Que la única fuerza exterior que actúa sobre el líquido es la fuerza de la gravedad, por lo que si escogemos co aceleración debida a esta fuerza, el valor de Z sobr el eje correspondiente, y en consecuencia, los valores X y Y son 0,.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la ecuac (24) nos queda:

$$\frac{1}{m}(dp-0)=0+0+Zdz-V\cdot dV$$

$$\therefore \frac{1}{m}dp=Zdz-V\cdot dV$$

$$\text{ó: } \frac{1}{m}dp-Zdz+V\cdot dV=0$$

Si la aceleración debida a la fuerza de gravedad la den namos por $-g$ (puesto que su sentido es contrario a de Z), tenemos:

$$\frac{1}{m}dp+gdz+V\cdot dV=0$$

Dividiendo entre g e integrando, se tiene:

$$\frac{P}{mg}+Z+\frac{V^2}{2g}=K\text{ ; donde } K=\text{constante} \quad (2$$

que es la ECUACION DE BERNOULLI.

Como la ecuación de Bernoulli se ha deducido a partir de la ecuación fundamental, su integración únicamente se p de efectuar a lo largo de una línea de corriente.

Cada uno de los términos de la ecuación, tiene dimensio de energía por unidad de peso, es decir, kilogramos-met por kilogramos-peso, o más simplemente, metros del líqui

de que se trate.

Los términos de la ecuación de Bernoulli se pueden interpretar como formas de energía, en forma de metros del líquido, o cargas. Así, $\frac{P}{mg}$ es la carga por presión, Z , la carga por posición o energía potencial, y $\frac{V^2}{2g}$, la carga por velocidad, o energía cinética.

La ecuación de Bernoulli establece que la suma de las energías cinéticas, potencial y de presión, por unidad de peso, permanece constante a lo largo de una línea de corriente.

Como el flujo de un líquido a lo largo de un canal abierto o de un conducto cerrado, la velocidad de las distintas líneas de corriente son diferentes, al aplicar la ecuación de Bernoulli a una vena líquida o tubo de flujo, es necesario tomar como energía cinética, el promedio de las energías cinéticas de las distintas líneas de corriente, o en todo caso, tomar como carga por velocidad, la que corresponde a la velocidad media, modificada por un factor de corrección.

Experimentos realizados por Bazin y otros investigadores, indican que para agua con flujo turbulento en un tubo recto, el factor de corrección tiene un valor medio de 1.06 (entre 1.01 y 1.10), En cambio, para flujo laminar, el factor tiene un valor de 2.

Al aplicar la ecuación de la energía a dos puntos de una línea de corriente, se encuentra que la suma de las tres formas de energía en ambos puntos, son iguales, no impor-

tando que los distintos términos de cada miembro de la ecuación, tengan valores diferentes. Sin embargo, como los fluídos reales en movimiento, debido a su viscosidad, desarrollan fuertes tensiones de cortadura (esfuerzos cortantes), que convierten la energía mecánica en energía térmica que en muchas aplicaciones no vuelve a convertirse nuevamente en energía mecánica, esta transformación de energía debe estimarse como una pérdida. En consecuencia, para fluídos reales, al segundo miembro de la ecuación de Bernoulli se le deberá añadir un término adicional que corresponda a la pérdida mencionada y que tuvo lugar al desplazarse el líquido desde el punto inicial hasta el final considerado.

La naturaleza de las pérdidas varía con las aplicaciones, necesitándose generalmente evaluarlas en forma experimental.

Cuando entre los dos puntos en que se aplica la ecuación de la energía, se añade energía al fluído (con una bomba, por ejemplo.), esta energía se incluye como un término más del primer miembro de la ecuación de Bernoulli.

IV.- APLICACIONES DE LA ECUACION DE BERNOULLI.

4.1 PLACA DE ORIFICIO.- Cuando se intercala una placa con orificio, en una tubería que transporta un gasto constante, es posible determinar este gasto aplicando el teorema de Bernoulli.

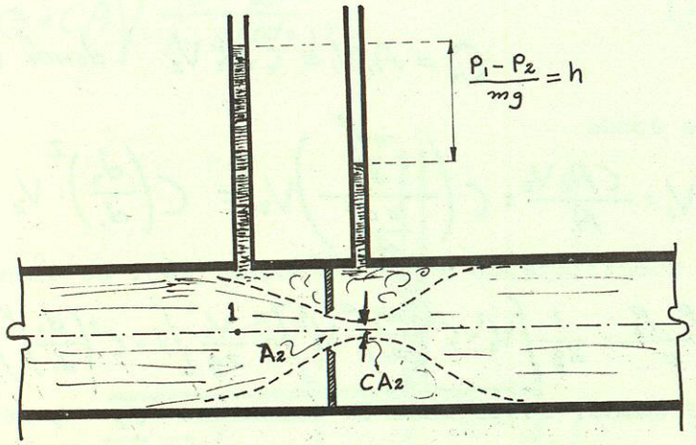

Figura 9.

En la figura 9, se muestra una placa de orificio, de sección transversal A_2, en donde la vena líquida, después de contraerse, tiene una sección neta de CA_2, donde C es un coeficiente que depende de las características del orificio.

Aplicando la ecuación de la energía entre los puntos 1 y 2, se tiene:

$$\frac{P_1}{mg} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{mg} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

Pero como Z_1, y Z_2 son iguales, reagrupando los tér
y simplificando se tiene:

$$\frac{P_1-P_2}{mg}=\frac{V_2^2-V_1^2}{2g};\ \text{ó (de la ec. 1)}:\ \frac{P_1-P_2}{w}=\frac{V_2^2-V_1^2}{2g} \qquad (2$$

Aplicando la ecuación de la continuidad entre los pun
1 y 2, se tiene:

$$Q=A_1V_1=CA_2V_2 \quad \text{donde } Q=\text{gast}$$

De donde:

$$V_1=\frac{CA_2V_2}{A_1}=C\left(\frac{\frac{\pi d_2^2}{4}}{\frac{\pi d_1^2}{4}}\right)V_2=C\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\cdot V_2$$

Y substituyendo en la ecuación (26), se tiene:

$$\frac{P_1-P_2}{w}=\frac{1}{2g}\left[V_2^2-C^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\cdot V_2^2\right]=\frac{V_2^2}{2g}\left[1-C^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]$$

De donde, despejando la velocidad V_2 , se tiene:

$$V_2=\sqrt{\frac{2g\,\frac{P_1-P_2}{w}}{1-C^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \qquad (2$$

Aplicando nuevamente la ecuación de la continuidad, s
obtiene finalmente para el gasto:

$$Q=A_1V_1=CA_2V_2=CA_2\sqrt{\frac{2g\,\frac{P_1-P_2}{w}}{1-C^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \qquad ($$

4.2 PLACA DE ORIFICIO CON DESCARGA LIBRE.- Cuando después de instalar la placa de orificio, el tubo no se continúa y en consecuencia el agua descarga libremente (figura 10), la presión en el punto 2, es cero, y en consecuencia, la ecuación para determinar el gasto queda:

$$Q=CA\sqrt{\frac{2g\,\frac{P_1}{w}}{1-C^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \qquad (29)$$

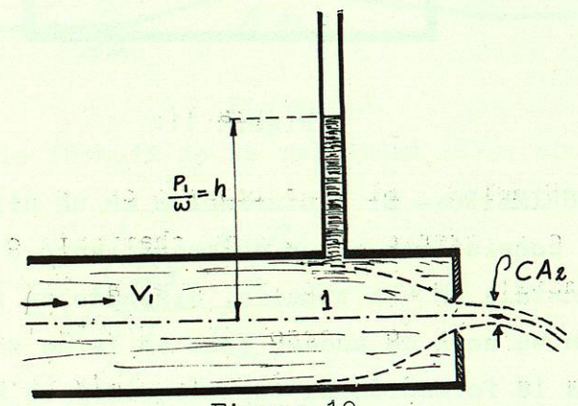

Figura 10

4.3 PLACA DE ORIFICIO EN UN TANQUE.- Cuando un fluído descarga libremente de un tanque, a travez de un orificio, (Fig. 11), como la sección en el punto 1 , es muy grande con respecto a la sección contraída en el punto 2, el término

$$C^2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4$$

es prácticamente cero, y la ecuación queda, para calcular el gasto:

$$Q=CA_2\sqrt{2g\frac{P_1}{w}} \qquad (30)$$

(Teorema de Torricelli).

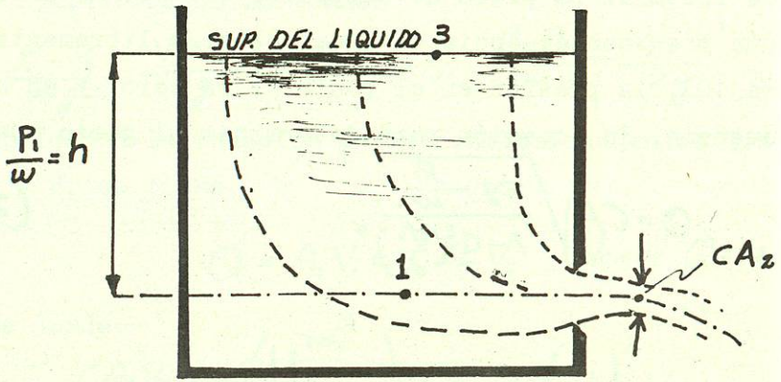

Figura 11.

4.4 VENTURIMETRO.- El venturímetro es un dispositivo (Fig. 12), consistente en un estrechamiento o garganta que se instala en una tubería, diseñado en forma tal, tanto en su zona de acceso como en la de salida, que se evita la formación de turbulencia y se asegura una variación uniforme de las trayectorias de las líneas de corriente.

Como por no haber contracción menor a la sección de la garganta, la ecuación de la continuidad para este caso es:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

donde Q = gasto.

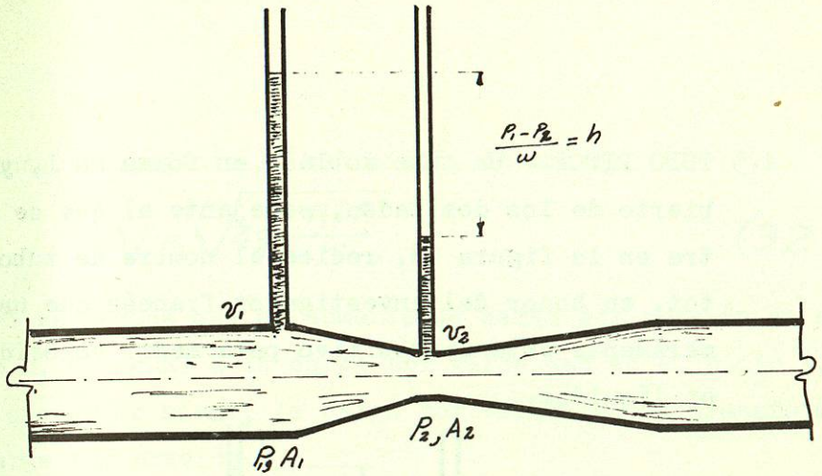

Figura 12.

Al desarrollar la fórmula de la velocidad (27), en este caso queda:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g\,\frac{P_1 - P_2}{w}}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

Como al pasar el fluído por el venturi, existen ciertas pérdidas debidas principalmente al cambio de sección de la vena líquida y a pérdidas por fricción, el gasto real es menor que el correspondiente al que se obtiene al aplicar directamente la ecuación de la continuidad, en que la discrepancia es generalmente menor del 2%.

Para corregir esta diferencia, se aplica un coeficiente de venturi C_v , y obtener de esta manera el gasto real:

$$Q = A_1 V_1 = C_v A_2 V_2 = C_v A_2 \sqrt{\frac{2g\,\frac{P_1 - P_2}{w}}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \qquad (31)$$

4.5 TUBO PITOT.- Un tubo doblado en forma de L, y abierto de los dos lados, semejante al que se muestra en la figura 13, recibe el nombre de tubo Pitot, en honor del investigador francés que usó primeramente este dispositivo para medir velocidades en líquidos.

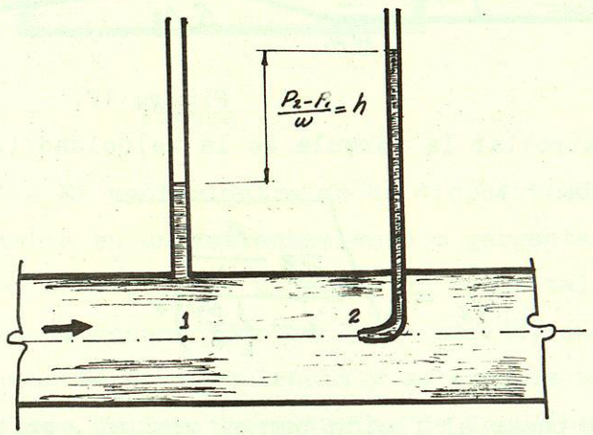

Figura 13.

Debido a la carga por velocidad, el fluído empuja a la columna contenida dentro del tubo a una altura mayor que en el punto 1, hasta quedar en equilibrio, mientras el flujo no cambie de velocidad.

Aplicando la ecuación de la energía a la línea de flujo que pasa por el orificio del tubo Pitot, se tiene: $\frac{P_1}{w}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{w}$

De donde, despejando la velocidad, se tiene:

$$V_1=\sqrt{2g\,\frac{P_2-P_1}{w}} \qquad (32)$$

De ahí se deduce que el aumento de carga por presión en el punto 2, es igual a la carga por velocidad en el punto 1, - o lo que es lo mismo, la carga por velocidad se transformó en carga por presión.

En la figura 14, se muestran unos tubos Pitot sumergidos - en un canal abierto,

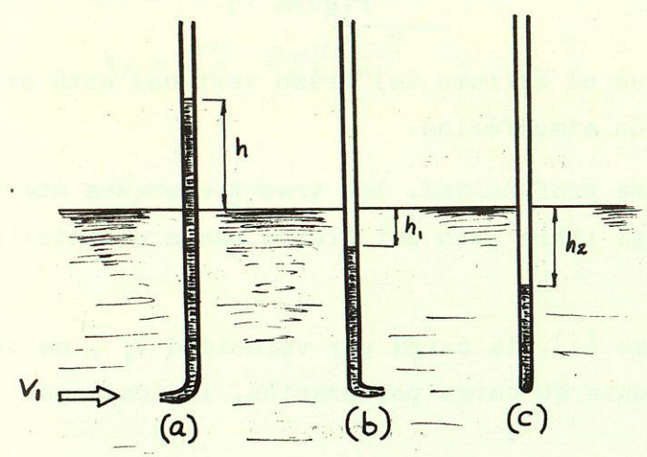

Figura 14

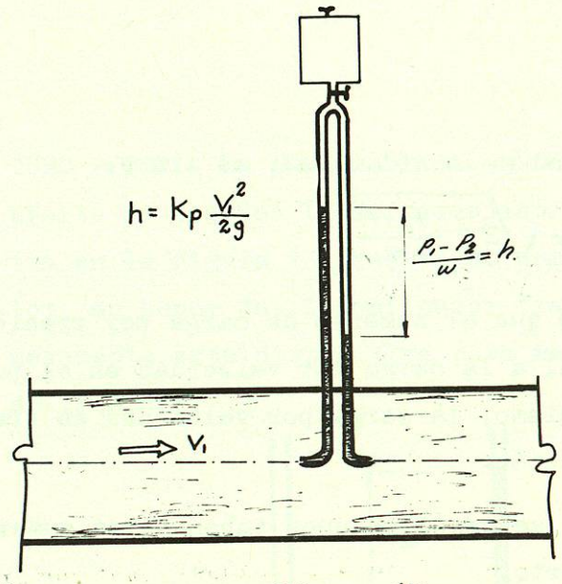

Figura 15.

en los que el extremo del brazo vertical está expuesto a la presión atmosférica.

A la misma profundidad, los tres tienen una abertura que permite el libre paso del fluído hacia el interior del tubo.

En el caso (a), la carga por velocidad V_1 , se transforma íntegramente en carga por presión, indicada por h en la figura.

En el caso (b), la abertura del tubo queda hacia aguas abajo, produciéndose una depresión en el nivel interior del tubo, cuya magnitud está indicada con h_1

En el caso (c) en que la abertura queda a 90° con la dirección del flujo, la depresión que se observa está indicada

por la letra h_2

Experimentos realizados por Darcy, mostraron que h_1 , equivale aproximadamente a $0.43 \frac{V_1^2}{2g}$, y que h_2 equivale aproximadamente a $0.68 \frac{V_1^2}{2g}$

Con el fin de facilitar las lecturas, se han ideado combinaciones de tubos Pitot, unidos en distintas formas, tal como el que se muestra en la figura 15, que permiten tomar una lectura diferencial, la que es función de la carga por velocidad:

$$\frac{P_2 - P_1}{w} = K_p \frac{V_1^2}{2g} \qquad (33)$$

De donde, la velocidad medida por el tubo es:

$$V_1 = C_p \, 2g \sqrt{\frac{P_2 - P_1}{w}} \qquad (34)$$

donde:

$$C_p = \frac{1}{\sqrt{K_p}} \qquad (35)$$

V.- TUBERIAS.

5.1 DESCRIPCION.- En hidráulica, se define como tubo a un conducto cerrado de sección circular, que fluye lleno, y generalmente a presión. Cuando el conducto va parcialmente lleno se considera como un canal -- abierto.

Puesto que las pérdidas por fricción en general --- son independientes de la presión, se aplican las - mismas leyes, tanto al flujo en tubos como en canales abiertos, y las fórmulas tienen generalmente la misma forma general.

5.2 VELOCIDADES CRITICAS EN TUBERIAS.- De acuerdo con - investigaciones realizadas originalmente por Rey--- nolds, el flujo en un tubo puede ser laminar o turbulento, según que la relación de las magnitudes: diámetro x velocidad x masa/ viscosidad del líquido, (conocida como número de Reynolds), sea menor de --- 2,100 o mayor de 3,000, valores que se toman como - promedio, a pesar de que en algunos casos pueden -- excederse considerablemente bajo condiciones espe-- ciales de experimentación.

El número de Reynolds es adimensional, por lo que - -- su valor es independiente del sistema de unida-- des empleado. A la relación: viscosidad/ masa, se - le llama Viscosidad Cinemática γ , por lo que - el número de Reynolds se le puede expresar así:

$$N_R = \frac{DV\rho}{\mu} = \frac{DV}{\gamma}$$

Donde:

D	Diámetro	(metros)
V	Velocidad	(metros por seg
ρ	Masa	(kgs.-seg.2/mts.
μ	Viscosidad	(kgs.-seg./mts.
γ	Viscosidad cinemática	(mts.2/seg.)

Cuando la velocidad de flujo en una tubería, es de magnitud que el número de Reynolds se acerca a los lores mencionados anteriormente, se le llama veloc crítica o velocidad límite.

5.3 ANALISIS DE VELOCIDADES.- En flujo laminar, aunque partículas de líquido se mueven longitudinalmente, pan sucesivamente la misma posición transversal re va, es decir, las líneas de corriente son paralela pero cerca del eje del tubo, las partículas avanza mayor velocidad, afectando, en un corte longitudin la forma de una parábola de velocidades, o en todo so, un paraboloide de revolución, en donde la veloc media es igual a la mitad de la velocidad máxima.

En cambio, en el flujo turbulento, desentendiéndos flujo irregular de las líneas de corriente, la vel dad longitudinal de cada partícula es aproximadame la misma.

Y aún cuando hay componentes transversales de velocidad, son solamente las componentes longitudinales las que -- tienen efecto en producir el movimiento del líquido considerado como un todo. Al hablar de velocidades, en -- consecuencia, se refieren siempre a las componentes en la dirección de flujo.

La distribución transversal (es sección) de las velocidades longitudinales, se ha encontrado que es propor--- cional a cierta potencia del número de Reynolds. La velocidad es prácticamente cero junto a las paredes del - tubo, creciendo rápidamente hacia el centro, por una -- corta distancia, pero en la vena central, como resultado del intercambio de cantidad de movimiento, las velocidades de las partículas tienden a igualarse. A medida que el número de Reynolds crece, la distribución de velocidades es más uniforme. De acuerdo con algunas pruebas, la relación de velocidad media / velocidad máxima, varía de acuerdo con el número de Reynolds en la si---- guiente forma:

Núm de Reynolds.	V.med./V.máx.
1,700 o menos	0.50
2,000	0.55
3,000	0.71
5,000	0.76
10,000	0.78
30,000	0.80
100,000	0.81

59568

Puesto que en la práctica, el número de Reynolds pa flujo en tuberías, normalmente tiene un valor super a 10,000, se puede establecer que en general la vel dad media es de aproximadamente el 80% de la veloci máxima. El círculo de velocidad media tiene un radi aproximadamente 3D/8. Respecto a la determinación d velocidad que se debe tomar para determinar la carg por velocidad, véase el inciso 3.4 de estas notas.

5.4 PERDIDAS DE CARGA.- Para el cálculo de las pérdidas carga en tuberías, pueden presentarse dos casos:

a) Que se conozcan las energías totales entre los d puntos de la tubería a considerar.

b) Que se conozcan el gasto y las características d tubería a usar.

En el caso a), se puede resolver utilizando el teor de Bernoulli, según se indica en el inciso 3.4 de es tas notas, necesitándose en todo caso calcular la ve cidad, para lo cual se puede uno valer de los dispos tivos descritos en los incisos 4.1, 4.2, 4.4 o 4.5, sin olvidar para este último, lo explicado en el inci 5.3.

En el caso b), es necesario determinar previamente l pérdidas de carga totales entre los dos puntos consi rados, las que según se ha explicado, significan pér das de energía que se expresan generalmente en metr kilogramos por kilogramo de fluído, o más simplemen

en metros de fluído de que se trate (véase inciso 2.4).

Las pérdidas de energía se deben principalmente a:

1o.- Fricciones en las tuberías de diámetro y rugosidad uniforme, a lo largo de tramos rectos. - Se les llama PERDIDAS MAYORES O PRINCIPALES.

2o.- A cambios de velocidad o de dirección de flujo, y se les distingue como PERDIDAS MENORES O SECUNDARIAS.

5.41 PERDIDAS MAYORES.- Significa una pérdida de carga, h_f, que se supone ocurre a tasa uniforme a lo largo del tubo mientras su sección y características permanezcan - constantes, y se les conoce como PERDIDAS DE CARGA POR FRICCION.

5.42 PERDIDAS MENORES.- Se deben a:

a) Contracción de la sección, debida a una reducción - de la sección transversal de la vena de agua, con - un correspondiente aumento de la velocidad. La reducción puede ser gradual o brusca, siendo un caso especial de contracción brusca la descarga de un -- tanque en un tubo. La pérdida de carga por contracción se expresa por: h_c

b) Pérdida de carga por aumento de secciones, h_e , con la correspondiente disminución de la velocidad.

c) Pérdidas de carga por obstrucciones, h_g , tales como compuertas o válvulas que producen un cambio de