para ser aplicado en forma universal.

La aplicación de la programación lineal a modelos de problemas de la vida real requiere la solución simultánea o secuencial de muchas variables y por medio de técnicas que involucran gran cantidad de cálculos. No hubiera sido posible esto sin el desarrollo paralelo del computador digital.

Para la aplicación de la programación lineal a cualquier nivel de toma de decisión, es necesario plantear los problemas clásicos que la originaron:

a) El problema del transporte
b) El problema de la producción

a).- El problema del transporte:

Vamos a considerar una serie de centros productores de un cierto artículo o producto $\underline{n}$ centros productores con capacidad de producir productos dados por el vector:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, ai, \dots, a_n)$$

ai = Cantidad producida en el centro productor i por unidad de tiempo.

m centros consumidores de este artículo, con requerimientos dados por el vector $\bar{b}$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, bj, \dots, bm)$$

bj = requerimientos en el centro consumidor j por unidad de tiempo.

Se conoce además lo que nos cuesta mandar o enviar una unidad de artículo de cada centro productor a cada centro consumidor, dados en la siguiente matriz de costos:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & c_{ij} & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

c_{ij} = Costo de enviar un artículo del centro productor i al consumidor j

El problema consiste en surtir los centros consumidores con los centros productores de manera que el costo total de transporte sea mínimo.

Las incognitas se pueden plantear en la siguiente matriz:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & x_{ij} & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

x_{ij} = Cantidad enviada del centro productor i al consumidor j.

Planteamiento del modelo matemático.

Objetivo minimizar z =

$$\begin{array}{l} c_{11} x_{11} + c_{12} x_{12} + \cdots + c_{1m} x_{1m} + \\ + \ c_{21} x_{21} + c_{22} x_{22} + \cdots + c_{2m} x_{2m} + \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ + \ c_{n1} x_{n1} + c_{n2} x_{n2} + \cdots + c_{nm} x_{nm} \end{array} \quad \text{Función objetivo}$$

Restricciones:

$$\text{Centros Productores} \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m} \leq a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m} \leq a_2 \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm} \leq a_n \end{array} \right.$$

$$\text{Centros Consumidores} \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{n1} \geq b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{n2} \geq b_2 \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ x_{1m} + x_{2m} + \cdots + x_{nm} \geq b_m \end{array} \right.$$

Restricción de Factibilidad $\quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall \ i \ j$

$i = 1, \ldots, n$

$j = 1, \ldots, m$

Simplificando el modelo:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j \qquad j = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall \ ij$$

b).- El problema de la producción:

Una fábrica tiene posibilidad de producir m artículos en los cuales intervienen n recursos, sea a_{ij} = a la cantidad del recurso i necesaria para producir una unidad del artículo j; las cantidades disponibles de cada uno de los recursos se da por el vector $\bar{b}$.

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Las utilidades por unidad de artículo producido la da el siguiente vector $\bar{u}$:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

El problema consiste en encontrar las cantidades de cada uno de los artículos que debemos producir de manera que la utilidad sea la máxima.

Representación esquemática del problema

Matriz de composiciones

Recurso \ Artículo	1	2	3		m	Disponibilidades
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	. . .	a_{1m}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	. . .	a_{2m}	b_2
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	. . .	a_{nm}	b_n

Utilidades Unitarias	U_1	U_2	U_3	. . .	U_m
Cantidad a Producir	X_1	X_2	X_3	. . .	X_m

Función objetivo

$$\text{Max. } z = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + \ldots + U_m X_m$$

Sujeto a:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1m} x_m \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2m} x_m \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots + a_{nm} x_m \leq b_n$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall\, i$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

Interpretación geométrica de la programación lineal:

Sea un problema del siguiente tipo:

$$\text{Opt.} \left\{ \begin{matrix} \text{Max} \\ \text{Min} \end{matrix} \right\} z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

Sujeto a:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$ semi espacio 1

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \geq b_2$ semi espacio 2

$\vdots$

$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i$ semi espacio i

$\vdots$

$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 \geq b_n$ semi espacio n

$x_1, x_2 \quad 0$

El conjunto de restricciones nos representa una serie de inecuaciones o conjunto de semiespacios, y la intersección de ellos