Modelo matemático del problema:

Ingresos	=	$10x_1$
Costos producción	=	$2.7x_1$
Costos tratamiento	=	$0.5(3x_1 - x_2)$
Impuestos	=	$1.76(x_2 + 0.15(3x_1 - x_2))$

$$\text{Max } z = 10x_1 - 2.7x_1 - 0.5(3x_1 - x_2) - 1.76\ x_2 + 0.15\ (5x_1 - x_2)$$

$$= 10x_1 - 2.7x_1 - 1.5x_1 + 0.5x_2 - 1.76x_2 - .265\ (3x_1 - x_2)$$

$$= 10x_1 - 2.7x_1 - 1.5x_1 + 0.5x_2 - 1.76x_2 - .8x_1 + .265x_2$$

$$= 5x_1 - x_2$$

Sujeta

a) Capacidad planta

$$3x_1 - x_2 \leq 9$$

b) Total desechos no exceda el límite fijado por las autoridades.

$$x_2 + 0.15\ (3x_1 - x_2) \leq 2.25$$

$$x_2 + 0.45\ x_1 - 0.15x_2 \leq 2.25$$

$$0.45x_1 + 0.85x_2 \leq 2.25$$

c) Restricción lógica de que la dirección del flujo debe ser hacia el desague, pues la diferencia puede resultar negativa que implicaría que los desechos podrían ir de la planta de tratamiento $3x_1 - x_2 \geq 0$ a la fábrica, lo cual es ilógico.

d) Restricción de factibilidad

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

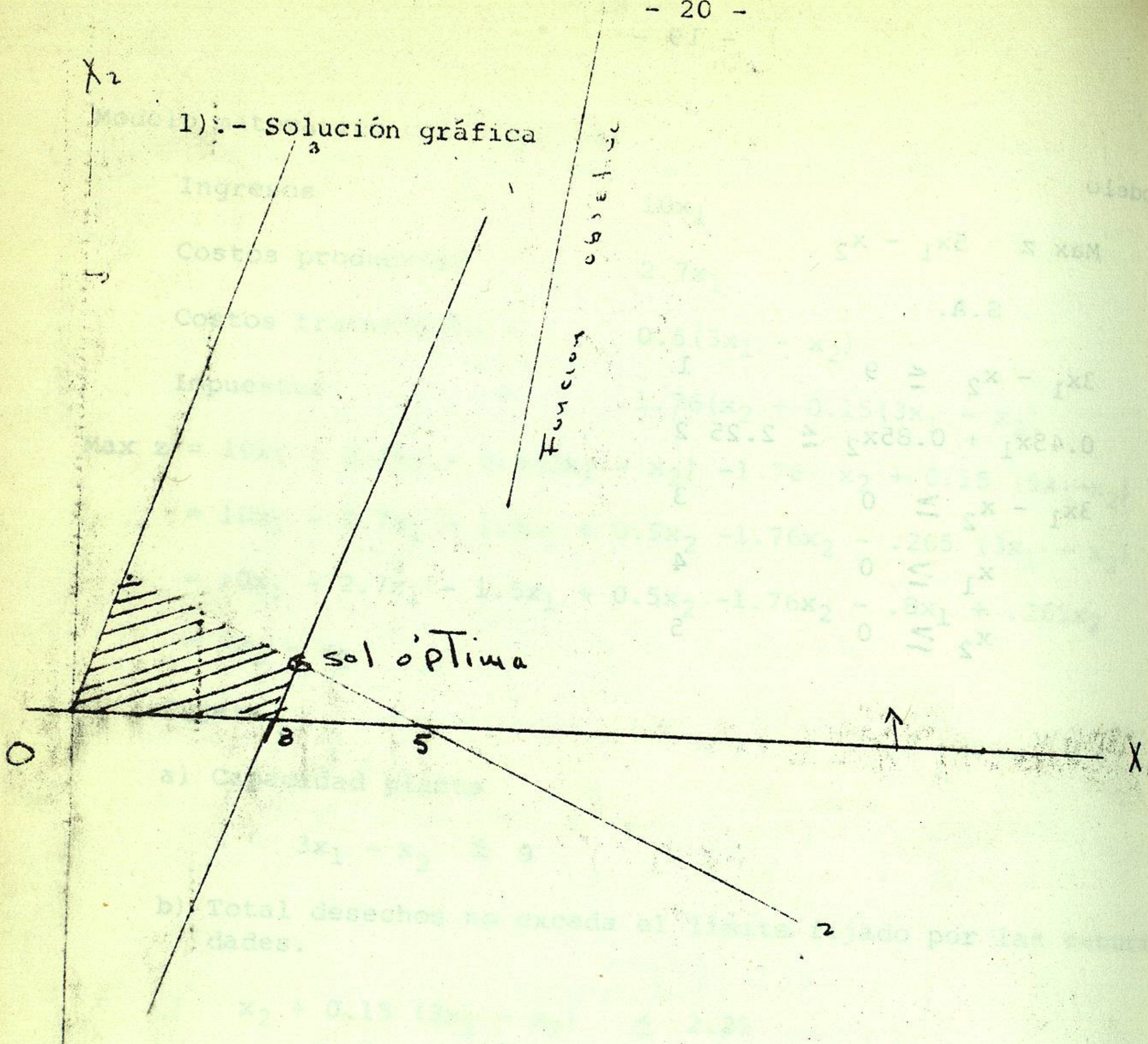
Modelo

$$\text{Max } z = 5x_1 - x_2$$

S.A.

$3x_1 - x_2 \leq 9$	1
$0.45x_1 + 0.85x_2 \leq 2.25$	2
$3x_1 - x_2 \geq 0$	3
$x_1 \geq 0$	4
$x_2 \geq 0$	5

1).- Solución gráfica



$$\text{Max } z = 5x_1 - x_2$$

$$z = 5x_1 - x_2$$

$$-x_2 = z - 5x_1$$

$$x_2 = 5x_1 - z$$

$m = \frac{5}{1}$ $\quad b = -z$ (se invierte la forma de sol. de max. y min. para obtener el max.)

Solución rectas 1 y 2

$$3x_1 - x_2 = 9 \qquad (0.85)$$

$$0.45x_1 + 0.85x_2 - 2.25 \qquad (1)$$

$$2.55x_1 - .85\ x_2 = 7.65$$

$$0.45x_1 + .85\ x_1 = 2.25$$

$$3x_1 = 10$$

$$x_1 = \frac{10}{3} = 3.3$$

$$x_1 = 3.3$$

$$3(3.3) - x_2 = 9$$

$$9.9 - x_2 = 9$$

$$-x_2 = 9 - 9.9$$

$$x_2 = 0.9$$

$$\text{Max } z = 5\ (3.3) - 0.9 = 16.5 - 0.9 = 15.6$$

Max z = 15.6 \$ $\qquad$ beneficio neto

Conclusiones.

a).- Para obtener el máximo beneficio neto de \$15.6, es necesario producir 3.3 toneladas de producto y de las 9.9 unidades de desecho que se producen descargar 0.9 unidades directas al cuerpo receptor y tratar el resto, que son 9 unidades, dando un desecho lineal al cuerpo receptor de 1.35 unidades.

b).- La planta estará trabajando a su máxima capacidad, el cuerpo receptor recibirá la cantidad máxima permitida de contaminantes y el flujo será siempre positivo.

2).- Solución por método simplex.

Para simplificar este método, se prescindirá de la 3era. restricción pues se observa en el método gráfico, que no influye en la solución óptima, quedando el siguiente modelo:

$$\text{Max } z = 5x_1 - x_2$$

S.A.

$$3x_1 - x_2 \leq 9$$

$$0.45x_1 + 0.85x_2 \leq 2.25$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Convertir desigualdades en igualdades:

$$\underbrace{3x_1 - x_2}_{\text{Variables reales}} + \underbrace{x_3}_{} = 9$$

$$0.45x_1 + 0.85x_2 + \underbrace{x_4}_{\text{Variables holgura}} = 2.25$$

Sol. básica factible de partida

$$x_3 = 9$$
$$x_4 = 2.25$$
$$\text{Max } z = 0$$

Solucionando por el simplex:

θ	B	5	x_1	x_2	x_3	x_4
$9/3 = 3$	x_3	9	3*	-1	1	0
$\frac{2.25}{0.45} = 5$	x_4	2.25	0.45	0.85	0	1
	z	0	- 5 ↑	1	0	0
-	x_1	3	1	- 1/3	1/3	0
$\frac{0.9}{1} = 0.9$	x_4	0.9	0	1*	0.15	1
	z	15	0	- 2/3 ↑	5/3	0
	x_1	3.3	1	0	0.38	1/3
	x_2	0.9	0	1	0.15	1
	z	15.6	0	0	1.77	2/3

Sol. óptima

$$x_1 = 3.3$$
$$x_2 = 0.9$$
$$\text{Max } z = 15.6$$

Coincide con la solución anterior.

3).- Solución por Dual Simplex:

Para hacer una interpretación gráfica de este algoritmo, se prescindirá de la 3a. restricción, con fines simplificativos, ya que se observó no interviene en la solución óptima.

Primal $\quad$ $\text{Max } z = 5x_1 - x_2$

$$\text{S.A.}$$

$$3x_1 - x_2 \leq 9$$

$$0.45x_1 + 0.85x_2 \leq 2.25$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Dual $\quad$ $\text{Min } y = 9y_1 + 2.25y_2$

$$\text{S.A.}$$

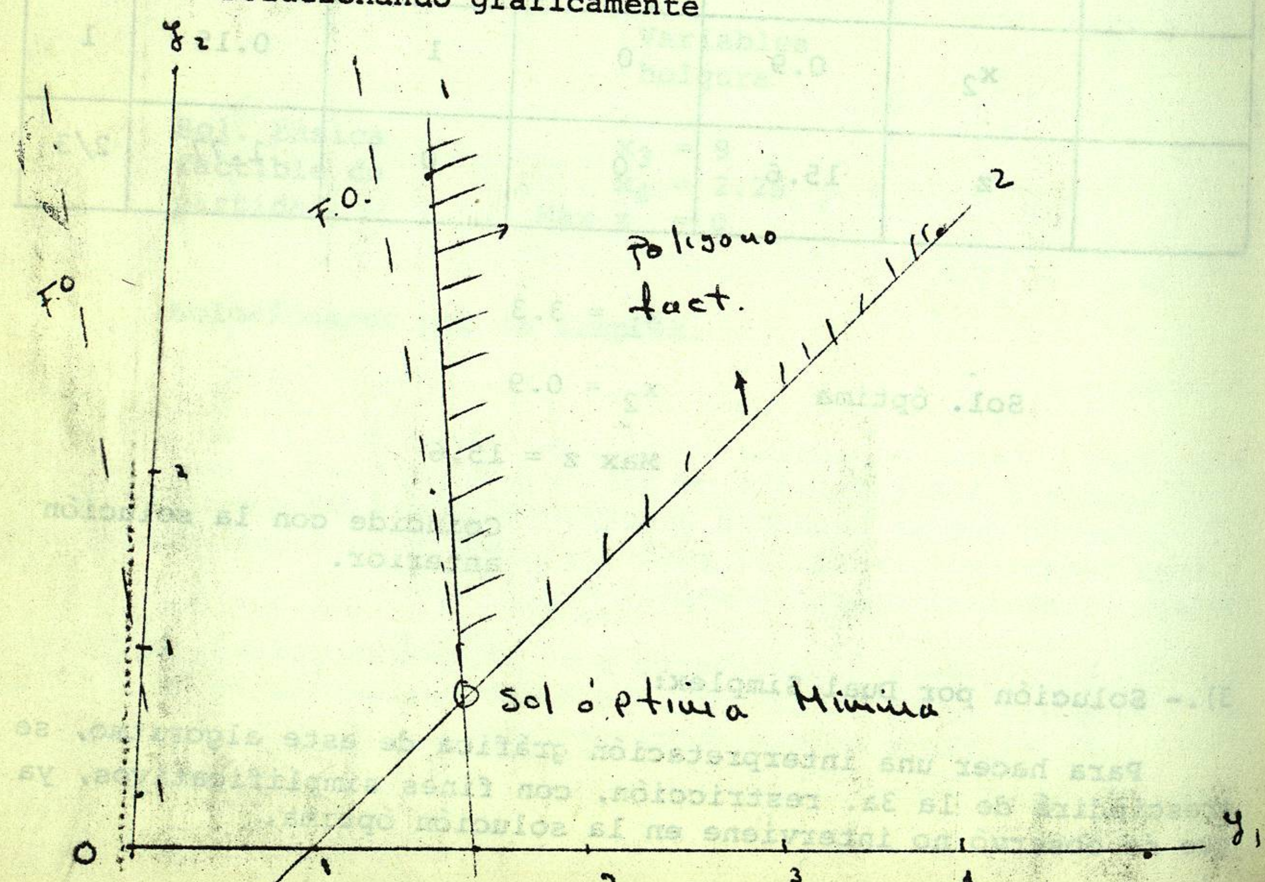
$$3y_1 + 0.45y_2 \geq 5 \qquad 1$$

$$-y_1 + 0.85y_2 \geq -1 \qquad 2$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

Solucionando gráficamente



$$y = 9y_1 + 2.25y_2$$

$$2.25y_2 = y - 9y_1$$

$$y_2 = \frac{y}{2.25} - \frac{9y_1}{2.25}$$

Sol. óptima intersección de 1 y 2 $\qquad$ $b = \frac{y}{2.25} \quad m = -\frac{9}{2.25}$

$$3y_1 + 0.45y_2 = 5 \qquad 1$$

$$-y_1 + 0.81y_2 = -1 \qquad 3$$

$$3y_1 + 0.45y_2 = 5$$

$$-3y_1 + 2.55y_2 = -3$$

$$3y_2 = 2$$

$$y_2 = \frac{2}{3}$$

$$-y_1 + 0.85\ \frac{2}{3} = -1 \qquad -y_1 = -1 - .57$$

$$y_1 = 1.57$$

$$\text{Min } y = 9y_1 + 2.25y_2 = 9(1.57) + 2.25(2/3)$$

$$= 14.1 + 1.50$$

$$\text{Min } y = \$15.6$$

$$\text{Min } y = \text{Max } z$$

Interpretación de las variables duales:

y_j = \$ / unidad adicional de recurso j

y_1 = Se relaciona con la restricción de la planta de tratamiento y es el valor adicional de beneficio neto por aumentar la capacidad de la planta en una unidad, es decir, si queremos aumentar la capacidad a 10 unidades en lugar de 9 que es lo que tiene actualmente, nuestra función objetivo se incrementa de la siguiente manera:

$$y_1 = 1.57$$

$$\text{Max } z = 15.6 + 1.57 = 17.17$$

Pues se altera la restricción $3x_1 - x_2 \leq 9$

a $3x_1 - x_2 \leq 10$

Con lo anterior, en caso de que se desee hacer, viene la toma de decisión, ¿se aumenta o no la capacidad de la planta de tratamiento?, la respuesta será afirmativa si el costo en que se incurra es menor o igual al beneficio adicional dado por y_1, es decir, Costo $\leq$ 1.57 pues aseguramos los mismos beneficios en caso de igualdad y beneficios adicionales en caso de ser menor. La respuesta será negativa si el costo es mayor a los beneficios adicionales, es decir, Costos $>$ 1.57

y_2 = Se relaciona con la restricción política de máxima contaminación en el cuerpo receptor, es decir, si las autoridades cambian su restricción de 2.25 a 3.25 (por unidad) como máximo desecho, esto aumentaría el beneficio neto de la compañía en \$0.67, por lo que, la compañía puede pedir a las autoridades un cambio en su política, pero las autoridades deberán hacer un estudio, que si consideran que los daños que ocasiona el aumento de contaminantes son mayores a la ganancia de la compañía, no lo permitirá de ninguna manera, pero si llegasen a ser menores, puede que estén dispuestos a conceder un cambio en su política.

En muchos casos el problema no puede ser enfocado mediante relaciones lineales, tornándose los problemas complejos, pero afortunadamente, se han hallado algunos algoritmos para problemas de forma especial, por ejemplo: Programación separable, programación cuadrática, programación geométrica, etc., que son casos de programación no-lineal.

B I B L I O G R A F I A

G. Hadley	"Linear Programming"	Addisson Wesley
Saul I. Gass	"Programación Lineal"	CECSA
Jauffred, Bonett, Acosta	"Métodos de Optimización"	Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A.
Ronald Frazer	"Aplicación de la Programación Lineal"	
Sasiani, Yaspan, Friedman	"Investigación Operaciones"	Limusa Wiley
	"Ingeniería de Sistemas"	C.N.I.C.
W. Hall y J. Drawp	"Ingeniería de Sistemas de los Recursos Hidráulicos"	CECSA