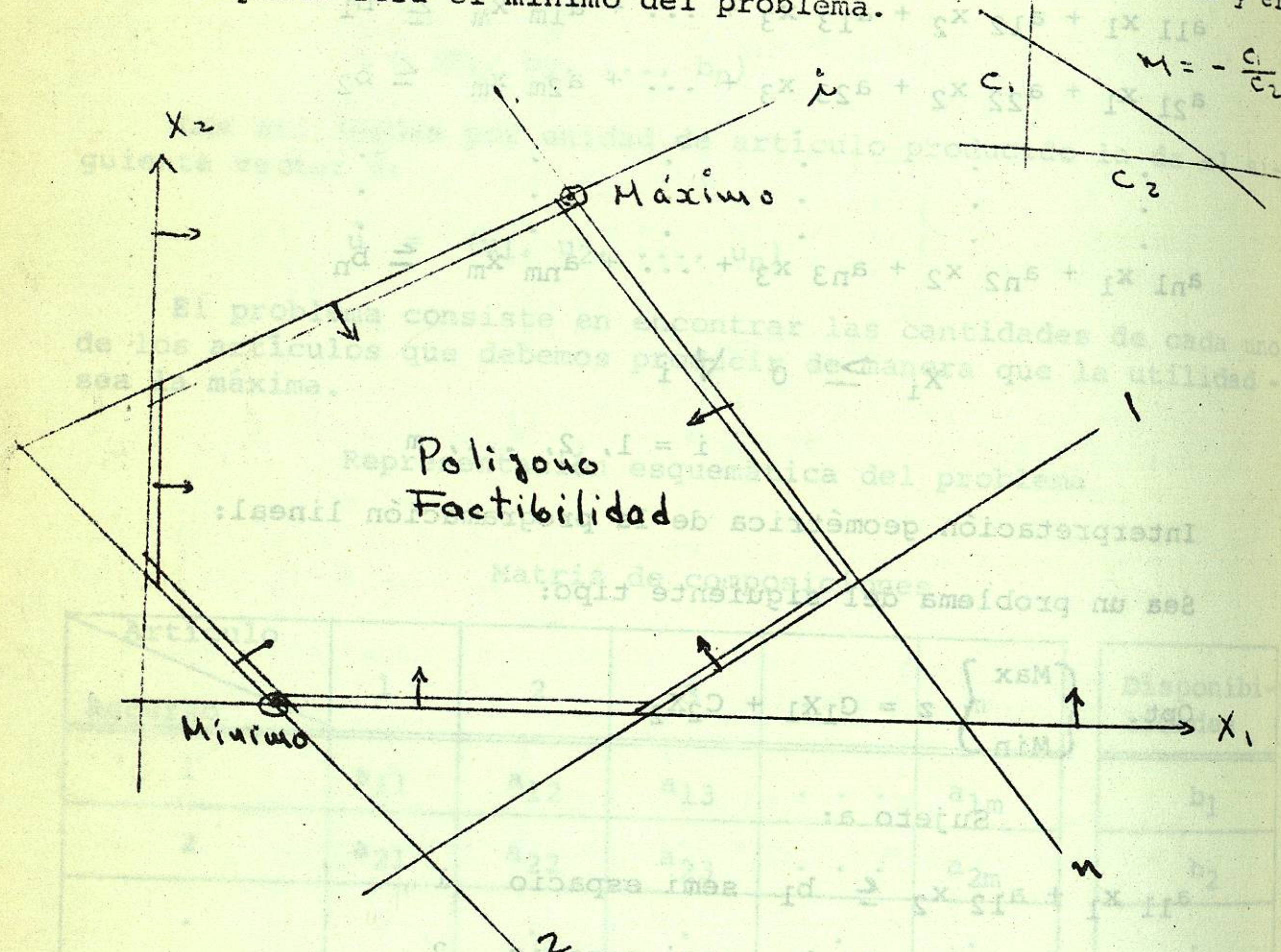
nos define el conjunto de sols. basicas factibles o poligono de factibilidad. La función objetivo representa una serie de rectas paralelas o familia de rectas con pendiente igual a $-\frac{C_1}{C_2}$; si colocamos esta familia de rectas sobre el polígono de factibilidad el primer punto que toque será el máximo del problema y el último punto será el mínimo del problema.



$$z = C_1 x_1 + C_2 x_2$$

$$x_2 = \frac{-C_1}{C_2} x_1 + \frac{z}{C_2}$$

$$m = \frac{-C_1}{C_2} \qquad b = \frac{z}{C_2}$$

Ejemplo:

$$\text{Max } z_1 = 2x_1 + 3x_2$$

S.A.

1) $x_1 + 2x_2 \geq 10$

2) $x_1 + x_2 \leq 15$

3) $-x_1 + x_2 \leq 5$

4) $5x_1 + 2x_2 \geq 20$

5) $x_1 \leq 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

1o.- Convertir las desigualdades en igualdades:

1) $x_1 + 2x_2 = 10$

2) $x_1 + x_2 = 15$

3) $-x_1 + x_2 = 5$

4) $5x_1 + 2x_2 = 20$

5) $x_1 = 7$

2o.- Definir su posición en el sistema $x_1 - x_2$

1) $x_1 + 2x_2 = 10$
$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$
$x_2 = 0 \quad x_1 = 10$

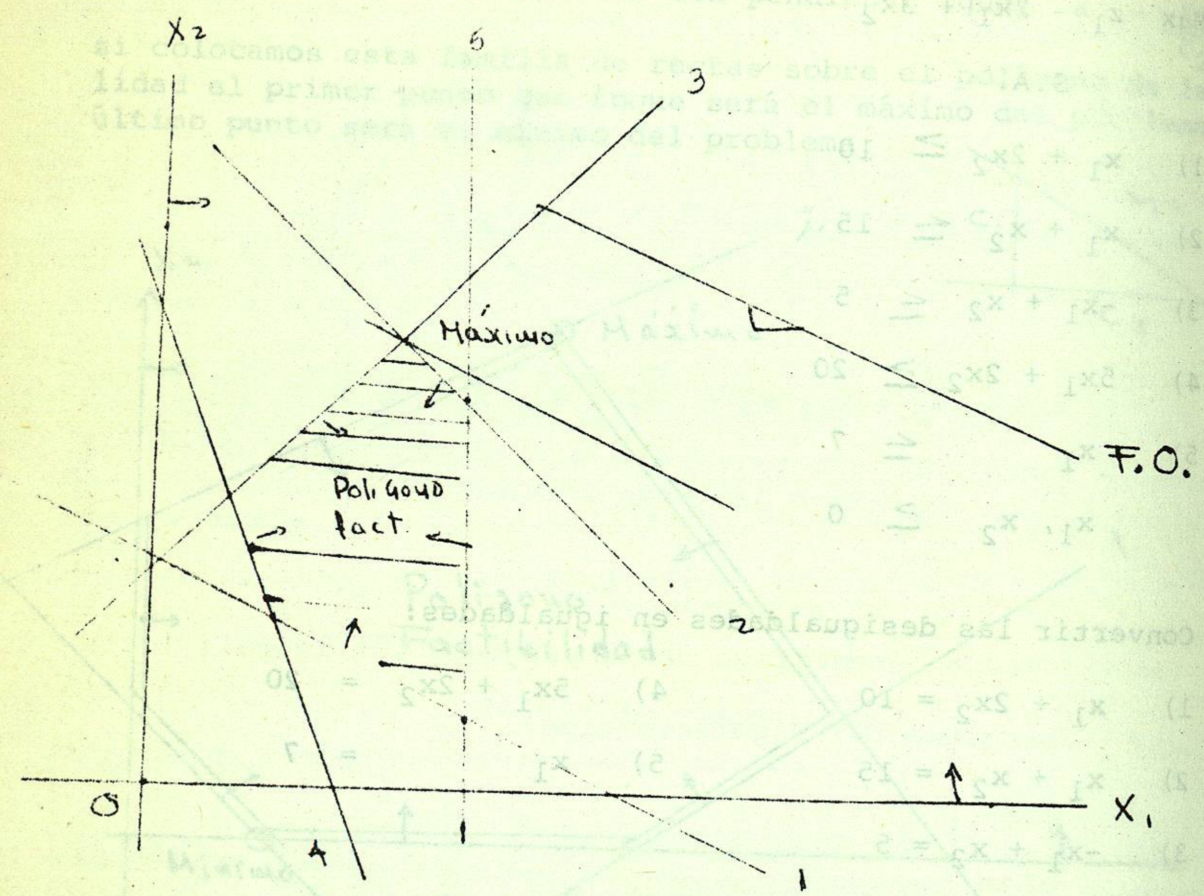
2) $x_1 + x_2 = 15$
$x_1 = 0 \quad x_2 = 15$
$x_2 = 0 \quad x_1 = 15$

3) $-x_1 + x_2 = 5$
$x_1 = 0 \quad x_2 = 5$
$x_2 = 0 \quad x_1 = 5$

4) $5x_1 + 2x_2 = 20$
$x_1 = 0 \quad x_2 = 10$
$x_2 = 0 \quad x_1 = 4$

5) $x_1 = 7$
$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$
$x_2 = 0 \quad x_1 = 7$ (ver gráfico)

3o.- Graficar los puntos anteriores:



4o.- Definir los semiespacios sustituyendo el origen:

1)	0	$\geq$	10	No	El origen no pertenece
2)	0	$\leq$	15	Sí	El origen sí pertenece
3)	0	$\leq$	5	Sí	El origen sí pertenece
4)	0	$\geq$	20	No	El origen no pertenece
5)	0	$\leq$	7	Sí	El origen sí pertenece

La intersección de los semiespacios define el conjunto de sols. básicas factibles.

5o.- Colocar en forma de la recta la función objetivo:

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{z_1}{3}$$

$$m = -\frac{2}{3} \qquad b = \frac{z_1}{3}$$

(ver gráfica)

Sol. óptimo del problema

Punto A rectas 2 y 3

$$x_1 + x_2 = 15 \qquad\qquad x_1 + 10 = 15$$

$$-x_1 + x_2 = 5$$

$$2x_2 = 20 \qquad\qquad x_1 = 5$$

$$x_2 = 10$$

$$\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2 = 2(5) + 3(10) = \underline{\underline{40}}$$

Algoritmos de la programación lineal:

Cuando el número de variables es mayor a dos, la solución gráfica no es adecuada y será necesario desarrollar métodos analíticos que con la ayuda de las computadoras nos permitirá solucionar el problema, los principales algoritmos de la programación lineal son:

a).- Algoritmo Simplex
b).- Algoritmo Dual Simplex
c).- Algoritmo Simplex Revisado
d).- Algoritmo para el problema del transporte
e).- Programación lineal entera

Discutiremos en forma general, por cuestión de tiempo, los primeros dos.

Algoritmo Simplex. Método desarrollado por dontzing, consiste en partir de una solución básica factible y probar si se han llegado al óptimo, en caso de que no, pasar a otra solución básica factible que mejore la solución anterior, de manera de llegar en un número límite de pasos a la solución óptima, siendo un procedimiento iterativo de cómputo.

Pasos del método:

a).- Convertir las desigualdades en igualdades (las restricciones) introduciendo las variables de holgura, que valdrán cero en la función objetiva.

b).- Si no se obtiene la solución básica factible de partida del punto anterior, introducir las variables artificiales que --

siempre estarán obligados a un valor cero.

c).- Formar la tabla de solución.

d).- Con un criterio determinado optimizar al problema.

Algoritmo Dual Simplex: El problema de la dualidad en la programación lineal, consiste en que a cada problema de programación lineal existe asociado otro problema de optimización llamado problema dual y al primero se le llama primal, dándonos una interpretación económica del problema primal.

Si el problema primal es de la forma:

$$\text{Min} \quad z = (\bar{c}, \bar{x})$$

$$\text{S.A.} \quad A\bar{x} \geq \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq 0$$

Su correspondiente dual será

$$\text{Min} \quad w = (\bar{b}, \bar{y})$$

$$\text{S.A.} \quad A^1 \; \bar{y} \leq \bar{c}$$

$$\bar{y} \geq 0$$

Observándose que en el dual hay tantos variables como restricciones tenga el primal y tantas restricciones como variables existan en el primal.

Condición para aplicar la dualidad

Primal	Dual
Max z $\leq$	Min w $\geq$
Min z $\geq$	Max w $\leq$

Max z = Min w

Min z = Max w

Para la solución del dual se emplea un procedimiento semejante que el algoritmo simplex.

Para comprender en forma objetiva, los procedimientos Gráfico, Simplex, Dual Simplex, se expondrá a continuación el planteamiento de dos problemas sencillos.

Ejemplo #1: En una fuente de agua existe una captación máxima mensual de 5×10^6 M^3 de agua, esta agua tiene solamente dos usos beneficiales, agua para riego y agua para uso municipal e industrial, los beneficios netos que se obtienen para cada uso son respectivamente \$20/1000 M^3 y \$50/1000 M^3.

La demanda máxima para riego es de 4×10^6 M^3 de agua y la demanda máxima para uso municipal e industrial es de 3×10^6 M^3 de agua, existe una restricción de que debe abastecerse como mínimo 1×10^6 M^3 de agua para la ciudad y la industria.

Qué cantidad de agua debe dedicarse para cada uso de manera que los beneficios netos mensuales sean máximos.

- Solución -

Este problema es típico de optimización y la herramienta para su solución será la programación lineal.

Modelo Matemático

$$\text{Max ben. netos} = 20\, X_1 + 50\, X_2$$

S. A.

	1	$X_1 \leq 4000$	(Demanda Max para riego)
	2	$X_2 \leq 3000$	(Demanda Max Municipio e Industria)
Todo en/1000M^3	3	$X_2 \geq 1000$	(Restricción de abastecimiento Min.)
	4	$X_1 + X_2 \leq 5000$	(Restricción de Max. disponibilidad)
	5	$X_1 \geq 0$	(Restricción de factibilidad)
	6	$X_2 \geq 0$	

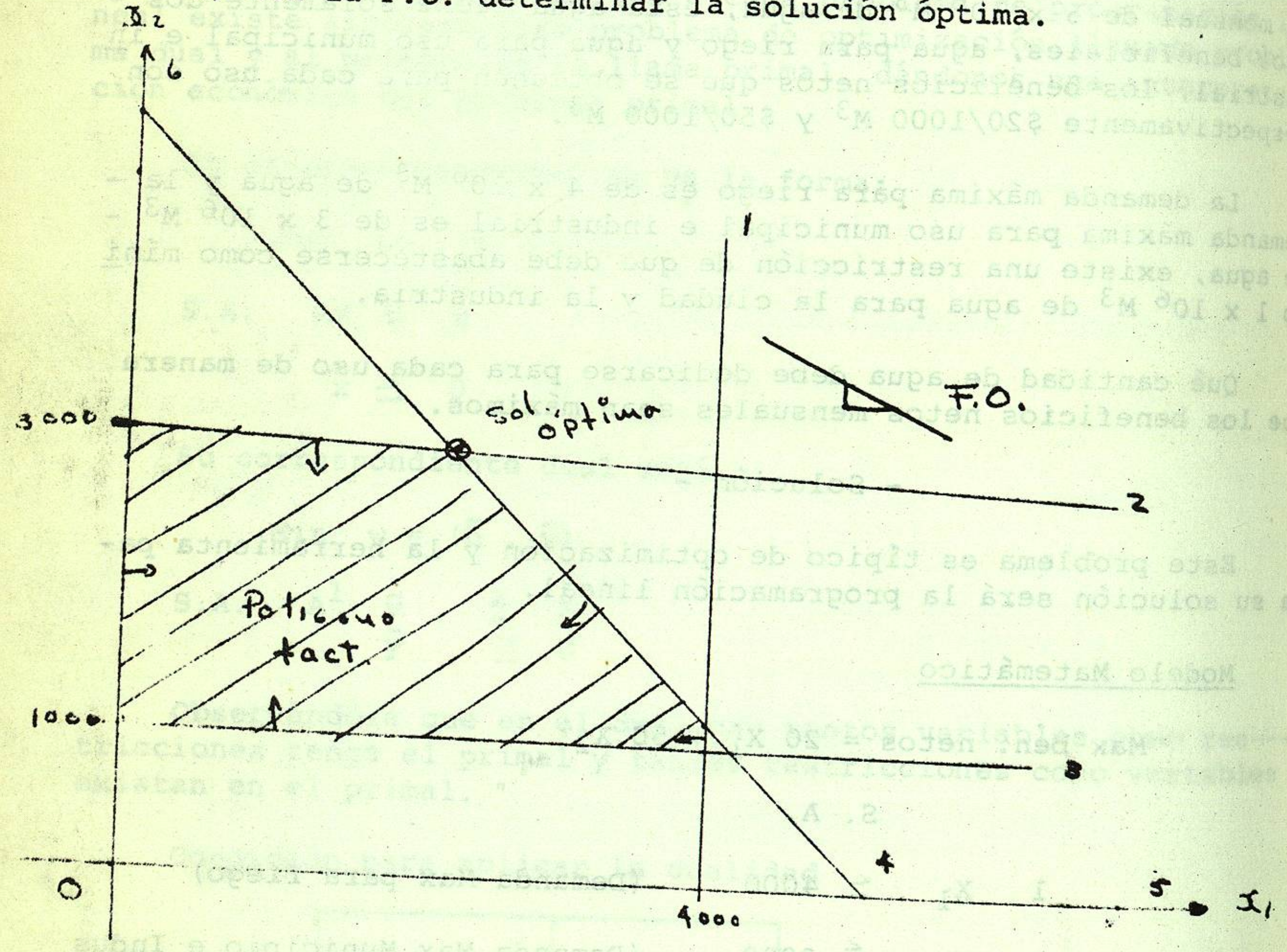
X_1 = Cantidad de agua óptima para riego.

X_2 = Cantidad de agua óptima para uso municipal e industrial.

Es un problema de dos variables x_1, x_2 y se solucionará gráficamente para mayor facilidad.

Pasos

a) Graficar los hiperplanos
b) Determinar el semiespacio de las inecuaciones
c) Determinar plígono de factibilidad
d) Con la F.O. determinar la solución óptima.



Max $z = 20x_1 + 50x_2$

$50x_2 = z - 20x_1$

$x_2 = \frac{z}{50} - \frac{20}{50}x_1$

$y = b - mx$

$m = -\frac{2}{5}$

$b = \frac{z}{50}$

Max ler. punto que toque.

Sol. óptima intersección de 4 y 2

$x_2 = 3000$ $\qquad x_2 = 3000$

$x_1 + x_2 = 5000$

$x_1 = 5000 - 3000$

$x_1 = 2000$

Max ben. netos $= 20x_1 + 50x_2 = 20(2000) + 50(3000)$

$= 40000 + 15000$

Max ben netos = \$190,000.00/mes

Conclusiones:

a) Para Max Ben. 2000000 M^3 para riego
3000000 M^3 para uso municipal e industrial

b) No existe desperdicio de la máxima disponibilidad de agua.

Ejemplo #2: Se trata de un sistema de administración de calidad de agua aplicada al campo de los recursos hídricos, consistente en una fábrica y una planta de tratamientos de desechos. La fábrica elabora un producto que se vende al precio unitario de -- \$10.00 por tonelada. El costo unitario de producción es de \$2.70 por tonelada. El gerente de la fábrica desea saber cuál es el nivel óptimo de producción. El problema se complica por el hecho - que, durante el proceso de fabricación, se generan tres unidades de desechos por cada tonelada de producto fabricado; se tiene una planta de tratamiento de desechos, que reduce la concentración de contaminantes en un 85% y el lugar de desague de los desechos es a un cuerpo receptor (río, drenaje) que pasa cercano, qué cantidades de desecho debe descargarse directamente al cuerpo receptor y qué cantidad de desecho tratado debe descargarse al cuerpo receptor. El precio del tratamiento es de \$0.50 por unidad de desechos que se reciba y la planta de tratamientos tiene una capacidad máxima de 9 unidades que se considera una restricción física.

El problema se completa por dos consideraciones sobre la administración de calidad del agua (1) existe un impuesto a los --- efluentes que se descargan al cuerpo receptor que es de \$1.76 por unidad de desecho (2) las autoridades han establecido un máximo -

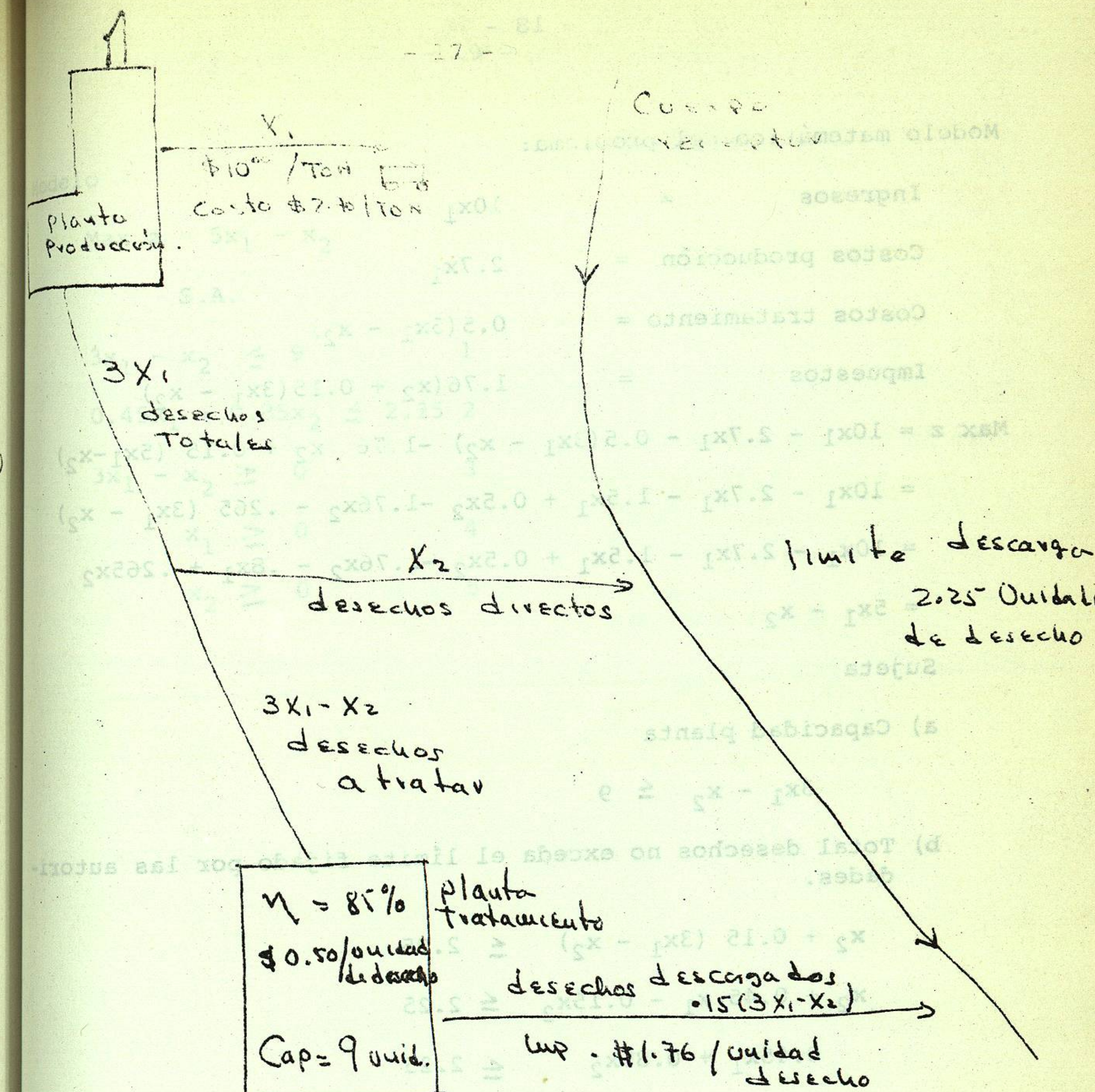
de 2.25 unidades de desecho para cada fabricante. Se considera - esto una restricción política.

Planteamiento:

Nivel óptimo producción	x_1
3 Unidades de desecho por tonelada de producto fabricado	$3x_1$
Unidad de desecho	(M^3/seg, Miles de M^3/día, etc.)
Unidades desechos directos al cuerpo receptor	x_2
Unidades desechos tratados al cuerpo receptor	$(3x_1 - x_2)$

Representación esquemática:

El problema se representa en el siguiente esquema que indica el proceso enunciado.



¿Encontrar el nivel de producción x_1 y la cantidad de desecho que se descargará sin tratamiento previo x_2, de manera de maximizar las ganancias netas (ingresos-costos de producción-costos tratamiento-impuestos) y que no se exceda la capacidad física de la planta de tratamiento, a los límites de impuesto y de desechos por descargar.