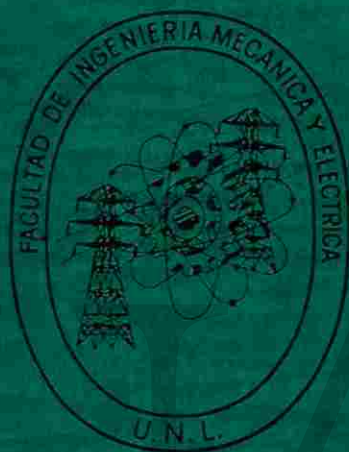


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



TEORIA DE CIRCUITOS LINEALES

EN CORRIENTE ALTERNA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA



TK 45

U5





1020082581



Ernesto Laro

6° / Semestre

I. M. E

U. A. N. L.

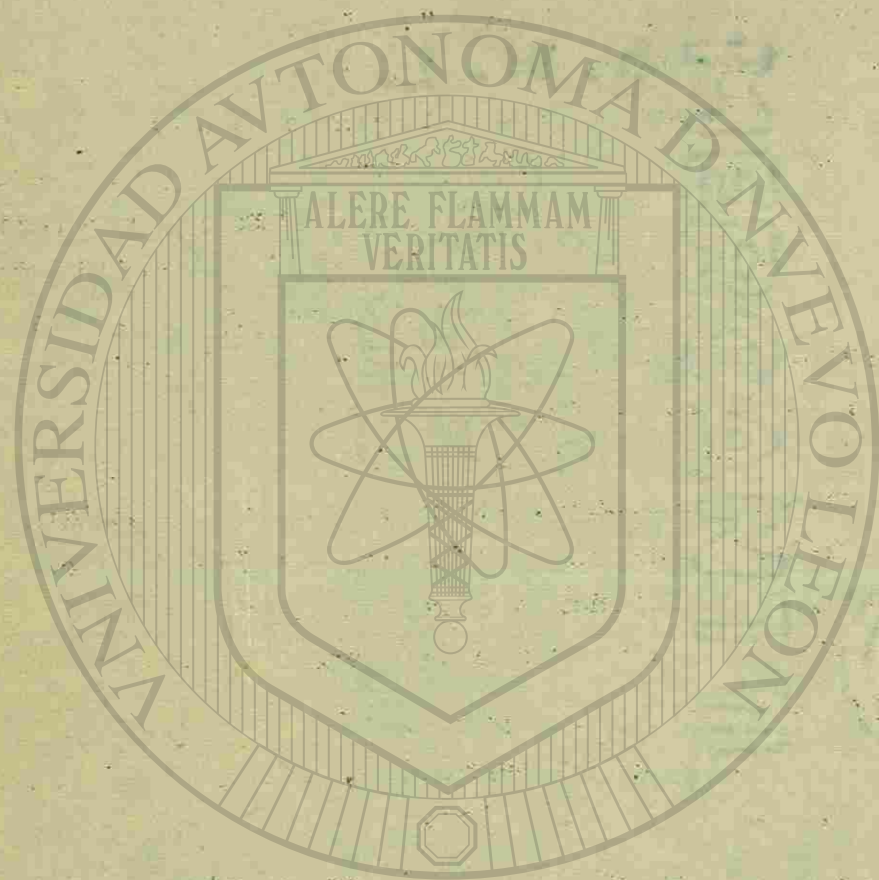
U A N L

TESIS DE GRADUACIÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

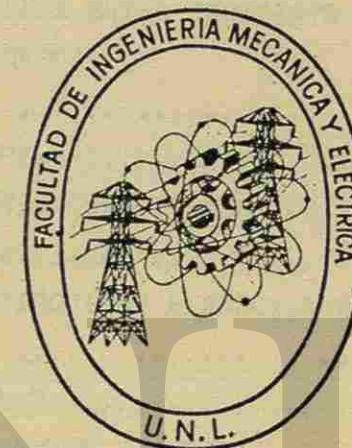


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA



U A N L

TEORIA DE CIRCUITOS LINEALES

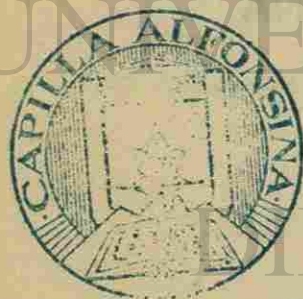
EN CORRIENTE ALTERNA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

TK 454
U5



FONDO UNIVERSITARIO

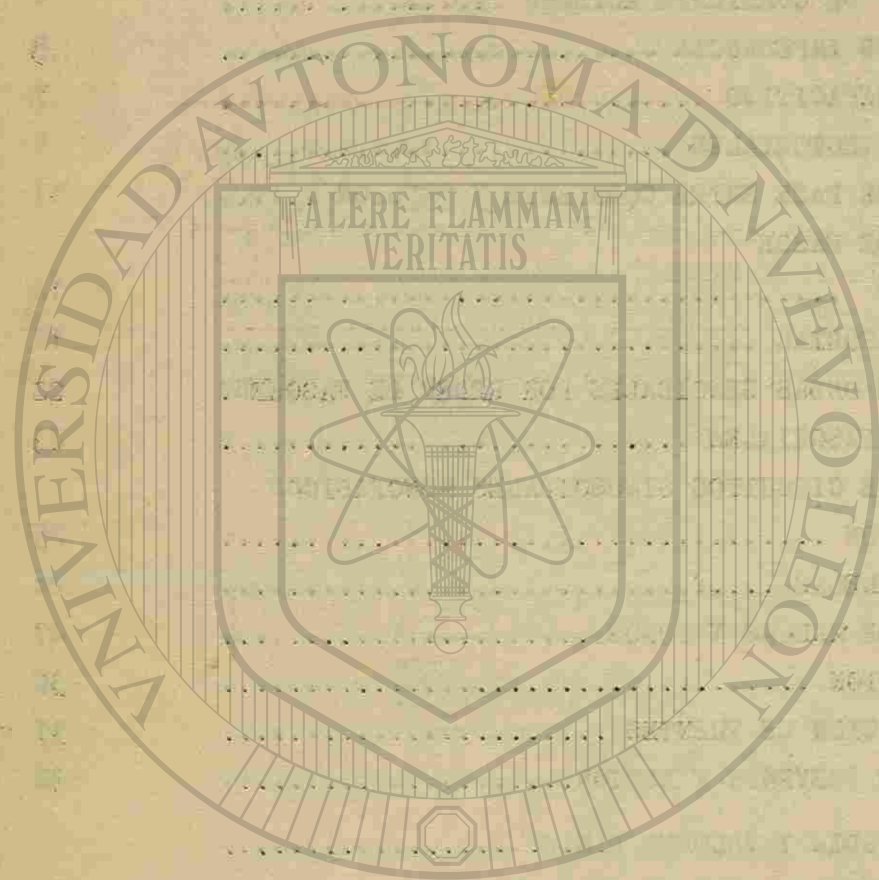
149401

INDICE

CAPITULO

Página

I	CORRIENTE ALTERNA	
	INTRODUCCION	1
	GENERACION DE CORRIENTE ALTERNA	1
	CONCEPTO DE IMPEDANCIA	5
	CIRCUITO CAPACITIVO	7
	DIAGRAMAS VECTORIALES	8
	RELACION DE FASE ENTRE CORRIENTE Y TENSION	11
II	CONCEPTO DE BASOR	
	DEFINICION	14
	ALGEBRA FASORIAL	18
	ESTUDIO DE ONDAS SENOIDALES POR REDES DE FASORES.	22
	DIAGRAMAS FASORIALES	23
III	ANALISIS DE CIRCUITOS SINUSOIDALES MONOFASICOS	
	INTRODUCCION	25
	RAMAS PARALELAS	26
	ANALISIS DE MALLAS Y NODOS	27
	SUPERPOSICION	30
	TRANSFORMACION DE FUENTES	31
	TEOREMA DE THEVENIN Y NORTON.....	32
IV	POTENCIA MEDIA Y VALORES R.M.S.	
	INTRODUCCION	34
	LA ENERGIA DE LOS ELEMENTOS SUSCEPTIBLES DE ACU-- MULARLA	34
	POTENCIA INSTANTANEA EN UN CIRCUITO CAPACITIVO ..	36
	RELACIONES DE ENERGIA Y POTENCIA EN UN CIRCUITO COMPLETO	37
	POTENCIA ACTIVA Y POTENCIA REACTIVA	39
	VALORES EFICACES	40
V	CIRCUITOS POLIFASICOS	
	INTRODUCCION	43
	CIRCUITOS TRIFASICOS EQUILIBRADOS	44
	CONEXION DELTA	45
	POTENCIA EN CIRCUITOS POLIFASICOS BALANCEADOS ...	47



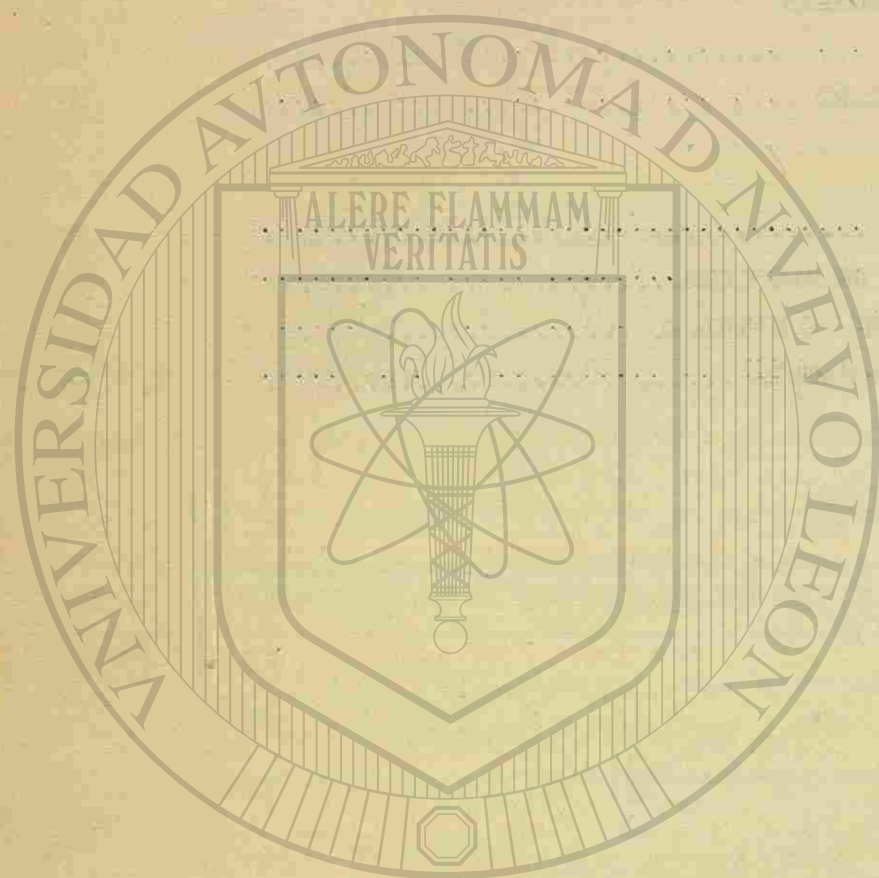
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO

Página

	FACTOR DE POTENCIA TRIFASICA	47
	MEDICION DE POTENCIA TRIFASICA	48
VI	TEOREMA DE FOURIER	
	INTRODUCCION	50
	SERIE DE FOURIER	50
VII	MATRICES	
	INTRODUCCION	54
	SUMA Y RESTA DE MATRICES.....	54
	MULTIPLICACION DE MATRICES	54
	INVERSA DE LA MATRIZ	56



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO I

CORRIENTE ALTERNA

INTRODUCCION

FUNCION EXCITATRIZ SINUSOIDAL

La mayor parte de la Industria Eléctrica se basa en la utilización de la corriente alterna. Casi toda la energía eléctrica se genera como corriente alterna, se transmite como corriente alterna y también se utiliza en la misma forma. Además se basan en la utilización de la corriente alterna procesos tales como la radio, la telefonía a larga distancia, la televisión, etc., por lo tanto, si bien el estudio de la corriente continua es importante para entender los fundamentos de la electricidad el estudio de la corriente alterna es necesario para la comprensión de la moderna práctica eléctrica.

GENERACION DE CORRIENTE ALTERNA.- Para un buen entendimiento en cuanto a la generación de la corriente alterna, es necesario conocer el siguiente principio: "Cuando un conductor se mueve en un campo magnético de tal forma que corta las líneas de flujo (fuerza) se crea una fuerza electromotriz". La dirección de fuerza electromotriz depende del sentido del movimiento del conductor, como lo muestra la siguiente figura:

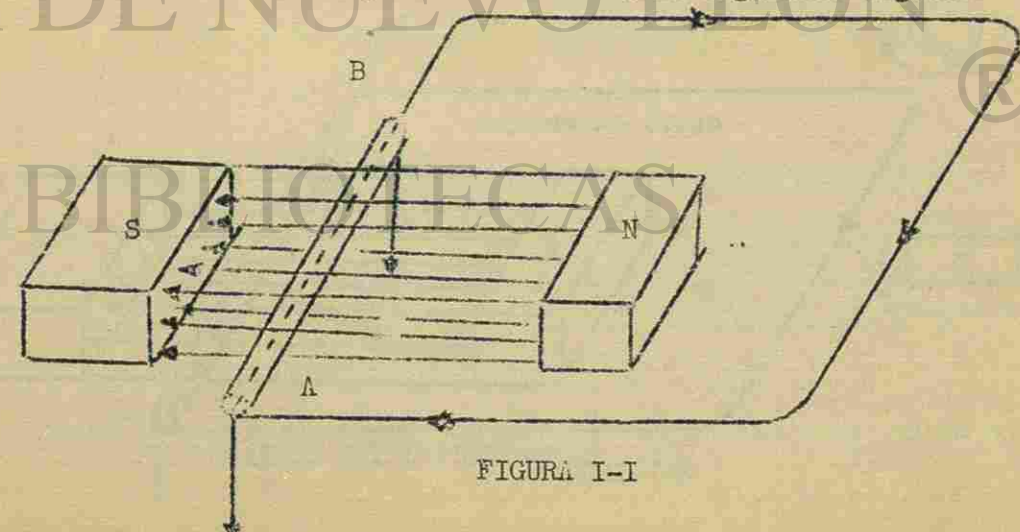


FIGURA I-I

Si el conductor A B se mueve hacia abajo a través del flujo se creará una tensión eléctrica en el conductor de A hacia B, si el conductor se mueve hacia arriba la tensión se creará en el sentido opuesto, es decir, de B hacia A.

No es necesario que esté cerrado el circuito para que la tensión tenga un sentido, de la misma forma que la tensión de una batería tiene sentido o polaridad cuando el circuito está cerrado o abierto.

La magnitud de la f.e.m. inducida depende del flujo cortado por segundo; en estos principios básicos se basa el funcionamiento de los generadores eléctricos.

$$fem = \text{flujo} \cdot \text{seg.}$$

La f.e.m. de un generador es la tensión inducida en las espiras de conductor que giran de tal forma que cortan las líneas de fuerza de un fuerte campo magnético.

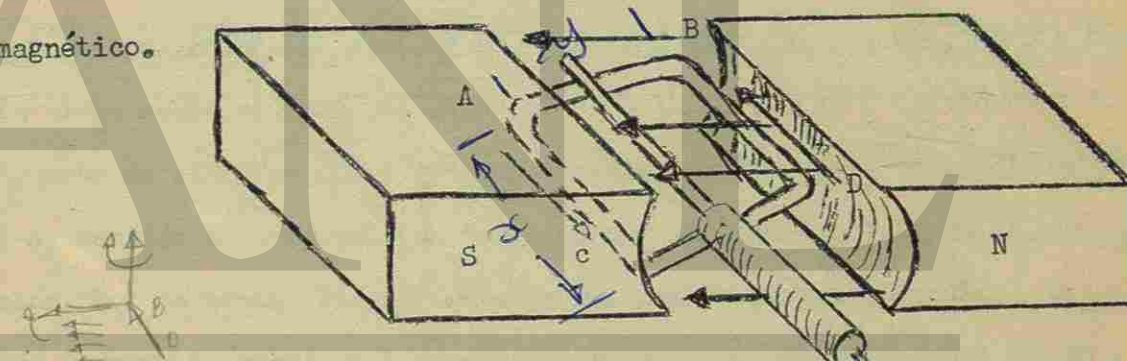


FIGURA I-2

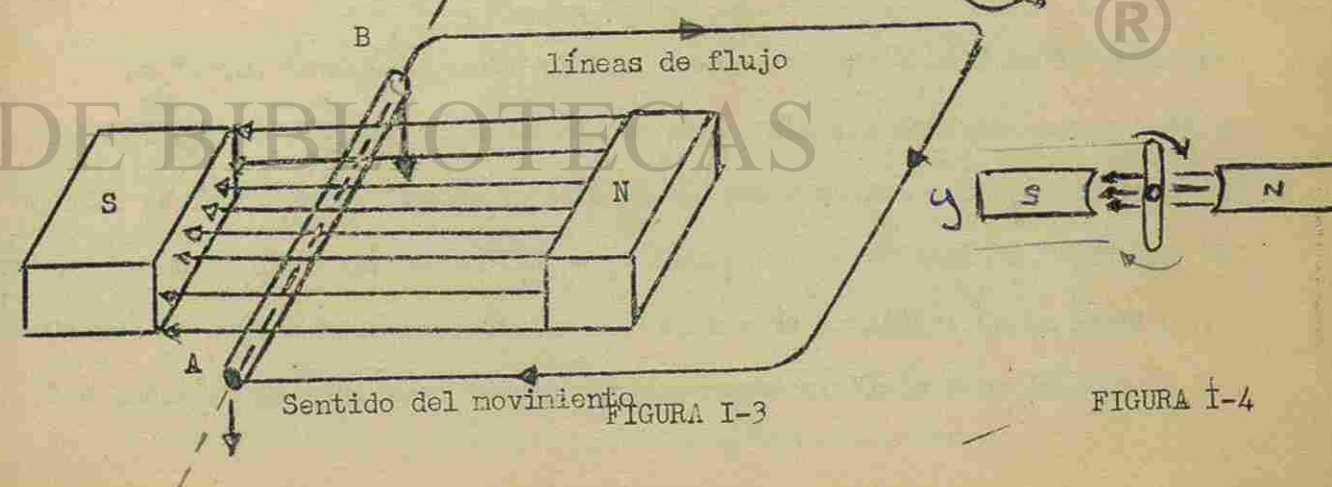


FIGURA I-3

FIGURA I-4

En las figuras 2 y 3 la espira de conductor gira según la dirección indicada por la flecha.

En la figura 2 el lado de la espira B D se mueve hacia abajo a través del flujo. Aplicando la regla de la mano derecha (el pulgar indica el sentido del movimiento, el dedo medio indica la dirección de la f.e.m. y el dedo índice la dirección del flujo) se determina que el sentido de la f.e.m. es de D a B.

El lado A C se mueve hacia arriba y la f.e.m. inducida va de A hacia C.

Por lo tanto en la espira circulará una corriente en el sentido A C - D B.

En la figura 3 el conductor B D a girado al lado opuesto y ahora se desplaza hacia arriba. El sentido de la f.e.m. ahora es inverso, de B a D. Por la misma razón se invierte el sentido de la f.e.m. en A C, ahora va de C a A, esto origina una corriente que circula por la espira en la dirección B D C A, sentido inverso del que tenía cuando la bobina estaba en la otra posición. Por lo tanto, la corriente en una espira cerrada circulará en un sentido durante la mitad de la vuelta y en sentido inverso durante la otra mitad. Hay entonces una corriente alterna en una espira cerrada de un conductor que gira en un campo magnético.

La f.e.m. tendrá su valor máximo cuando la espira esté en la posición de la figura 2 y tiene el valor mínimo en el sentido opuesto cuando esté en la posición de la figura 3, esto es debido a que en estas posiciones -- los lados de las espiras cortan por segundo la mayor cantidad de flujo. -- Cuando la espira esté en posición vertical como lo indica en la figura 4., los lados de la espira se mueven paralelamente al flujo y no lo cortan, --

por lo tanto no hay f.e.m. inducida en la espira y se dice que está en posición cero. La forma de onda que se capta en el generador elemental será la siguiente:

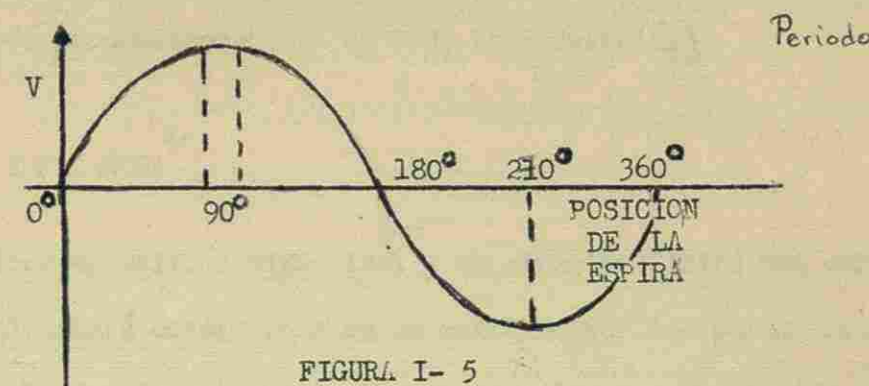


FIGURA I- 5

La posición horizontal de la espira en la figura 2 está a 90° de la posición cero, cuando la bobina está colocada en posición vertical estará en la posición cero, a 180° de la primera posición cero, y así sucesivamente a 270° , 360° , etc.

Dado lo anterior se puede definir la corriente alterna como una corriente eléctrica que en un circuito circula en un sentido y luego en otra a intervalos regulares. Cuando la corriente aumenta de cero a un máximo vuelve en seguida a cero para aumentar a un máximo en el sentido opuesto para volver a tomar el valor cero, entonces se dice que ha completado un período (FRECUENCIA).

Para entrar al análisis de la corriente alterna es necesario conocer la aplicación de la función excitatriz sinusoidal, las razones por las cuales se emplean estas funciones y no las de otro tipo para analizar la corriente alterna son: que una gran parte de los fenómenos físicos parecen tener un marcado carácter sinusoidal, como la vibración de una cuerda, el rebote de una pelota, la respuesta de la energía de un circuito amortiguado, etc.

Otra razón importante es la dependencia que del análisis sinusoidal tienen otras funciones excitatrices.

Una tercer razón es que sus derivadas e integrales son también sinusoidales.

Cabe mencionar que es una función fácil de generar y que es la forma de onda utilizada predominantemente en toda la industria.

"CONCEPTO DE IMPEDANCIA"

Al aplicar un voltaje sinusoidal a un circuito fluirá una corriente por éste, la cual estará determinada en su magnitud por los parámetros de dicho circuito (R, L, C e inductancia mutua) y si ellos son constantes esta corriente tendrá la forma de onda sinusoidal, si bien en general tendrá una diferencia de fase con el voltaje sinusoidal aplicado.

Para relacionar matemáticamente el voltaje y la corriente en un circuito de corriente alterna se requiere un tipo de función especial. Esta función se le llama función Impedancia, la cual debe indicar dos características importantes: la razón de V_{max} e I_{max} , el ángulo de fase entre las ondas de voltaje y corriente. Para abreviar las propiedades de la impedancia se utiliza la siguiente notación: $Z \angle \theta^\circ$ en donde Z es la magnitud de la impedancia y se expresa por un determinado número de ohmios.

El ángulo asociado con Z, si es positivo define el adelanto del voltaje con respecto a la corriente.

De acuerdo con esta convención, un ángulo positivo especifica el número de grados que la corriente se retrasa respecto del voltaje.

FUNCIONES IMPEDANCIA Y ADMITANCIA EN CIRCUITOS SENCILLOS

La impedancia de una rama R simple como la que se muestra en la figura 1 puede expresarse de la siguiente manera:

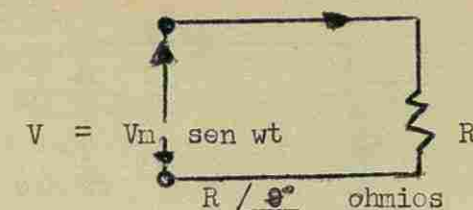


FIGURA 1-6

$$Z = \frac{V_{max}}{I_{max}}$$

Esto se sigue de la ley de Kirchhoff. Si un voltaje $V = V_m \sin \omega t$ se aplica a una rama de resistencia R como el mostrado en la figura 1, la ecuación del equilibrio es:

$$V = R i = V_m \sin \omega t$$

despejando (i) de esta ecuación tenemos

$$i = \frac{V_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

De la ecuación anterior se sigue que $\frac{V_m}{I_m} = R$ y la onda de corriente está en fase con la onda de voltaje.

Es posible indicar estos hechos mediante la expresión única:

$$\text{Impedancia} \rightarrow Z_R = R \angle 0^\circ \rightarrow R \text{ ohms}$$

ya que R está en ohmios, Z_R estará en ohmios.

Así como la conductancia es el recíproco de la resistencia ($G = \frac{1}{R}$), lo cual indica la facilidad de un elemento para conducir la corriente, así igualmente la admitancia es el recíproco de la impedancia ($A = \frac{1}{Z}$)

Circuito Inductivo.— Si se considera un elemento de circuito compuesto únicamente de inductancia como se muestra en la figura 2 .

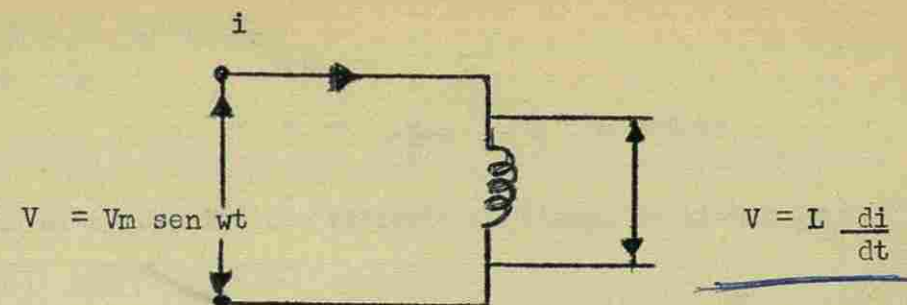


FIGURA 1 - 7

la ecuación del equilibrio será:

$$V = L \frac{di}{dt} = V_m \sin \omega t$$

Integrando esta ecuación, tenemos..... $di = \frac{V_m}{L} \sin \omega t$

$$i = - \frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t + C_1$$

Considerando la constante $C_1 = 0$, ya que se toma la corriente estacionaria simétrica, se tiene;

$$i = I_m \sin (\omega t - 90^\circ) = \frac{V_m}{\omega L} \sin (\omega t - 90^\circ)$$

De la ecuación anterior se ve que $\frac{V_m}{I_m}$ es igual a ωL y que (i) se retrasa con respecto de V un cuarto de ciclo. La impedancia de una rama de L pura es, según la convención que se ha adoptado, $Z_L = \omega L \angle 90^\circ$.

Circuito Capacitivo.- Se supone que un voltaje sinusoidal $V_m \sin \omega t$ se aplica a un condensador tal y como se muestra en la figura 8.

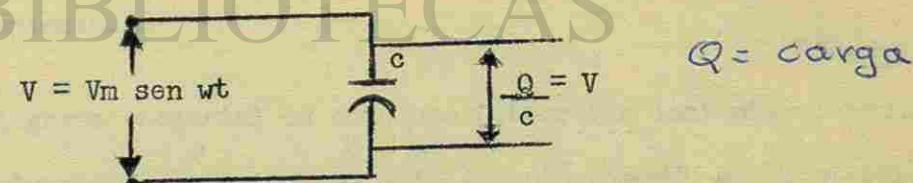


FIGURA I -8

La ecuación de equilibrio

$$V = \frac{Q}{C} = V_m \sin \omega t$$

derivando esta ecuación con respecto al tiempo se tiene: $\frac{dQ}{dt} = I$

$$\therefore \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} = V_m \omega \cos(\omega t) = I$$

$$i = \frac{V_m}{1/\omega C} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

La razón de $V_m I_m$ en la rama capacitiva es $\frac{1}{\omega C}$, y la corriente se adelanta al voltaje aplicado por $\frac{1}{4}$ de ciclo o sea 90° .

De acuerdo con la convención que ha sido adaptada, la impedancia de la rama capacitiva es:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

la impedancia de un condensador hace que la corriente se adelante al voltaje en 90° , mientras que la impedancia de una inductancia hace que la corriente se retrase en 90° respecto al voltaje. Los efectos de esos tipos de elementos reactivos (reactancia inductiva y reactancia capacitiva), en lo que concierne a la fase de la corriente resultante, son exactamente opuestos.

DIAGRAMAS VECTORIALES

El diagrama vectorial es la forma más simple para representar las relaciones existentes, en un circuito, entre la corriente o tensión y su ángulo de desfase.

Un diagrama vectorial es como una fotografía instantánea tomada en un momento determinado e indica tan solo lo está pasando en el circuito en ese instante.

Esto se muestra más fácilmente en las figuras que se describen en seguida.

Tomando como ejemplo una bobina, y analizando la relación entre la f.e.m. inducida y el ángulo eléctrico, cuando la f.e.m. sigue una curva de forma sinusoidal. El valor máximo que puede tomar la f.e.m. se representa por un vector E_m . Se supone que este vector gira al rededor del punto o en el sentido contrario al de las agujas del reloj con la misma velocidad que la bobina. Dibujando este vector a la misma escala relativa que la f.e.m. (E_m) y en un ángulo correspondiente a la posición de la bobina, se determina el valor instantáneo de esa posición midiendo la componente vertical del vector E_m .

En las figuras 1 al 10 se ha tomado por conveniencia, para representar la posición cero, el eje de abscisas. En la figura 1, que es el diagrama vectorial para la posición cero y no tiene componente vertical. Es decir -- que el valor de la f.e.m. en esta posición es cero.

Ahora, si la bobina se ha desplazado 30° de la posición de cero, en la figura 2 representa el valor de la f.e.m. instantánea.

El vector E_m por lo tanto está formando un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. La componente vertical de E_m en este caso es e_1 , que es -- igual al valor instantáneo de la f.e.m. inducida cuando la bobina se ha -- desplazado 30° de la posición cero. La componente vertical e_2 en la posición de 60° se indica en la figura 3.

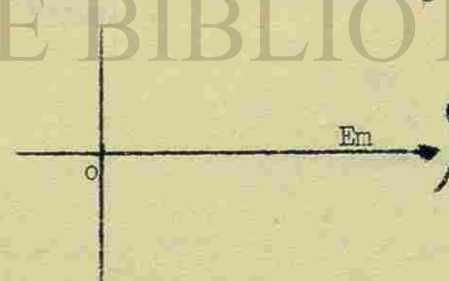


FIGURA 1

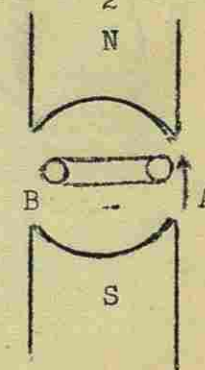


FIGURA 1a

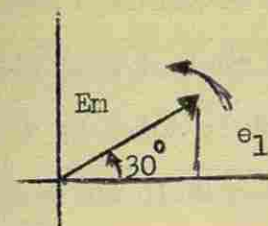


FIGURA 2

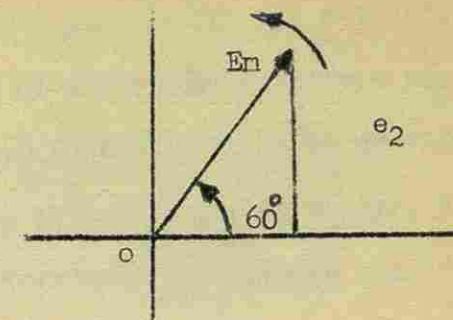


FIGURA 3

Cuando el vector alcanza la posición de 90° la componente vertical es igual al mismo vector, por lo tanto, es el valor máximo. La figura 4 representa el diagrama vectorial de la f.e.m. en este instante.

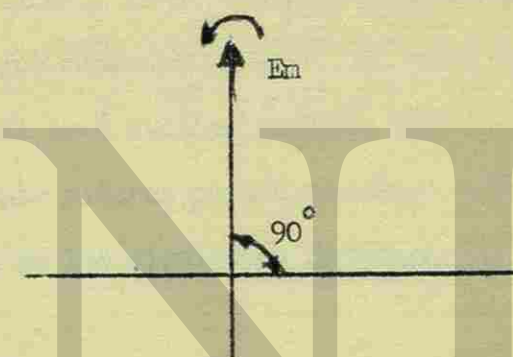


FIGURA 4

En las figuras 5, 6 y 7 son los diagramas vectoriales de las posiciones de 120° , 150° y 180° respectivamente.

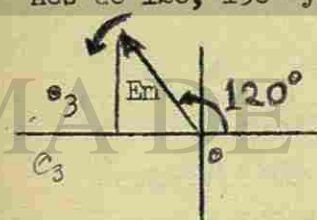


FIGURA 5

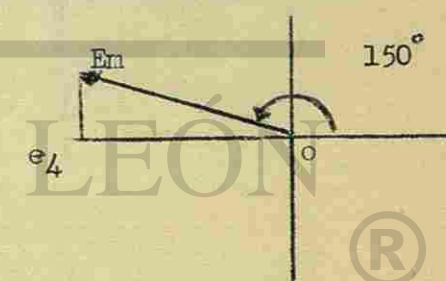


FIGURA 6

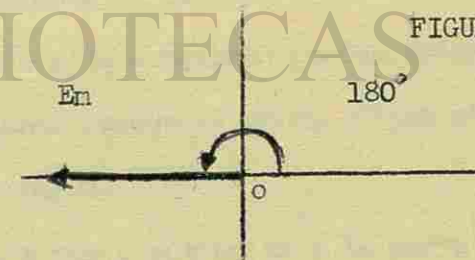
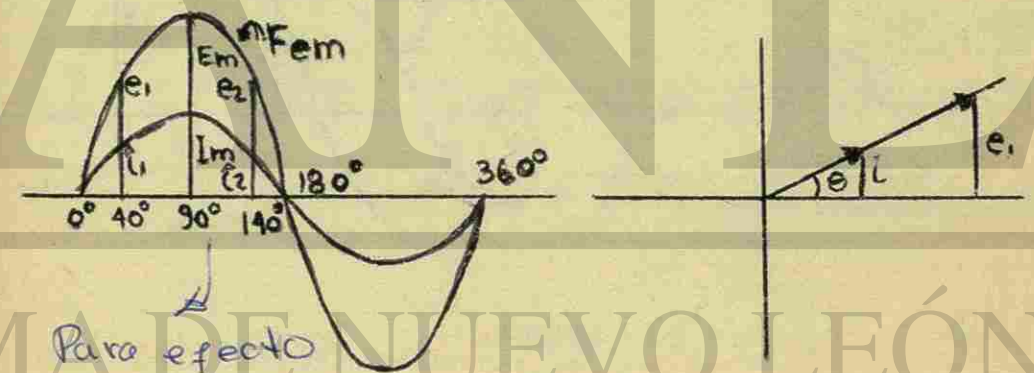


FIGURA 7

Estos diagramas vectoriales que se hicieron para indicar la relación entre los valores instantáneos de la f.e.m. y el valor máximo, sirven también para indicar la relación entre los valores instantáneos de la corriente y su valor máximo. Solamente se pone i_1, i_2 etc. en lugar de e_2 etc. y todos los diagramas indican ahora valores de corriente en lugar de tensión.

RELACION DE FASE ENTRE CORRIENTE Y TENSION.

Cuando una f.e.m. alterna hace circular una corriente en un circuito es evidente que esta será una corriente alterna. En el caso de ondas sinusoidales puras, la curva y la ecuación que representan las corrientes serán los mismos que las que representan la f.e.m. como anteriormente se explicó, el diagrama vectorial será similar también. Por lo tanto, las curvas de la tensión y la corriente alterna pueden representarse en el mismo par de ejes como se muestra en las siguientes figuras:



Para efecto
Resistivo está en
en fase

FIGURA 8

Existen 3 relaciones de fase posibles entre la corriente y la f.e.m.

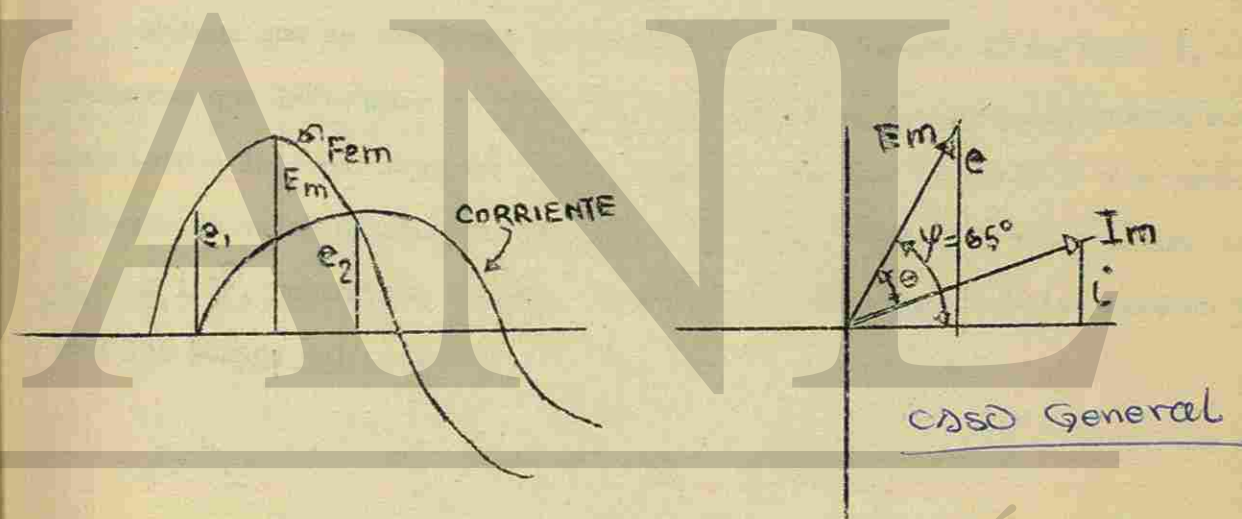
- 1) Las curvas de tensión y de corriente pueden estar en fase.
- 2) Las curvas de corriente pueden estar en atraso con respecto a las que corresponden a la tensión.
- 3) La curva de corriente puede adelantarse a la curva de tensión.

1) Tensión y corriente en Fase.- La corriente y la tensión pueden estar en fase, es decir que ambos sean nulos en el mismo instante y ambos coincidan en su valor máximo en el mismo instante.

Esto sucede en un circuito cuando los efectos de la inductancia están equilibrados o cuando el circuito esté constituido solamente por resistencias.

Las figuras 8 representan las relaciones entre la corriente y la tensión cuando están en fase.

2) Corriente en atraso.- La corriente puede estar atrasada con respecto a la tensión, como en las figuras 9.



FIGURAS 9

Esto sucede cuando el circuito contiene solamente inductancias o tiene inductancia y resistencia. Nótese en las figuras 9 que la corriente está atrasada 90° con respecto a la tensión, o sea que la curva de la tensión tiene un valor e_1 para 50° mientras que la corriente tiene un valor cero en 50° . La figura 9 muestra como se representa esta diferencia de fase mediante un diagrama vectorial.

3) Corriente en Adelanto.- La curva de corriente en un circuito que --

contiene capacidad puede estar adelantada con respecto a la curva de tensión como en las figuras 10.

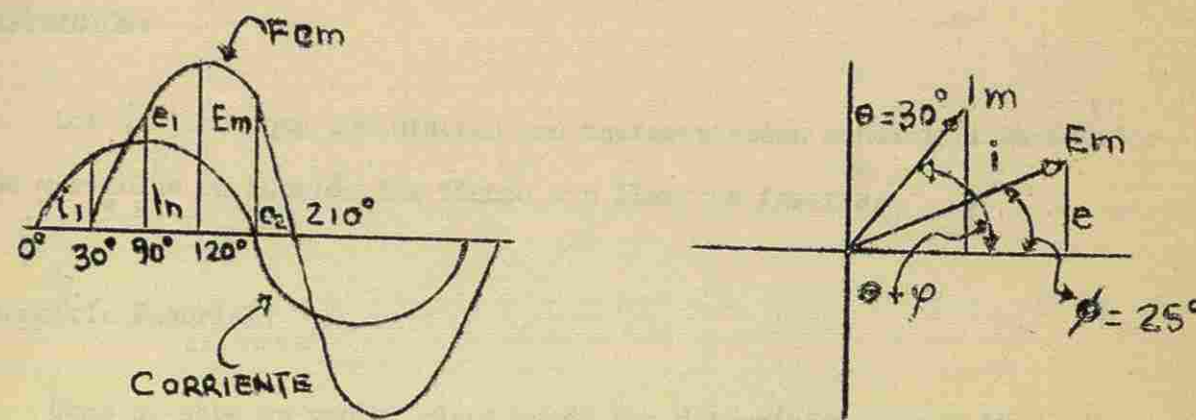
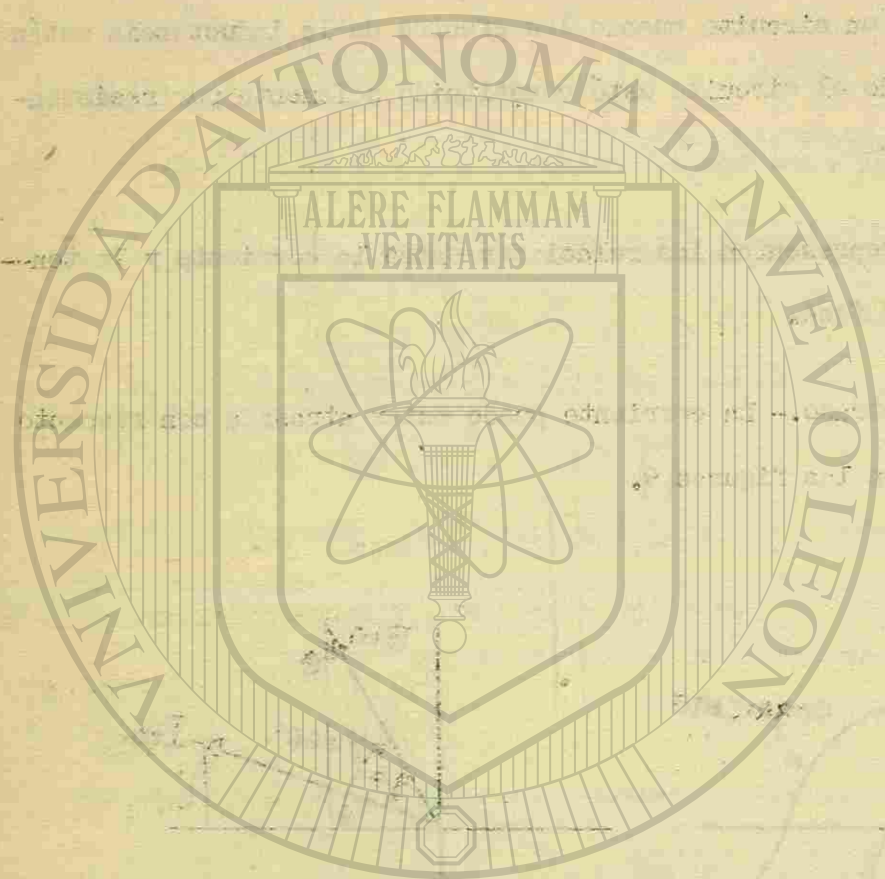


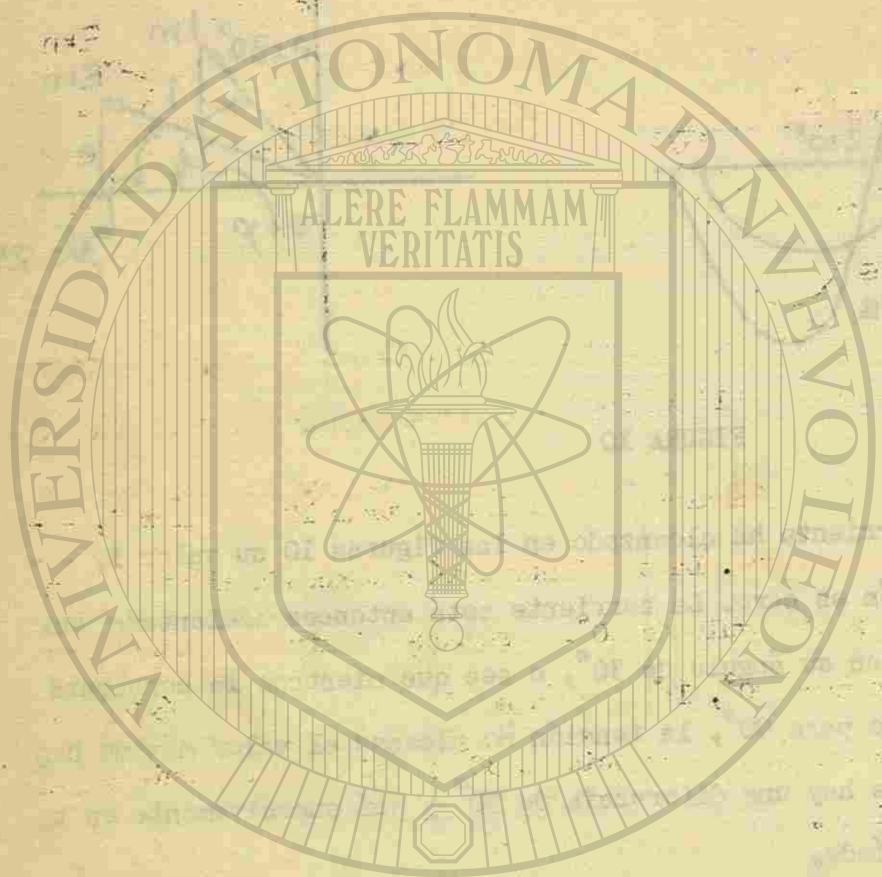
FIGURA 10

Nótese que la corriente ha alcanzado en las figuras 10 su valor i , -- mientras que la tensión es cero. La corriente está entonces adelantada con respecto a la tensión en su ángulo de 30° , o sea que mientras la corriente alcanza su valor máximo para 90° , la tensión no alcanza el valor máximo hasta los 120° , nuevamente hay una diferencia de 30° y así sucesivamente en todos los puntos del período.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCION GENERAL DE BIBLIOTECAS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO II

CONCEPTOS DE FASOR

DEFINICIÓN:

Los vectores que suministran una representación sinusoidal de cantidades variables en función del tiempo son llamados fasores.

Geometría Fasorial:

Como se sabe un vector plano puede ser determinado en magnitud, dirección y sentido en función de sus respectivas proyecciones sobre el eje de las X y sobre el eje de las Y. Por ejemplo, si la proyección sobre el eje de las X del vector A de la figura 2-1.

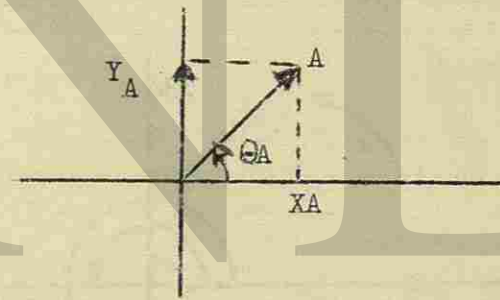


FIGURA 2-1

es conocida como X_A , la proyección sobre el eje de las Y será Y_A , entonces la magnitud del vector A es:

$$A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$$

De las propiedades geométricas de la figura 1 se sigue que el ángulo θ_A , entre el vector A y el eje positivo X, es

$$\theta_A = \tan^{-1} \frac{Y}{X}$$

A fin de determinar un fasor en función de sus componentes X e Y, es preciso emplear algún medio que permita distinguir entre la proyección sobre el eje de las (X) y la proyección sobre el eje de las (Y). Como la proyección sobre el eje de las (Y) está 90° adelante de la proyección sobre el eje de las (X), un operador conveniente sería uno que, cuando se aplique a un fasor, lo haga girar 90° en sentido contrario al de las manecillas de un reloj sin cambiar la magnitud del fasor.

Sea (J) un operador que hace girar 90° contra el sentido del reloj a cualquier vector a que se aplica como fasor, esto es, por el cual se multiplica.

Entonces, por definición, cuando el fasor (A) de la figura 2-2.

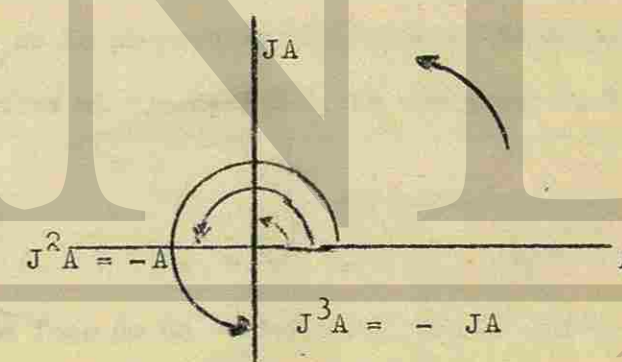


FIGURA 2-2

es multiplicado por (J) se obtiene un nuevo fasor JA a 90° contra el sentido del reloj de (A). Si el operador (J) es aplicado al fasor JA, hará girar a JA a 90° contra el sentido del reloj. El resultado es $j \times j A = j^2 A$, como se muestra en la figura 2, de aquí se sigue también que:

$$j^2 A = -A$$

de aquí

$$j^2 = -1 \quad Y$$

$$j = \sqrt{-1}$$

Se observa que las aplicaciones sucesivas del operador (J) al fasor A producen pasos sucesivos correspondientes a 90° de rotación del vector en la dirección contra el sentido del sentido del reloj, sin afectar la magnitud del fasor.

Forma Cartesiana de Notación.

Un fasor, en cualquier cuadrante puede ser completamente determinado mediante la notación de coordenadas cartesianas, como se muestra a continuación:

$$A = \frac{+}{-} a + \frac{J}{-} a' \quad \begin{matrix} a' = 4 \\ a = x \end{matrix}$$

en esta ecuación, a es la proyección del fasor sobre el eje de las (X) y (a') es la proyección sobre el eje de las Y. En cualquier caso la magnitud del fasor (A) es

$$A = \sqrt{a^2 + a'^2}$$

La posición de fase de un vector en el primer cuadrante será:

$$\theta_{1a} = \text{tang}^{-1} \left(\frac{+a'}{+a} \right)$$

Por ejemplo en el cuarto cuadrante:

$$\theta_4 = \text{tg}^{-1} \left(\frac{-a'}{+a} \right)$$

El operador $(\cos \theta + j \sin \theta)$

La inspección de la figura 2-3 mostrará que la proyección de un fasor se
bre.

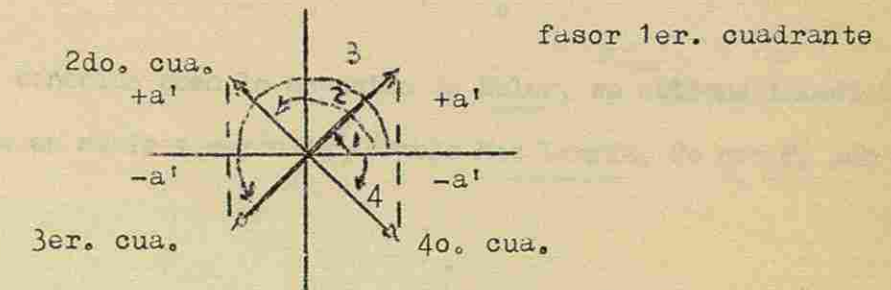


FIGURA 2-3

el eje de las (X) en cualquier cuadrante es $(A \cos \theta)$. El ángulo θ puede ser medido en sentido positivo o negativo a partir del eje de las (X), para determinar la proyección sobre este eje, pues $\cos \theta = \cos (-\theta)$

La proyección sobre el eje de las (Y) en cualquier cuadrante es $(A \sin \theta)$, si θ se mide en el sentido contra el reloj a partir del eje de las (X).

Por tanto,

$$A = A (\cos \theta \pm j \sin \theta)$$

Este es equivalente a la forma mostrada en la ec (1). Se usa el signo $-$ (+) si θ se mide contra el sentido del reloj a partir del eje de referencia y $(-)$ si θ se mide en el sentido del reloj.

La ecuación (2) muestra que $(\cos \theta + j \sin \theta)$, al operar sobre una magnitud real A , es un vector de A unidades de magnitud y tomando sobre el eje de las (X) hace girar a este fasor un ángulo $+\theta$ desde su posición inicial. De manera semejante, el operador $(\cos \theta - j \sin \theta)$ hace girar al vector original un ángulo $(-\theta)$.

Forma exponencial del operador ($\cos \theta + J \operatorname{sen} \theta$)

La siguiente ecuación contiene una relación importante.

$$(\cos \theta \pm J \operatorname{sen} \theta) = e^{\pm J \theta}$$

Esta ecuación, conocida como la ecuación de Euler, se obtiene inmediatamente del desarrollo en serie y según la fórmula Mac Laurin, de $\cos \theta$, $\operatorname{sen} \theta$,

$$\text{y } e^{\pm J \theta}$$

Forma polar del operador ($\cos \theta \pm J \operatorname{sen} \theta$).

La forma exponencial del operador ($\cos \theta \pm J \operatorname{sen} \theta$) es a menudo escrito de manera simplificada. Sabiendo que

$$e^{\pm J \theta} = (\cos \theta \pm J \operatorname{sen} \theta) \text{ por tanto,}$$

$$A e^{\pm J \theta} = A (\cos \theta \pm J \operatorname{sen} \theta) \text{ y por definición,}$$

$$e^{\pm J \theta} = 1 \angle \pm \theta$$

$$A e^{\pm J \theta} = A \angle \pm \theta$$

ALGEBRA FASORIAL

Suma de FASORES.

La suma vectorial de dos fasores A y B es un tercer fasor; definido en magnitud y posición de fase por la diagonal del paralelo gram que tiene por lados los fasores A y B. La diagonal del paralelogramo así formado que representa la suma vectorial $A + B$ está indicado en la figura 2-4

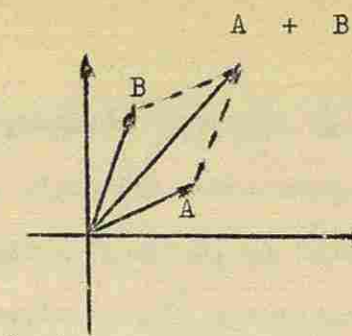


FIGURA 2 -4

Puede considerarse que cada fasor tiene un origen y un extremo final. - Si las puntas de flecha de la figura 2-4 indican los finales de los fasores, entonces la suma vectorial de los dos fasores es la línea que une el origen del primer fasor y el final del segundo, después de que este último ha sido colocado de manera que su origen coincida con el extremo final del primer fasor. De aquí que

$$A + B = B + A$$

Para sumar los fasores, estos se escriben en forma rectangular ($a + j a'$) ya que las formas exponencial o polar no se prestan para el procedimiento de adición. Si

$$A = a + j a', \quad B = b + j b' \quad \text{y} \quad C = c + j c'$$

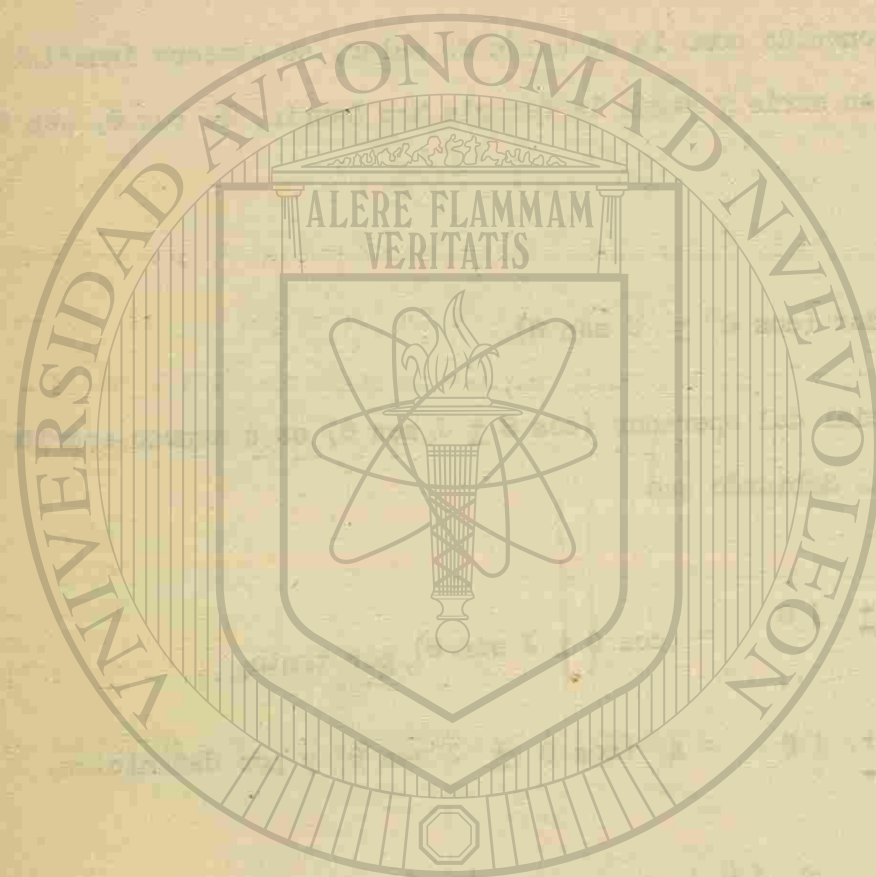
$$A + B + C = (a + b + c) + j (a' + b' + c')$$

Donde la magnitud del fasor resultante es

$$D = \sqrt{(a + b + c)^2 + (a' + b' + c')^2}$$

La posición de fase será

$$\theta_o = \tan^{-1} \frac{(a' + b' + c')}{(a + b + c)}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

SUBSTRACCION DE FASORES

En la álgebra común, la operación o proceso de substracción es llevado a efecto mediante el cambio del signo del substraendo y procediendo a continuación como en la suma. En álgebra fasorial, el fasor que ha de subtraerse se hace girar a través de un ángulo de 180° y sumando a continuación. Para hacer girar 180° un fasor puede aplicarse el operador $J^2 = -1$ o restar 180° al ángulo de fase del fasor. Así un fasor $A = A \angle \theta$ que se gira un ángulo de 180° se convierte en

$$A' = J^2 A \angle \theta = -A \angle \theta = A \angle \theta \pm 180^\circ$$

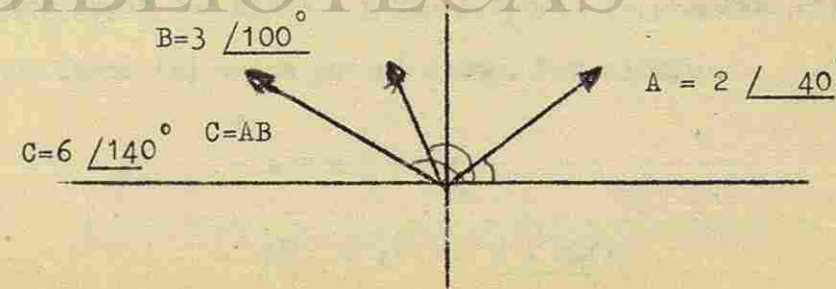
y un fasor $B = b + J b'$ que se gira un ángulo de 180° se convierte en

$$B' = J^2 (b + J b') = -b - J b'$$

Multiplicación de fasores.

La multiplicación compleja de dos fasores A y B, en cuanto atañe al análisis de circuitos de CA., es un tercer fasor que tiene una magnitud igual a (AB) y una posición de fase con respecto al eje de referencia igual a la suma de los respectivos ángulos de fase de A y B a saber $(\alpha + \beta)$.

Analíticamente la multiplicación compleja de dos fasores puede ser efectuada más cómodamente cuando los fasores son expresados en forma exponencial o polar; por ejemplo:



Resulta claro que es indiferente el orden en que se efectúe la multiplicación. Esto es

$$AB = BA$$

Además se puede extender la definición a cualquier número de fasores. —
Por ejemplo,

$$ABC = ABC \quad \angle_A + \angle_B + \angle_C$$

DIVISION DE FASORES

Para los fines de la teoría de circuitos de C-A la división de una cantidad compleja entre otra se lleva a cabo algebraicamente, como se muestra a —
continuación, cuando las cantidades son expresadas en forma exponencial:

$$\frac{A}{B} = \frac{A e^{j\alpha_A}}{B e^{j\alpha_B}} = \frac{A}{B} e^{j\alpha_A - j\alpha_B} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha_A - \alpha_B)}$$

Esto es, el proceso de dividir un fasor A entre un segundo fasor B como resultado un tercer fasor cuya magnitud es el cociente de las magnitudes de los fasores A y B, a saber A/B. La posición de fase del vector resultante, —
con respecto al eje de referencia, es la diferencia algebraica entre los ángulos de fase de los fasores A y B medidos a partir del eje de referencia, a saber $\alpha_A - \alpha_B$.

Elevación de un fasor a una potencia.

Un factor puede ser elevado a una potencia (n), siendo (n) entero, multiplicando el fasor (n) veces por si mismo. Por ejemplo.

Si

$$A = A \quad \angle \alpha_A$$

$$A^n = A^n \quad \angle n \alpha_A$$

ESTUDIO DE ONDAS SENOIDALES POR MEDIO DE FASORES.

La proyección de un vector sobre el eje de las (X) es una función coseno del ángulo que aquel forma con el eje de las (X). Si el ángulo cambia con el tiempo, la proyección sobre el eje también cambia y su longitud representada por el coseno del ángulo.

Para representar la función de la ecuación $F(t) = F \cos(\omega t + \theta)$, el ángulo puede ser igual a θ en $t = 0$ y aumentar linealmente de ahí en adelante. El resultado es un vector que gira alrededor de un origen. Este es llamado un fasor rotatorio. El término fasor solo es usado para un vector estacionario en $t = 0$. El fasor que representa la senoide de la ecuación (1) se muestra en la figura 2-5..

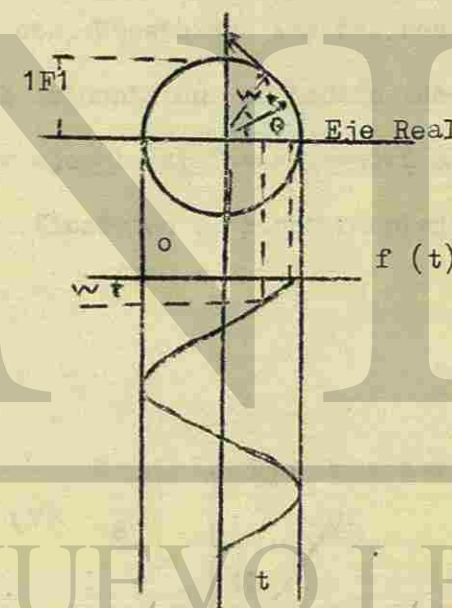


FIGURA 2-5

Este es un vector de longitud F midiéndolo según un ángulo θ desde el eje real. Si el fasor se hace girar con frecuencia angular (ω), su proyección sobre el eje real es una función coseno.

Cuando la cantidad $(wt + \theta)$ es 90° la proyección es cero.

Cuando la cantidad $(wt + \theta)$ es 180° la proyección es $-F$

Cuando la cantidad $(wt + \theta)$ es 270° la proyección es cero otra vez y así sucesivamente.

DIAGRAMAS FASORIALES.

Diagramas fasoriales es el nombre dado a una representación gráfica en el plano complejo de los fasores tensión y corriente de un circuito específico. Este diagrama proporciona un método gráfico para resolver ciertos problemas para los que los cálculos algebraicos complejos resultan molestos.

Ya estamos familiarizados con los números complejos, el plano complejo sumas, restas complejas, etc. Puesto que los fasores tensión y corriente -- son números complejos, es evidente que se podrán identificar como puntos -- en un plano complejo. Por ejemplo el fasor tensión $E_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$ se encuentra identificado en el plano complejo de tensiones representado en la figura 2-6a.

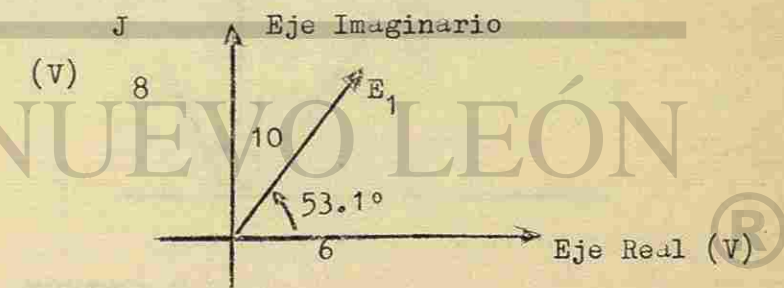


FIGURA 2-6a

Los ejes son los ejes de tensión real y de tensión imaginaria, la tensión E_1 está indicada por una flecha de punta abierta trazada desde el ori--

gen. Puesto que en el plano complejo la suma y la resta son particularmente fáciles de efectuar y representar, es evidente que en un diagrama fasorial -- los fasores pueden sumarse y restarse de una manera simple.

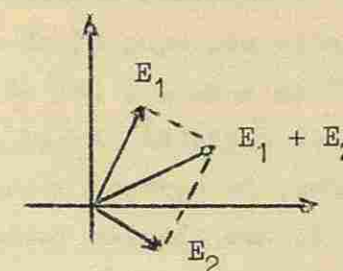


FIGURA 2-6

La multiplicación y la división se realizan sumando y restando ángulos, variando la amplitud.

La figura 2-7 muestra a la corriente I_1 , la cual es el producto de $E_1 = 6 + j8$ por la admitancia $Y = 1 + j1$.

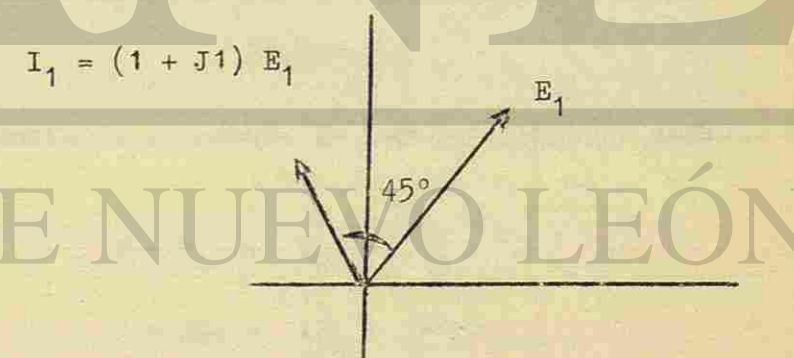


FIGURA 2-7

Este último diagrama fasorial muestra a ambas fasores, corriente y tensión, en el mismo plano complejo; se comprende que cada uno tendrá su propia escala de amplitud, pero la escala para ángulos es común. Por ejemplo un fasor tensión de 3 cm de largo puede representar 100V, mientras que un fasor corriente de los mismos 3 cm puede representar 3 mA.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO III

ANALISIS DE CIRCUITOS SINUSOIDALES MONOFASICOS

INTRODUCCION

Cualquiera que sea la complejidad del circuito resistivo, somos capaces de determinar la respuesta deseada mediante el ejemplo del análisis de mallas o nudos por el método de la superposición, por la transformación de fuentes o haciendo uso de los teoremas de Thevenin o Norton. Ahora deseamos extender estas técnicas al análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal. Primeramente daremos un pequeño repaso de los circuitos serie paralelo para comenzar después con el análisis de mallas.

Impedancias en Serie.

En la figura 1 se muestra un circuito en serie, de tres impedancias. En un circuito de este tipo es evidente que solo puede existir una corriente única en un instante dado y que la corriente que pasa

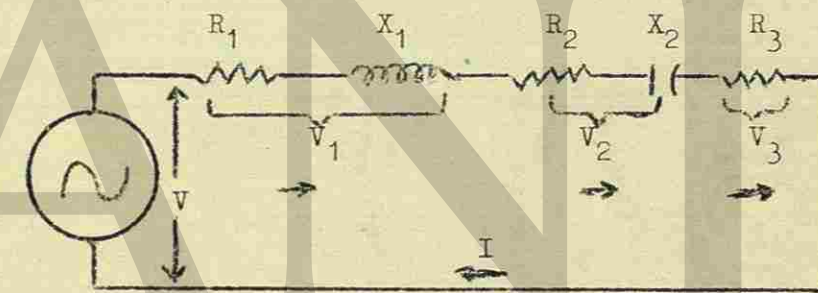


FIGURA 3-1

por cada impedancia es la misma. La Ley de KIRCHHOFF implica que:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = IZ_1 + IZ_2 + IZ_3$$

$$V = I(Z_1 + Z_2 + Z_3) = IZ \quad \text{Ec (1)}$$

La ecuación (1) muestra que las impedancias en serie se suman en forma compleja para obtener la impedancia equivalente así:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = (R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) + (R_3 + j0)$$

o

$$Z = (R_1 + R_2 + R_3) + j(X_1 + X_2) = R + jX$$

En general para un circuito en serie de (n) impedancias

$$V = I (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \quad y$$

$$Z = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) + j(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$Z = (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)^2 + (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)^2$$

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_n}$$

RAMAS PARALELAS

Cuando se conectan impedancias en paralelo como en la figura 2

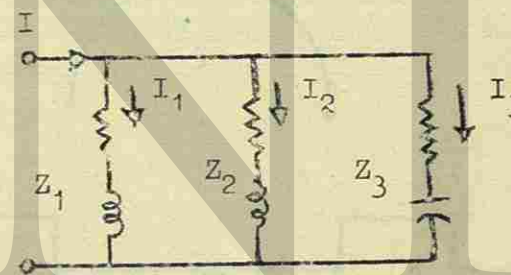


FIGURA 3-2

se imprime el mismo voltaje V a través de cada impedancia.

La corriente en cada impedancia es, por tanto,

$$I_1 = \frac{V}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{V}{Z_2} \quad e \quad I_3 = \frac{V}{Z_3}$$

Por la ley de la corriente de KIRCHHOFF

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \frac{V}{Z_3} = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \end{aligned}$$

$$= V (Y_1 + Y_2 + Y_3) = V Y_0$$

donde el símbolo Y representa el recíproco de la impedancia y se llama admitancia.

ANÁLISIS DE MALLAS Y NODOS

La figura 3 representa un circuito general con tres mallas e inicialmente consideramos a las fuentes como funciones arbitrarias del tiempo y a los elementos pasivos designados por Z_1 , Z_2 , etc. como resistencias puras R_1 , R_2 , etc.

Primero se supone una corriente de malla (en el sentido de las agujas del reloj) en cada malla, tal y como se muestra en la figura 3.

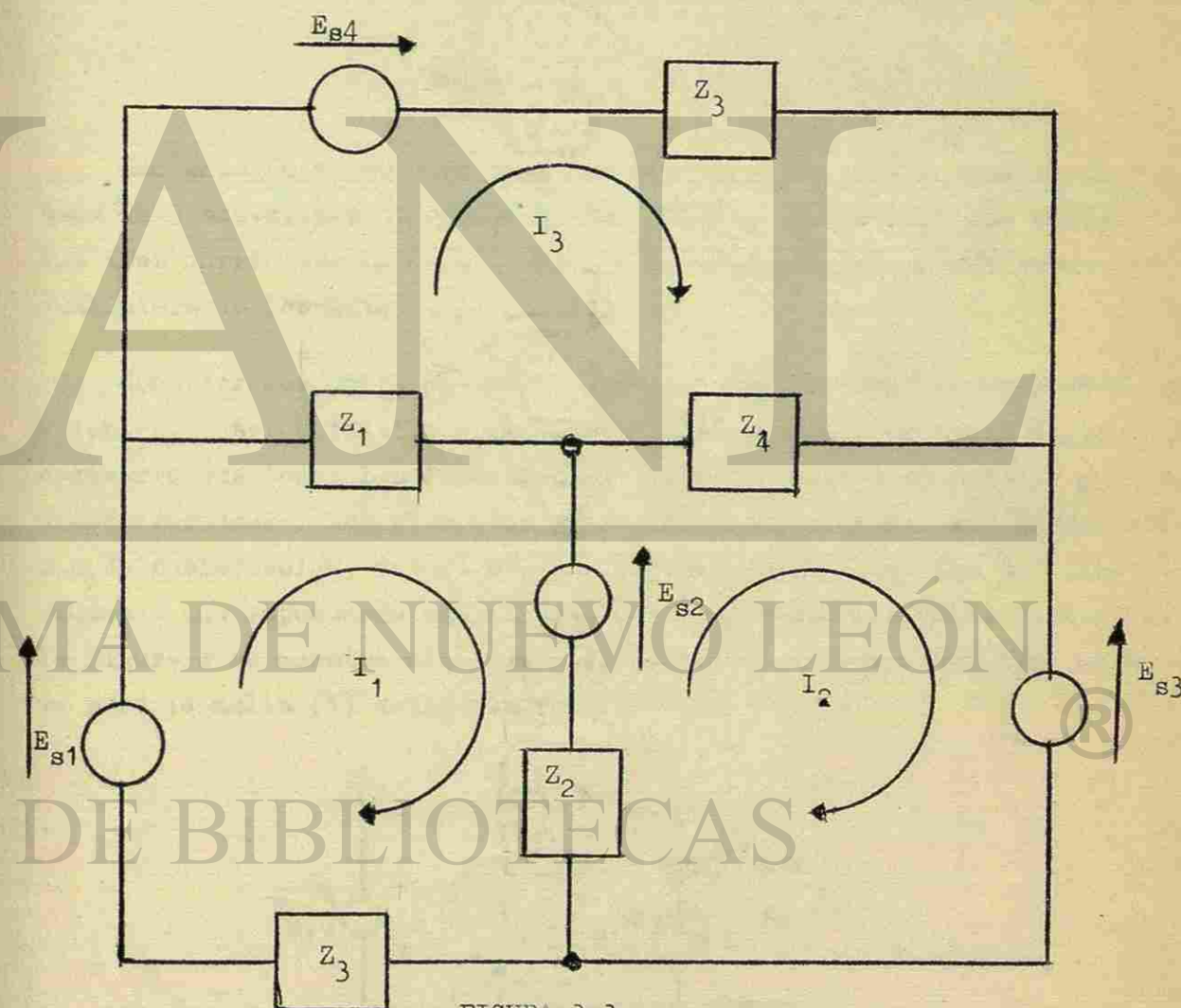


FIGURA 3-3

Aplicamos a continuación la ley de tensiones de KIRCHHOFF alrededor de cada malla obteniendo para la primera:

$$-e_{s1} + e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{s1} - e_{s2}$$

teniendo cuidado de seguir la nomenclatura de signos pasivos, podemos -- substituir por el producto de una corriente y resistencia apropiados.

$$(R_1 + R_2 + R_3) i_1 - R_2 i_2 - R_1 i_3 = e_{s1} - e_{s2}$$

usando la notación simplificada, tenemos:

$$R_{11} i_1 - R_{12} i_2 - R_{13} i_3 = e_{s1} - e_{s2}$$

Haciendo lo mismo para cada una de las otras mallas resulta un sistema de 3 ecuaciones algebraicas simultáneas, siendo las tres incógnitas las tres corrientes de malla. Estas 3 ecuaciones pueden resolverse por cualquiera de los métodos ya conocidos.

Consideremos ahora el análisis de mallas, en términos de fasores corrientes, fasores tensión o impedancias. En el circuito de la figura 4 es necesario que todas las funciones excitatrices sean sinusoidales y de la misma frecuencia. Los elementos generales pasivos pueden ser combinaciones de resistencias, inductancias y capacitancias; cada uno de ellos se reduce a una impedancia equivalente para la frecuencia de la fuente. En la figura 4 se muestra como queda el circuito, representado fasorialmente para la malla (1) de la figura 3.

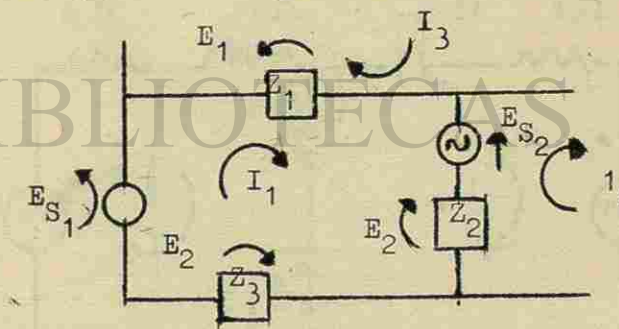


FIGURA 3-4

Igualmente por la ley de tensiones de KIRCHHOFF, para la malla (1) tenemos

$$E_1 + E_2 + E_3 = E_{s1} - E_{s2}$$

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3) I_1 - Z_2 I_3 = E_{s1} - E_{s2}$$

Empleando la notación más sencilla tenemos,

$$Z_{11} I_1 - Z_{12} I_2 - Z_{13} I_3 = E_{s1} - E_{s2}$$

En donde Z_{11} es la suma de las impedancias de la malla (1), Z_{12} es la impedancia común de las mallas 1 y 2, Z_{13} es la impedancia común de las mallas 1 y 3.

Las ecuaciones de malla de las dos restantes se obtienen por procesos similares:

$$-Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 - Z_{23} I_3 = E_{s2} - E_{s3}$$

$$-Z_{31} I_1 - Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 = E_{s3}$$

Ahora tenemos ya un sistema de 3 ecuaciones simultáneas que se pueden resolver por cualquiera de los métodos ya conocidos (determinantes, sustitución, etc.)

El análisis de nodos se puede también llevar a cabo en el dominio de la frecuencia en términos de fasores e impedancias. Los argumentos con los cuales se justifica el método de nodos son muy parecidos a los representados para el análisis de mallas. Formemos el dual del circuito de la figura.

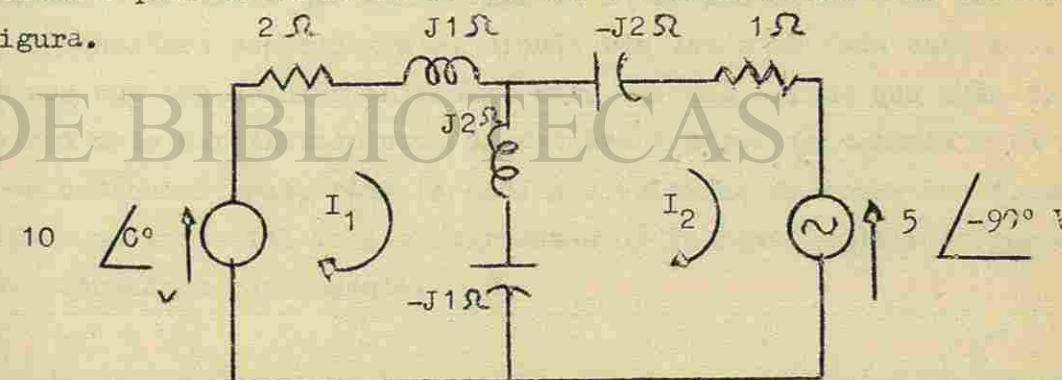


FIGURA 3-5

tal como se representa en la figura 6.

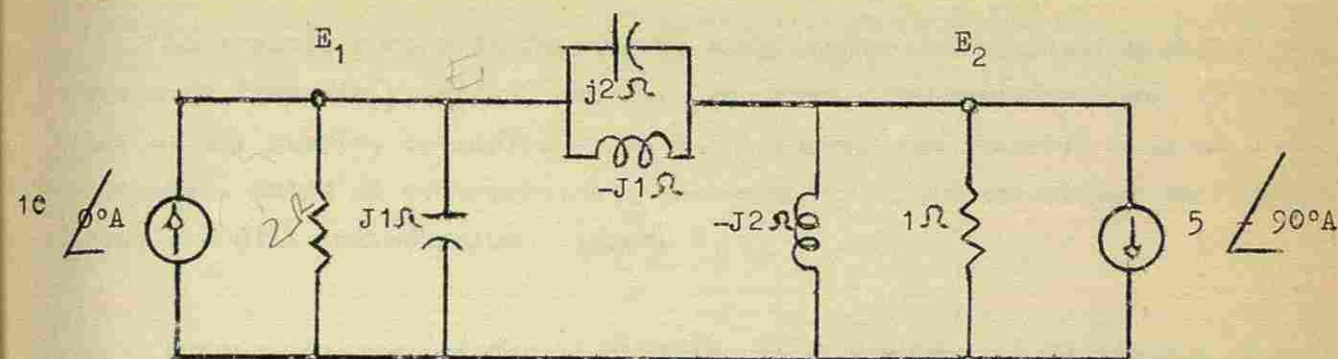


FIGURA 3-6

y determinemos las dos tensiones de nodo desconocidos E_1 y E_2 . En el nodo de la izquierda, la ley de corrientes de KIRCHHOFF conduce a:

$$(2 + j1) E_1 + (j2 - j1) (E_1 - E_2) = 10$$

$$(2 + j2) E_1 - j E_2 = 10$$

En el nodo de la derecha, tendremos

$$(1 - j2) E_2 + (j2 - j1) (E_2 - E_1) = -(-j5)$$

$$-j E_1 + (1 - j1) E_2 = j5 \quad \text{por tanto,}$$

$$E_1 = 1 - j2 \qquad E_2 = -2 + j4$$

SUPERPOSICION

La corriente que fluye en cualquier punto o el voltaje entre dos -- puntos cualquiera de una red lineal, resultantes de la acción simultánea de diversos f.e.m.s. distribuidas por toda la red, es la suma de las corrientes o voltajes que existirían en estos puntos si cada fuente de f.e.m. se considera separadamente, siendo las demás en cada caso reemplazadas por sus impedancias internas. Este teorema afirma que cada f.e.m. de una red debe ser tratada como si actuara independientemente y la corriente en cualquier rama, bajo la acción simultánea de todas las f.e.m.s., -- en la suma vectorial de las corrientes de la rama producidas por cada f.e.m. actuando separadamente.

Todas las f.e.m. se suponen iguales a cero, excepto aquella para la cual están siendo calculadas las corrientes.

TRANSFORMACION DE FUENTES

La transformación de fuentes es simplemente una aplicación de los teoremas de Thevenin y Norton. Sin embargo, como esta transformación de fuentes es muy simple, su empleo puede justificarse sin recurrir a estos dos teoremas. Antes al contrario, utilizaremos las transformaciones de fuentes como una útil introducción a estos.

Supongamos que tenemos un circuito bajo condiciones de régimen permanente sinusoidal. El circuito se dibuja en el dominio de las frecuencias e implica una red simple consistente en una fuente de tensión, en serie con una impedancia Z_s como se muestra en la figura 3-7

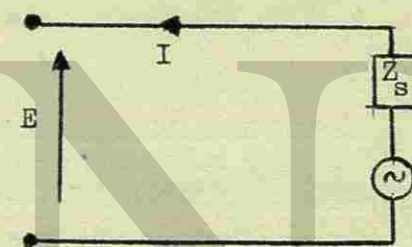


FIGURA 3-7

Para las fuentes de tensión y la impedancia en serie, representan los fasores corriente y tensión, en los terminales están relacionados por - -

$$E = E_s - I Z_s,$$

reordenando esta ecuación, se tiene:

$$I = \frac{E_s}{Z_s} - \frac{E}{Z_s}$$

En donde podemos identificar E_s / Z_s como una fuente de corriente I_s , por tanto,

$$I = I_s - \frac{E}{Z_s}$$

Esta ecuación expresa la relación tensión-corriente en las terminales para la fuente de corriente de la figura 3-8

Así las fuentes de las figuras 3-7 y 3-8 son equivalentes

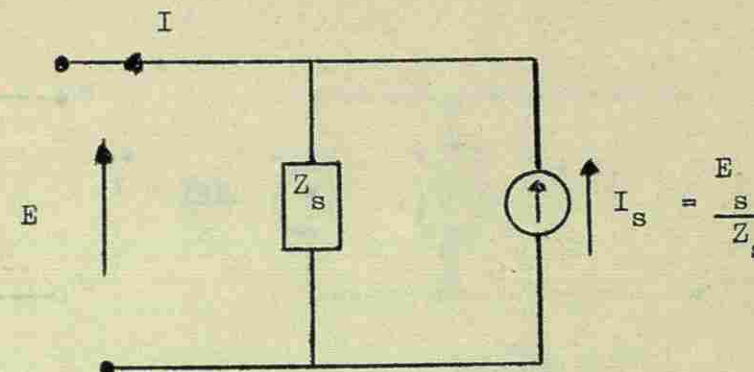


FIGURA 3-8

$$\text{si } E_x = I_s Z_s$$

Es evidente que la transformación puede hacerse en ambas direcciones.

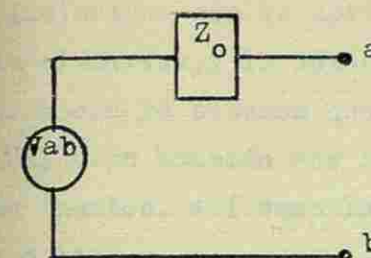
TEOREMA DE THEVENIN Y NORTON.

Si se conecta una impedancia Z entre dos puntos cualesquiera de una red energizada, la corriente resultante (i) que fluye a través de esta impedancia, es igual a la diferencia de potencial (V) entre estos dos puntos con anterioridad a la conexión, dividida entre la suma de la impedancia conectada Z_1 y la impedancia Z_0 , siendo Z_0 la impedancia del resto de la red recorriéndola hacia atrás desde los dos puntos entre los cuales está conectada la impedancia (Z). Al determinar el valor de Z_0 debe suponerse que todas las fuentes de f.e.m.s. son iguales a cero.

TEOREMA DE NORTON.

Este teorema establece que con respecto de cualquier par de terminales de una red activa, ésta puede ser reemplazada por una sola fuente de corriente en paralelo con una impedancia igual a la que se ve desde el par indicado de terminales, observando hacia adentro de la red. Como tal el teorema de Norton es únicamente una variante del Teorema de Thevenin, puesto que el equivalente de Thevenin de una red activa es rápidamente trans-

formado en la configuración mostrada en la figura 3-10



$$I = \frac{V_{ab}}{Z_o}$$

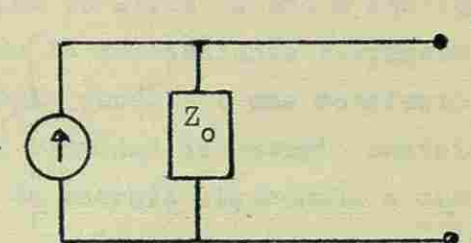


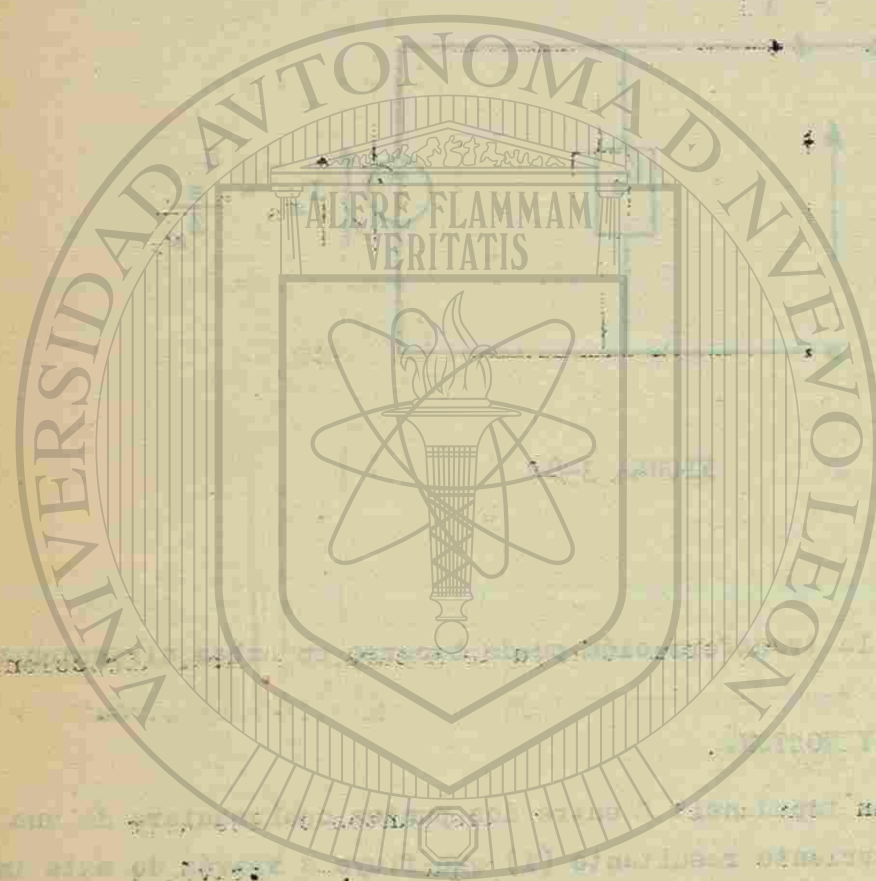
FIGURA 3-9

FIGURA 3-10

En esta figura última

$$I = I_{\text{fuente}} = \frac{V_{ab}}{Z_o}$$

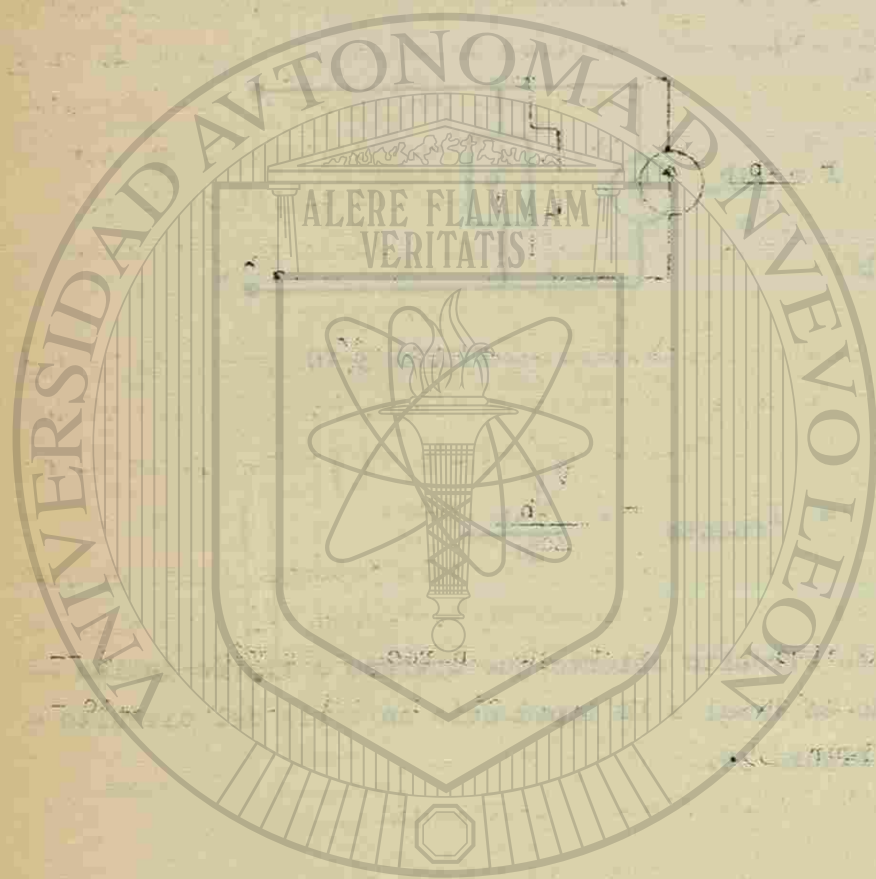
donde V_{ab} es el voltaje de circuito abierto que aparece a través de las -- terminales escogidas y Z_o es igual a la impedancia en serie del circuito -- equivalente de Thevenin figura 39.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





CAPITULO IV

POTENCIA MEDIA Y VALORES R.M.S.

INTRODUCCION

En el análisis de circuitos eléctricos casi todos los problemas están relacionados con la aplicación a uno de ellos de una o más fuentes de energía eléctrica y la determinación de la consiguiente respuesta del circuito. Ahora ya sabemos que la respuesta puede ser una corriente o una tensión, pero también nos interesa la cantidad de energía suministrada por las fuentes, así como la cantidad de energía almacenada o disipada en el circuito.

Comenzaremos considerando la potencia instantánea, producto de la tensión y la corriente en el dominio del tiempo asociadas con el elemento que nos interesa. La potencia instantánea es importante porque nos proporciona un medio para calcular el valor de la potencia media.

Nuestro análisis no se limitará únicamente a la potencia media entregada por una corriente o una tensión sinusoidal; estableceremos también una medida matemática de la eficacia de otras ondas en el suministro de potencia, a la cual llamaremos "Valor Eficaz".

LA ENERGIA EN LOS ELEMENTOS SUSCEPTIBLES DE ACUMULARLA.

Potencia Instantánea.

En un circuito resistivo la determinación de la velocidad a que la energía es generada o absorbida es:

$$p = v i \quad (1)$$

lo cual indica la potencia instantánea generada o consumida, donde: ^(R)

p = potencia instantánea en Watts

v = tensión instantánea en voltios

i = corriente instantánea en amperios

en el caso presente el de la rama R, toda la energía suministrada a ella es transformada en calor. La potencia instantánea está dada por el producto de las ecuaciones 1 y 2 del capítulo 1.

$$p = v i = V_m I_m \sin^2 \omega t$$

por trigonometría:

$$p = V_i \frac{V_m I_m}{2} - \frac{V_m I_m}{2} \cos 2 \omega t \quad (2)$$

Esto está representado en la siguiente figura:

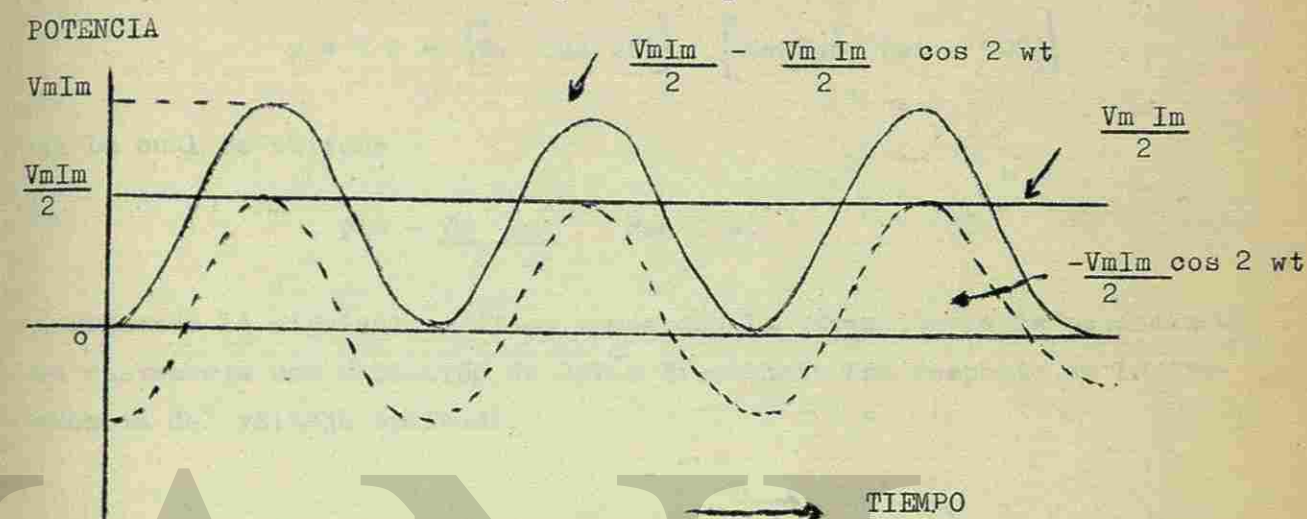


FIGURA 4-1

En la ecuación anterior se observa que la onda de potencia instantánea tiene una variación de doble frecuencia, con respecto a la frecuencia de la corriente o el voltaje, con un valor positivo medio de $\frac{V_m I_m}{2}$. El término $\cos (2\omega t)$ hace que la potencia instantánea tome periódicamente los valores cero y $\frac{V_m I_m}{2}$ en ningún momento toma la potencia valores instantáneos negativos.

Potencia Instantánea en un Circuito Inductivo.

Si se considera un circuito dotado únicamente de inductancia, la ecuación del voltaje es:

$$V = L \frac{di}{dt} = V_m \sin \omega t \quad (3) \text{ despejando;}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_m}{L} \sin \omega t \quad dt$$

Integrando ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$i = -\frac{V_m}{\omega L} \cos \omega t + C_1$$

Considerando $C_1 = 0$, pues solo se considera la corriente estaciona

ria, tendremos:

$$i = I_m \text{ Sen } (wt - 90^\circ) \quad (4)$$

La potencia instantánea entregada a la rama de inductancia pura se obtiene multiplicando las ecuaciones (3) y (4), esto es:

$$p = V i = [V_m \text{ Sen}(wt)] [I_m \text{ Sen } (wt - 90^\circ)]$$

de la cual se obtiene

$$p = - \frac{V_m I_m}{2} \text{ Sen } 2 wt \quad (5)$$

analizando la siguiente gráfica vemos que la variación de la potencia es nuevamente una variación de doble frecuencia con respecto de la frecuencia del voltaje aplicado.

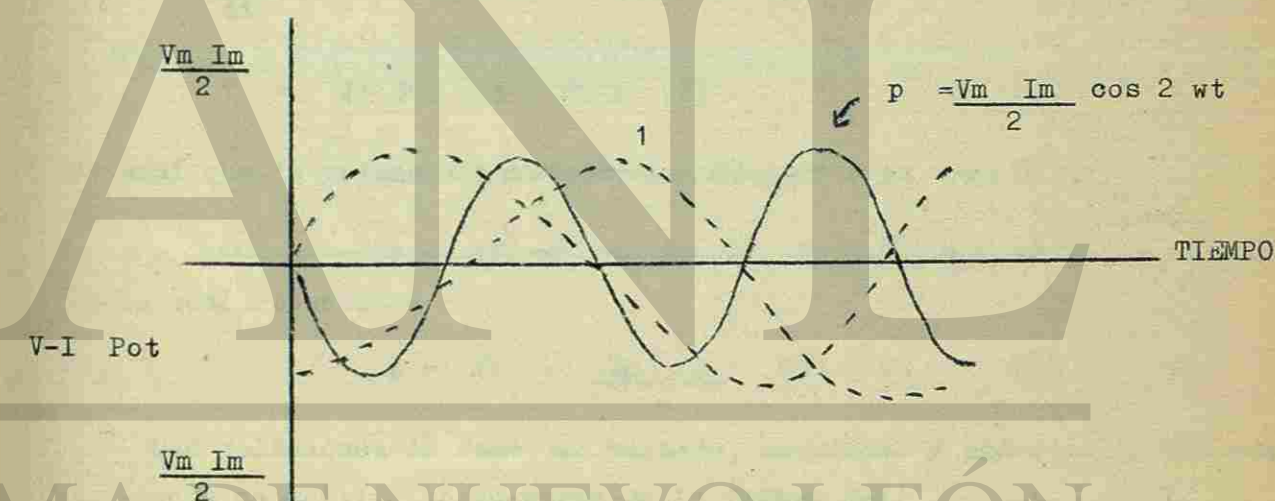


FIGURA 4-2

La potencia media consumida es igual a cero; la causa es que el elemento inductivo recibe energía de la fuente durante 1/4 de ciclo del voltaje y lo almacena en forma de un campo magnético y devuelve exactamente la misma cantidad de energía a la fuente de mando, durante el siguiente 1/4 de ciclo.

Potencia Instantánea en un Circuito Capacitivo.

Se supone que un voltaje sinusoidal $V_m \text{ Sen } \omega t$ se aplica a un condensador ideal como se muestra en la figura 4-3

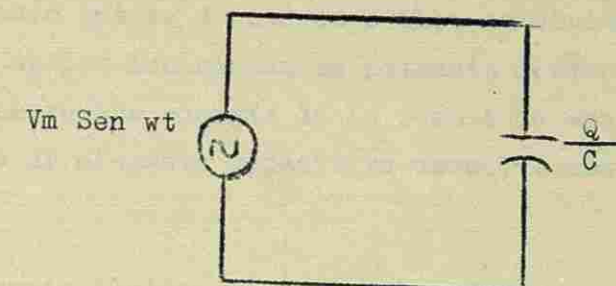


FIGURA 4-3

La fórmula del voltaje en el condensador es:

$$V = \frac{q}{C} = V_m \text{ Sen } \omega t \quad (6) \text{ de donde}$$

$$\frac{dQ}{dt} = V_m \omega C \text{ Cos } \omega t \quad (7)$$

$$i = I_m \text{ Sen } (\omega t + 90^\circ) \quad (8)$$

de aquí que la potencia instantánea entregada a la rama C es:

$$p = V i = V_m \text{ Sen } \omega t \quad I_m \text{ Sen } (\omega t + 90^\circ)$$

de lo cual obtenemos:

$$p = V i = \frac{V_m I_m}{2} \text{ Sen } 2 \omega t \quad (9)$$

Las relaciones de fase del voltaje, corriente y potencia en una rama puramente capacitiva se muestran en la figura 4-4.

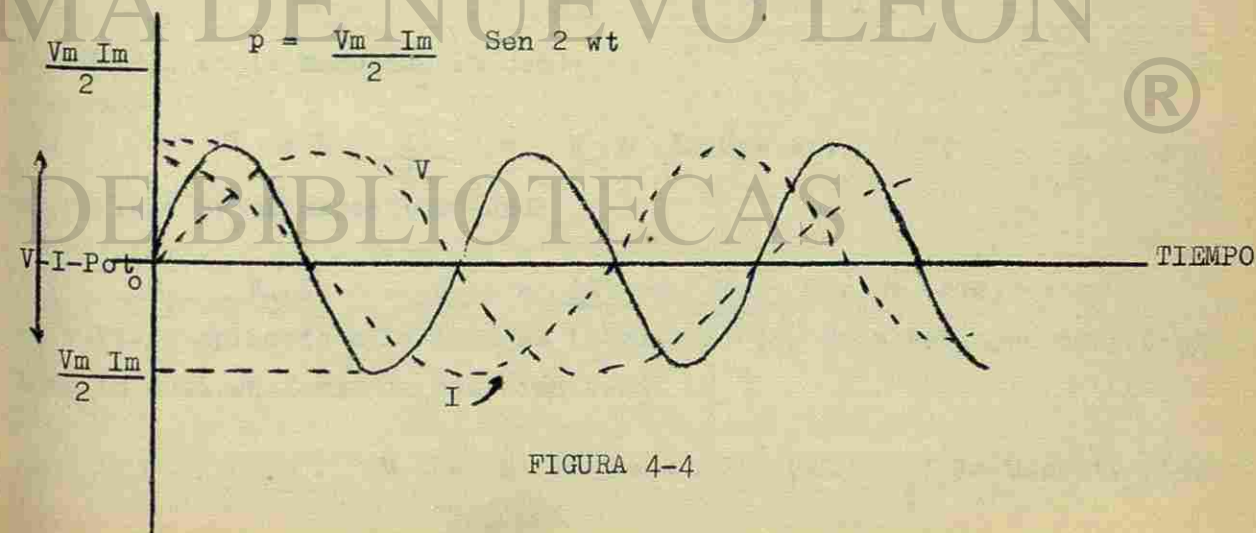


FIGURA 4-4

En este caso, el condensador recibe energía de la fuente durante el primer cuarto de ciclo de la variación del voltaje y devuelve la misma cantidad durante el segundo cuarto de ciclo. La potencia media absorbida durante un número entero de medios ciclos es obviamente igual a cero. La comparación de las ecuaciones de potencia instantánea en un circuito capacitivo que recibe energía de la fuente de suministro durante los períodos en que el elemento capacitivo devuelve energía y viceversa.

Cuando un circuito incluye elementos L y C, existe una tendencia entre elementos a intercambiar energía.

Relaciones de energía y Potencia en un Circuito Completo.

Supongamos que fluye en un circuito una corriente sinusoidal $i = I_m \text{ Sen } \omega t$; la cual pasa a través de una rama constituida por elementos R, L, C, como se muestra en la figura 4-5

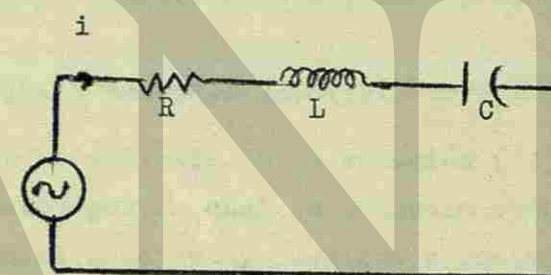


FIGURA 4-5

es obvio que el voltaje en la resistencia será:

$$V_R = R i = R I_m \text{ Sen } \omega t; \quad (10)$$

el voltaje en la inductancia será:

$$V_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \text{ Cos } \omega t; \quad (11)$$

el voltaje en el capacitor será:

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{idt}{C} = \frac{-I_m}{\omega C} \text{ Cos } \omega t \quad (12)$$

el voltaje aplicado a la rama es la suma de los tres voltajes componentes, lo cual en forma de ecuación será:

$$V = R I_m \text{ Sen } \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \text{ Cos } \omega t. \quad (13)$$

Hay que tener presente que los elementos inductivos y capacitivos causan desplazamientos de fase exactamente opuestos con respecto al -- voltaje.

Puesto que $i = I_m \text{ Sen } \omega t$ y $V = V_m \text{ Sen } (\omega t + \theta)$, entonces la expresión de la potencia instantánea a la rama R.L.C. tiene la siguiente -- forma:

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta - \frac{V_m I_m}{2} (\cos 2 \omega t) (\cos \theta) + \frac{V_m I_m}{2} (\sin 2 \omega t) (\sin \theta) \quad (14)$$

en este caso θ puede tomar cualquier valor entre $(+90^\circ)$ y (-90°) La -- potencia media entregada a la rama R.L.C. es, en cualquier caso -- $\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta$.

El término $(\frac{V_m I_m}{2} \sin 2 \omega t \sin \theta)$ es igual a cero siempre -- que θ sea igual a cero., esto es, cuando WL es igual a $\frac{1}{WC}$.

POTENCIA ACTIVA Y POTENCIA REACTIVA

Haciendo un análisis de la ecuación (14) para ayudar a la compren -- sión de la razón por la cual la potencia eléctrica es tratada en térmi -- nos de componentes activa y reactiva y considerando que la potencia -- activa instantánea está representada por $\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta - \frac{V_m I_m}{2} \cos (2 \omega t) \cos \theta$, podemos proceder de la siguiente manera:

La observación de la figura 4-6 mostrará que estos dos términos -- se combinan para formar una variación de potencia instantánea que no -- tiene valores negativos, de aquí que esta parte de la ecuación se lla -- ma potencia activa instantánea. A menos que se indique expresamente -- que significa potencia activa instantánea, la expresión potencia acti -- va se refiere únicamente a $\frac{V_m I_m}{2} \cos \theta$ o sea el valor medio de la -- potencia instantánea total con respecto al tiempo.

El tercer término de la ecuación (14) $\frac{V_m I_m}{2} (\sin 2 \omega t) (\sin \theta)$, es llamado potencia "reactiva" instantánea o potencia instantánea en -- cuadratura, etc, por la razón de que el área situada bajo la curva;

$$\frac{V_m I_m}{2} (\sin 2 \omega t) \sin \theta$$

representa la energía que oscila entre la fuente de mando y los elementos reactivos (inductivos o capacitivos) del circuito. Se ve en la figura 6 que la potencia reactiva instantánea que tiene "picos" positivos y negativos iguales y que tiene como factor el seno del ángulo de fase -- entre V e i .

A menos que se indique expresamente qué significa potencia reactiva instantánea la expresión potencia reactiva se refiere simplemente a $\frac{V_m I_m}{2} \text{ Sen } \theta$.

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \text{ Cos } \theta - \frac{V_m I_m}{2} \text{ Cos } 2 \text{ wt Cos } \theta + \frac{V_m I_m}{2} \text{ Sen } 2 \text{ wt Sen } \theta$$

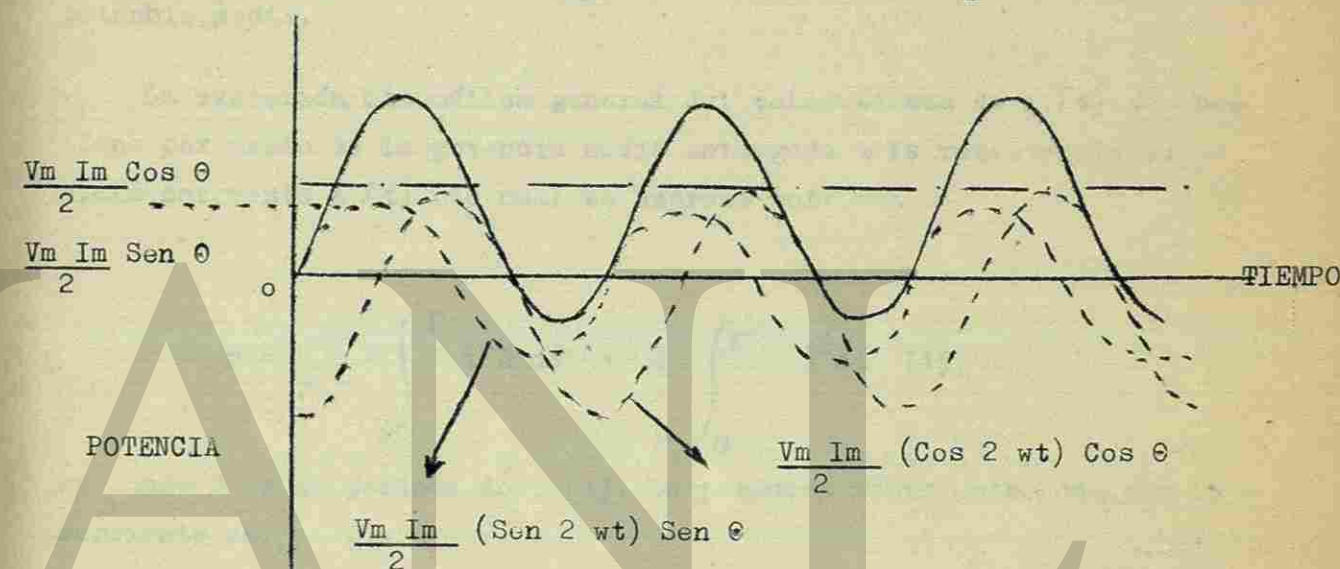


FIGURA 4-6

VALORES EFICACES.- Para un mayor entendimiento de este punto se a escogido un ejemplo muy simple, como son las tomas de corriente de una casa, comunmente llamados "enchufes". Sabemos que disponemos de un voltaje alterno de 60 c.p.s. y 110 volts.; pero, ¿Cuál será el significado de esos 110 volts? estamos en condiciones de saber que no es el valor instantáneo del voltaje pues éste no es constante, sabemos también que 110 volts tampoco es el valor máximo (E_m), pues si observamos la onda de voltaje procedente de los enchufes en un osciloscopio veremos que el valor máximo es $110\sqrt{2}$. Tampoco es un valor medio pues el valor medio de una onda senoidal es cero, lo que obtendremos al final de cuentas es que los 110 volts representan el valor "eficaz" de la onda sinusoidal, este valor es una medida de la eficacia de una fuente de voltaje a suministrar potencia a una carga.

Procederemos ahora a analizar el valor eficaz de cualquier onda -- que represente un voltaje o una corriente.

El valor eficaz de una corriente periódica cualquiera es igual al valor de la corriente continua que al circular por una resistencia R , le entrega la misma potencia que la corriente periódica; en otras palabras, se hace que la corriente periódica dada circule por una resistencia R , se determina la potencia instantánea $i^2 R$ y se halla a continuación el valor medio de $i^2 R$ en un período, es decir, la potencia media. Después se hace que una corriente continua circule por la misma resistencia y ajustamos el valor de esta corriente hasta obtener la misma -- potencia media.

La expresión matemática general del valor eficaz de $i(t)$ se obtiene por medio de la potencia media entregada a la resistencia por dicha corriente $i(t)$, lo cual se expresa por:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (15)$$

en donde T es el período de $i(t)$. La potencia media entregada por la corriente es:

$$P = I^2 R = I^2_{ef} R \quad (16)$$

igualando las 2 ecuaciones anteriores y despejando I_{ef} :

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (17)$$

de la misma manera se puede encontrar una expresión similar para el valor eficaz del voltaje.

Concretizando, la operación necesaria para hallar el valor eficaz es calcular la raíz cuadrada de la media del cuadrado.

El caso más importantes es el de la onda senoidal. Tomamos la corriente senoidal $i(t) = I_m \cos(\omega t - \phi)$ que tiene un período $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

sustituyendo estos valores en la ecuación (17) se obtiene:

$$I_{ef} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 (wt - \phi) dt$$

esto es igual a:

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

de aquí que el valor eficaz de una corriente sinusoidal es una cantidad - real independiente del ángulo de fase y numéricamente igual a 0.707 veces el valor máximo. El uso de este valor eficaz simplifica la expresión de la potencia media entregada por una corriente o tensión sinusoidal; por ejemplo, la potencia media entregada a una resistencia R por una corriente sinusoidal es:

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

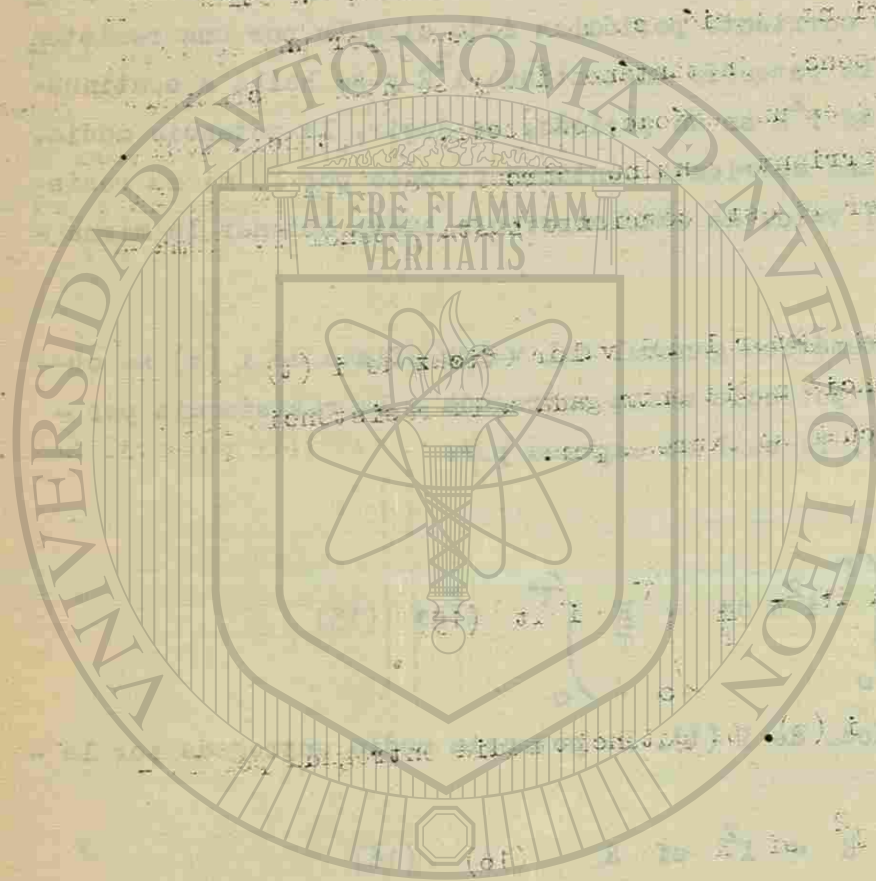
sustituyendo I_m por $(\sqrt{2})$ (I_{ef} eficaz) se puede escribir potencia media como:

$$P = I_{ef}^2 R$$

otras expresiones de la potencia ya conocida, son:

$$P = E_{ef} I_{ef} \cos \phi$$

$$P = E_{ef}^2 / R$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO V CIRCUITOS POLIFASICOS

Los voltios polifásicos son generados en la misma forma que los monofásicos.

Un sistema polifásico está formado por varios sistemas monofásicos, desplazados en fase de tiempo uno con respecto al otro e interconectados.

En la figura 1 se muestra una bobina aa' en la armadura de una máquina de dos polos; cuando los polos están en la misma posición mostrada, es máxima la f.e.m. del conductor (a) de la bobina (aa') y su sentido es alejándose del lector.

Ahora si se coloca un conductor en la posición (b), o sea a 120° de (a), se daría en el mismo una f.e.m. máxima en un sentido que se aleja del lector y el eje del polo norte estaría en (b) o sea 120° después que estuviera en (a), de la misma manera se hace para un conductor (c), el cual se encuentra a 120° de (b) y 240° de (a); así, los conductores aa' , bb' , cc' tendrían f.e.m.s, que están a 120° fuera de fase de tiempo. En la figura 5-1 se muestra la colocación de los conductores y en la figura 5-2 se dibuja su diagrama.

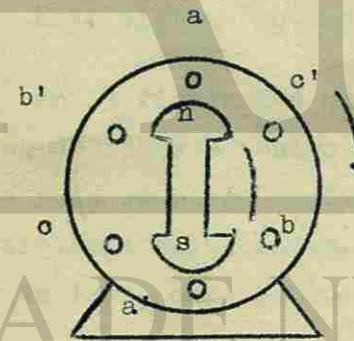


FIGURA 5-1

Este sistema es llamado trifásico, por que hay tres ondas de diferente fase de tiempo.

Está claro que podría obtenerse cualquier número de fases, espaciando adecuadamente las bobinas en el estator.

El desplazamiento eléctrico entre fases para un sistema balanceado de N fases, es de $360/n$ grados eléctricos.

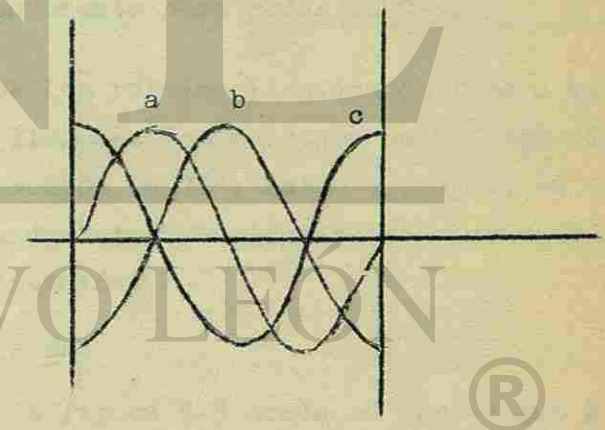


FIGURA 5-2

Aunque los sistemas trifásicos son los más comunes, en ciertas aplicaciones especiales se usa un número mayor de fases.

CIRCUITOS TRIFÁSICOS EQUILIBRADOS

Partiendo de la explicación de la generación de tres fases, si se conectan tres alambres para terminales a, b y c y uno para la conexión común a'b'c', tendremos un sistema llamado trifásico cuatrifilar, el cual se muestra en la figura 5-3

La figura 5-4 muestra el diagrama vectorial de la misma.

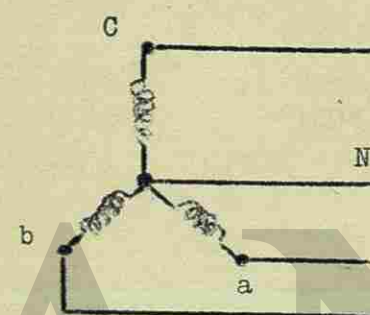


FIGURA 5-3

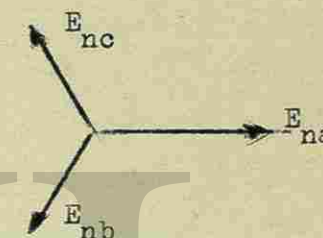


FIGURA 5-4

Este sistema se usa ahora extensamente para redes de C-A.

En la figura 5-4 están mostrados los voltios llamados de fase o voltajes de línea a neutro. Estos son llamados los voltajes en "Y" del sistema y la conexión es llamada una conexión en "Y". Estos voltajes, en condiciones balanceadas, están definitivamente relacionados con los voltajes de fase, como se muestra a continuación:

$$E_{ba} = E_{bn} + E_{na}$$

Esta combinación se muestra en la figura 5-5 donde se supone que E

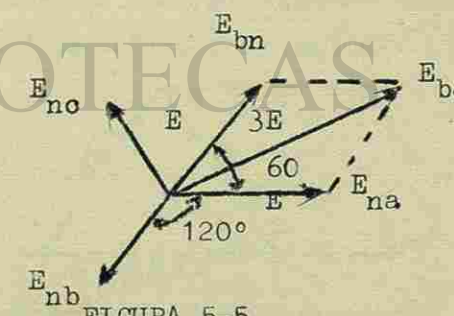


FIGURA 5-5

es la magnitud del voltaje de fase. De aquí que el voltaje de línea, en la conexión trifásica en estrella, es igual a $\sqrt{3}$ por el voltaje de fase y forma un ángulo de 30° o de 150° con los voltajes de fase componentes dependiendo de cuáles se consideren.

Cuando el sistema está balanceado, las corrientes en las tres fases son todas de igual magnitud y defieren solamente por 120° en fase de tiempo.

La corriente de alambre neutral se obtiene mediante la aplicación de la ley de KIRCHHOFF referente a la corriente, así:

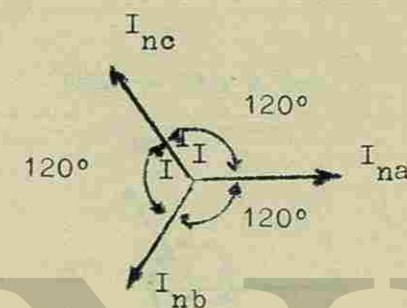


FIGURA 5-6

si el sistema está balanceado I_{na} , I_{nb} e I_{nc} son de igual magnitud y están desplazadas una con otra en fase de tiempo por 120° , como se muestra en la figura 5-6.

En estas condiciones, es natural que la corriente del neutro sea cero, puesto que $I_{na} + I_{nb} + I_{nc} = 0$.

CONEXION DELTA.

Si solamente se usan tres hilos, el sistema trifásico puede ser conectado en malla, similar al sistema tetrafásico estudiado anteriormente.

Ya que $E_{na} + E_{nb} + E_{nc} = 0$, para el sistema trifásico las tres bobinas mostradas en la figura 4 pueden ser conectadas como se indica en la figura 5-7

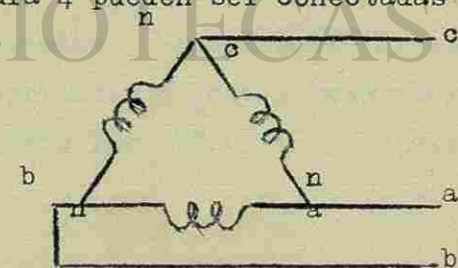


FIGURA 5-7

y no fluirá ninguna corriente de frecuencia fundamental en el circuito en serie de las tres bobinas.

Esta conexión trifásica es llamada conexión en Delta.

Un análisis de la figura 5-7 muestra que los voltajes de fase y de línea son iguales pero que los corrientes de línea y de fase son diferentes. En la figura 5-8 se muestra el diagrama vectorial de las corrientes de fase, para una carga balanceada. Las corrientes de línea se determinan mediante la aplicación de la ley de KIRCHHOFF referente a la corriente, - así pues.

$$I_{aa'} = I_{ba} + I_{ca}$$

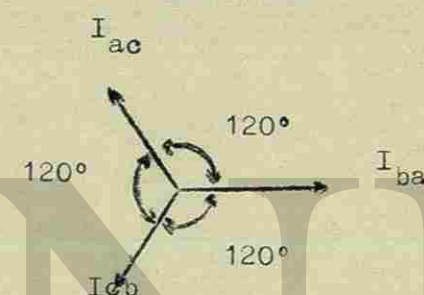


FIGURA 5-8

Esta operación se efectúa en la figura 5-9

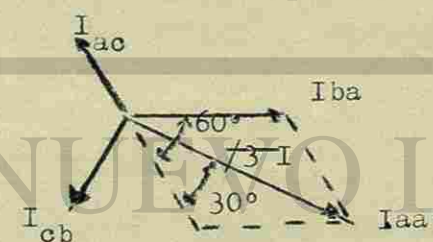


FIGURA 5-9

Para un sistema balanceado, la corriente de línea tiene una magnitud, igual a 3 por la corriente de fase y esta fuera de fase con las corrientes componentes de fase por 30° o 150° , lo que depende de cuales se tomen en cuenta.

POTENCIA EN CIRCUITOS POLIFASICOS BALANCEADOS.

La determinación de la potencia en sistemas polifásicos balanceados se basa en cálculos/fase. Si el voltaje por fase es V_p la corriente de fase I_p y el ángulo entre los mismos θ_p , la potencia/fase es

$$P_p = V_p I_p \cos \theta_p$$

La potencia total para un sistema de n fase es,

$$P_t = N P_p = N V_p I_p \cos \theta_p \quad (2)$$

La uniformidad de las tres fases garantiza que el desarrollo de la ecuación (2) dará potencia en función de la corriente de línea I_L y del voltaje de línea V_L . Si se considera la conexión Y se tendrá:

$$P_t = 3 V_p I_p \cos \theta_p = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_p = 3 V_L I_L \cos \theta_p$$

Para la conexión en Delta:

$$P_f = 3 V_p I_p \cos \theta_p = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p$$

Las ecuaciones de potencia, en función de voltaje de línea y corriente de línea y para cargas trifásicas balanceadas, si están conectadas en Y, son idénticas e iguales a $3 V_L I_L \cos \theta_p$, donde θ_p es el ángulo entre voltaje de fase y la corriente de fase., no entre el voltaje de línea y la corriente de línea.

FACTOR DE POTENCIA TRIFASICA.

El factor de potencia de un sistema trifásico balanceado, cuando son senoidales las formas de las ondas del voltaje y de la corriente, se define como el coseno del ángulo entre el voltaje de la fase y la corriente de fase, independientemente de que la conexión sea en A ó Y, esto es:

$$f_p = \cos \theta_p = \frac{P}{\sqrt{3} V_L I_L}$$

VOLTAMPERIOS REACTIVOS.

Los voltamperios reactivos, para un sistema trifásico balanceado, se definen como la suma de los voltamperios reactivos para cada fase o tres veces los voltamperios reactivos/fase. En función de voltaje de línea y corriente de línea. Los voltamperios/fase. En función de voltaje de línea y corriente de línea. Los voltamperios reactivos o potencia reactiva son:

$$\text{Para } Y \quad P_x = 3 V_p I_p \sin \phi_p = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \sin \phi_p = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi_p$$

$$\text{Para } \Delta \quad P_x = 3 V_p I_p \sin \phi_p = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \sin \phi_p = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi_p$$

Resumiendo: para Δ o Y balanceados, los resultados totales para los sistemas son:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi_p$$

$$V_a = \sqrt{3} V_L I_L$$

$$P_x = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi_p$$

MEDICIÓN DE POTENCIA TRIFÁSICA.

La potencia en un sistema trifásico se puede medir mediante dos voltímetros. Para determinar el factor de potencia también es necesario tener un amperímetro y un voltímetro.

La figura 5-10 indica como se deben conectar los voltímetros, el amperímetro y el voltímetro para medir la potencia absorbida por un motor m - (un motor puede representarse en un circuito eléctrico.

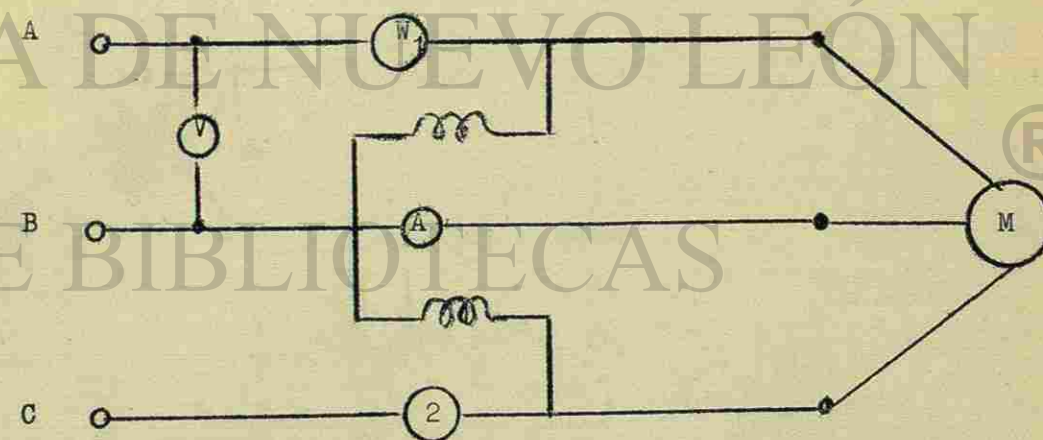
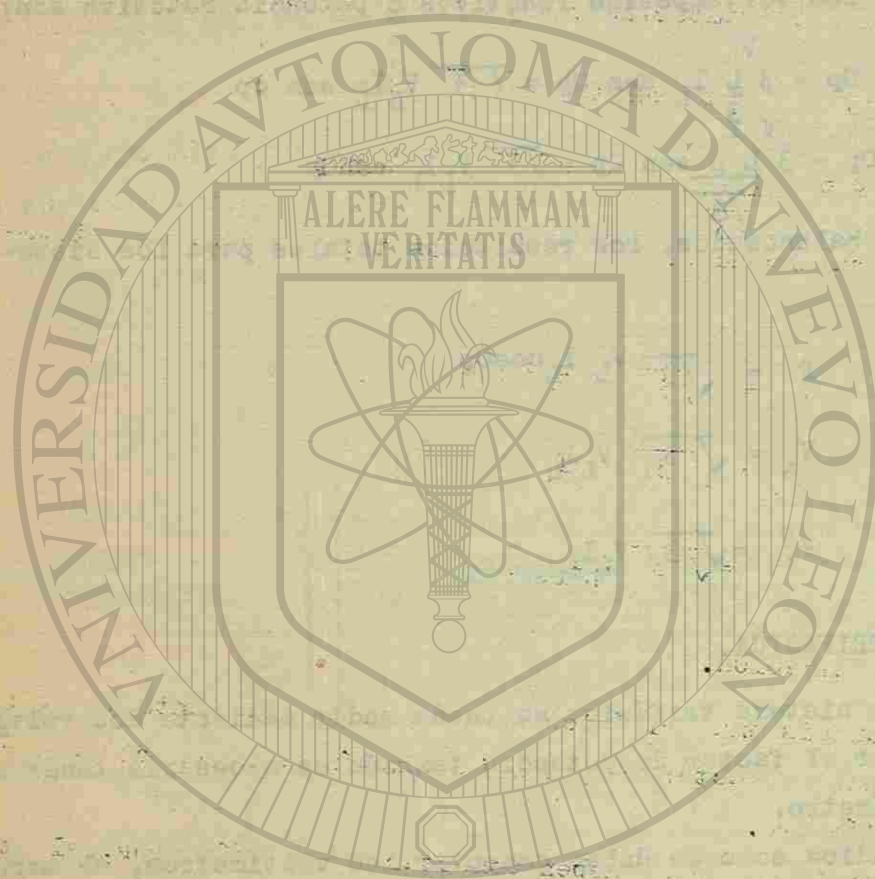


FIGURA 5-10

Obsérvese que el voltímetro W_1 tiene la bobina de corriente sobre un conductor A y la bobina de tensión entre los conductores A y B.

La bobina de corriente del voltímetro W_2 debe colocarse en línea -- C y las terminales de la bobina de tensión conectados a la línea C y a la línea B. La suma algebraica de las lecturas de los dos voltímetros es el valor de la potencia absorbida por el motor.

La potencia aparente se determina conectando el voltímetro y el amperímetro A como en la figura 5-10 y multiplican sus indicadores entre sí y también $\times 1.73$.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



INTRODUCCION

Una transformación es una operación que convierte una expresión matemática en otra de forma diferente pero equivalente. Por ejemplo, la ecuación para curva puede ser transformada de coordenadas rectangulares a coordenadas polares o viceversa. También la localización de la curva --- puede ser referida a un nuevo sistema de ejes coordenados por una transformación de coordenados. Una transformación es normalmente empleada para simplificar la solución de un problema, de igual manera que los transformaciones logarítmicos reducen la multiplicación y la división a procesos simples de suma y resta.

La transformada de Laplace es una transformación para obtener la solución de la ecuación diferencial por el uso de métodos algebraicos, esta transformada se puede considerar como una extensión de la Serie de -- Fourier.

SERIE DE FOURIER. Una función periódica de período T se muestra a continuación:

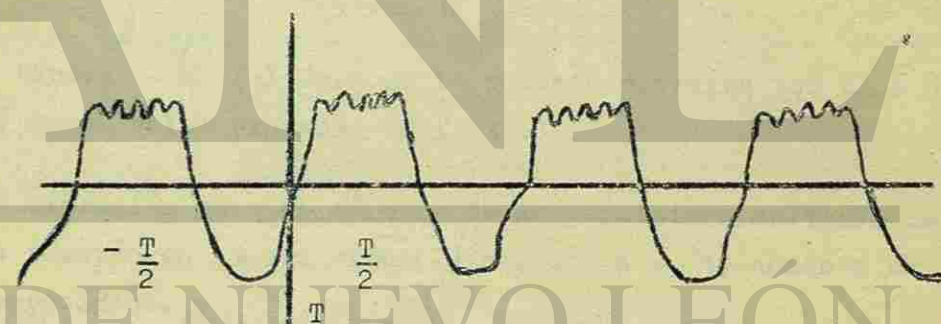


FIGURA 6-1

Esta función periódica $f(t)$ se puede expresar como una suma de términos de senos y de cosenos.

$$f(t) = K + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

donde K, A_n y B_n son constantes.

Esta ecuación es la Serie de Fourier para una función periódica. Como el tiempo T varía desde $-T/2$ a $T/2$, el término t/T varía desde $-1/2$ a $1/2$, como se muestra en la figura 6-2. Como el tiempo t se considera a través de un período completo, entonces el consumo de $\frac{2\pi t}{T}$ varía a través de N ciclos completos. Igualmente como t se considerará a través de un período, entonces el $\text{Sen } \frac{2\pi t}{T}$ también completa N ciclos.

Luego la ecuación (1) puede ser expresada en la forma $f(t) = K + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos N \omega_0 t + B_n \text{Sen } N \omega_0 t)$ (2), donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es la velocidad angular.

La constante K es calculada por la Integración de cada término de la ecuación 2 sobre un período completo. Cada término coseno y seno en la suma infinita desaparece cuando se integró sobre un período, entonces:

$$\text{o bien; } \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} K dt = K T$$

$$K = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

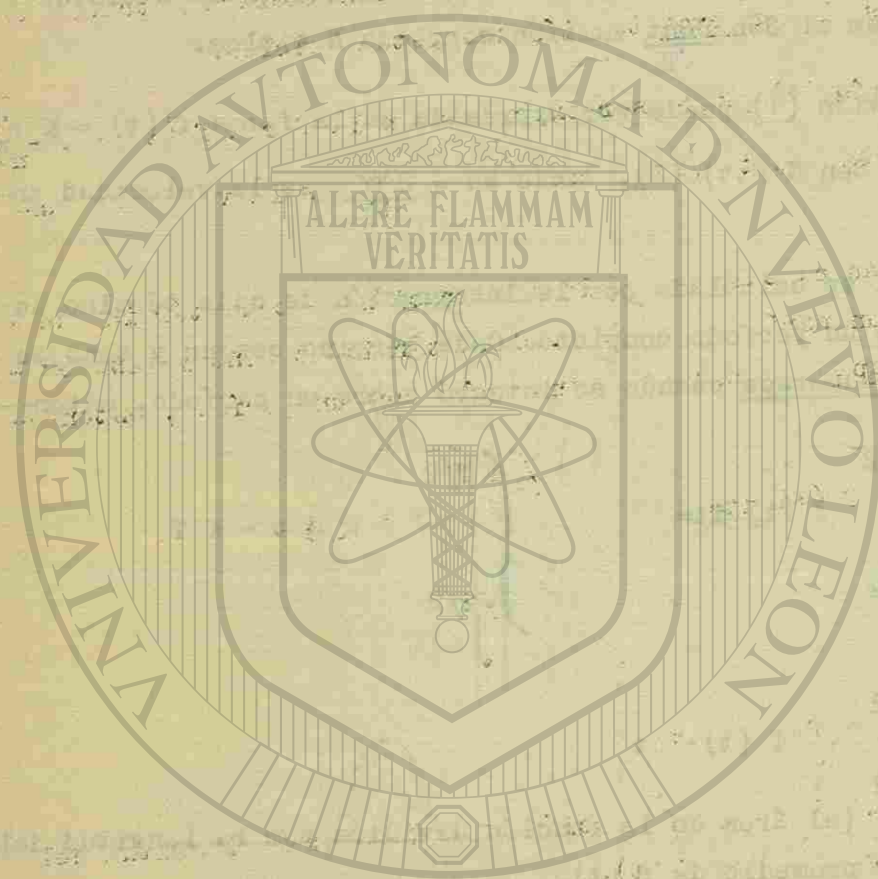
El término $-K$ (el área de la función dividida por la longitud del período) es el valor promedio de $f(t)$.

Una expresión para el cálculo de A_n se obtiene multiplicando una vez cada término en la ecuación (2) por $\cos M \omega_0 t$, donde m es un integer específico.

Por lo cual integrando cada término sobre un período y teniendo en cuenta que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (\cos N \omega_0 t)(\cos M \omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{para } n = m \end{cases}$$

y



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

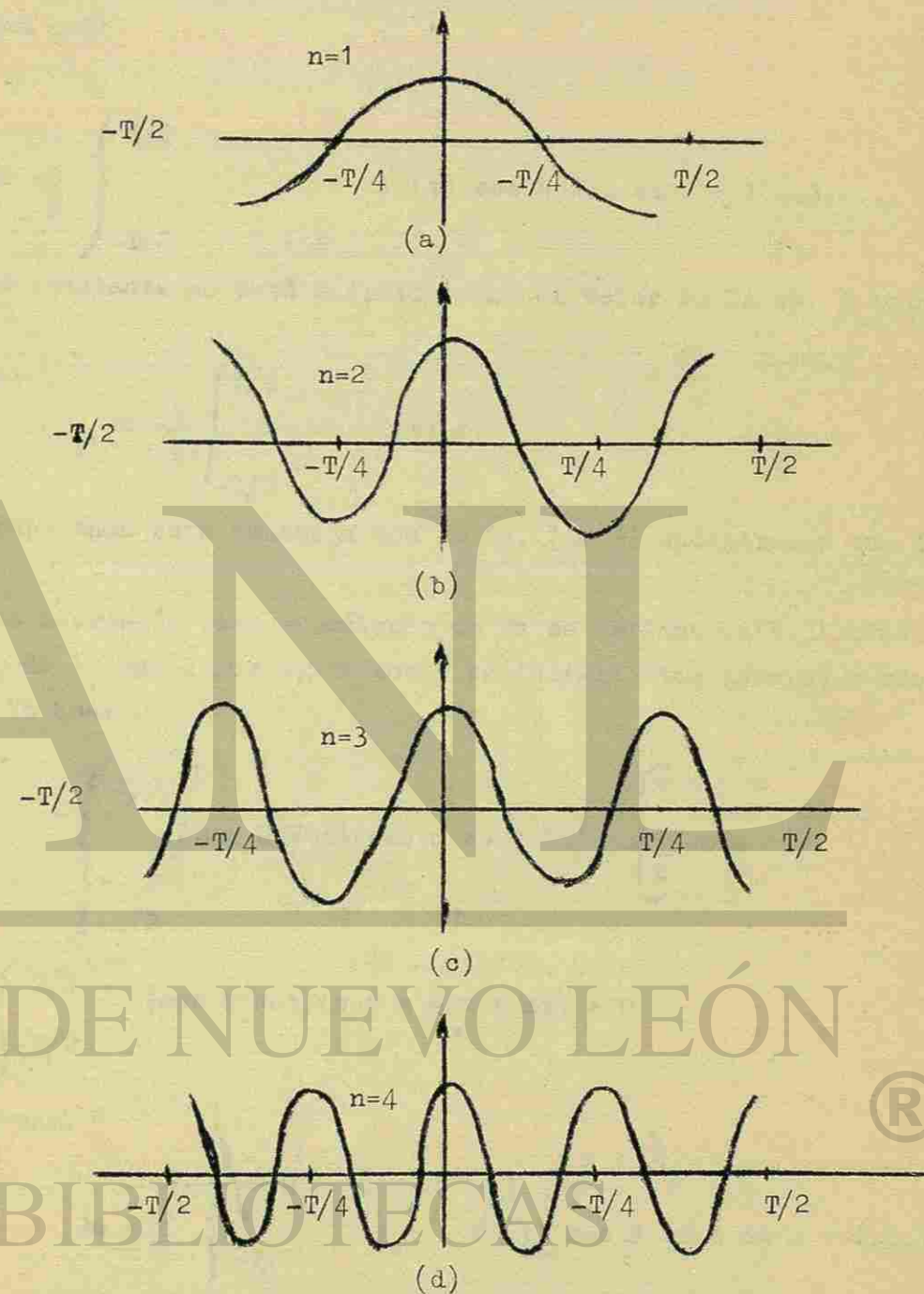
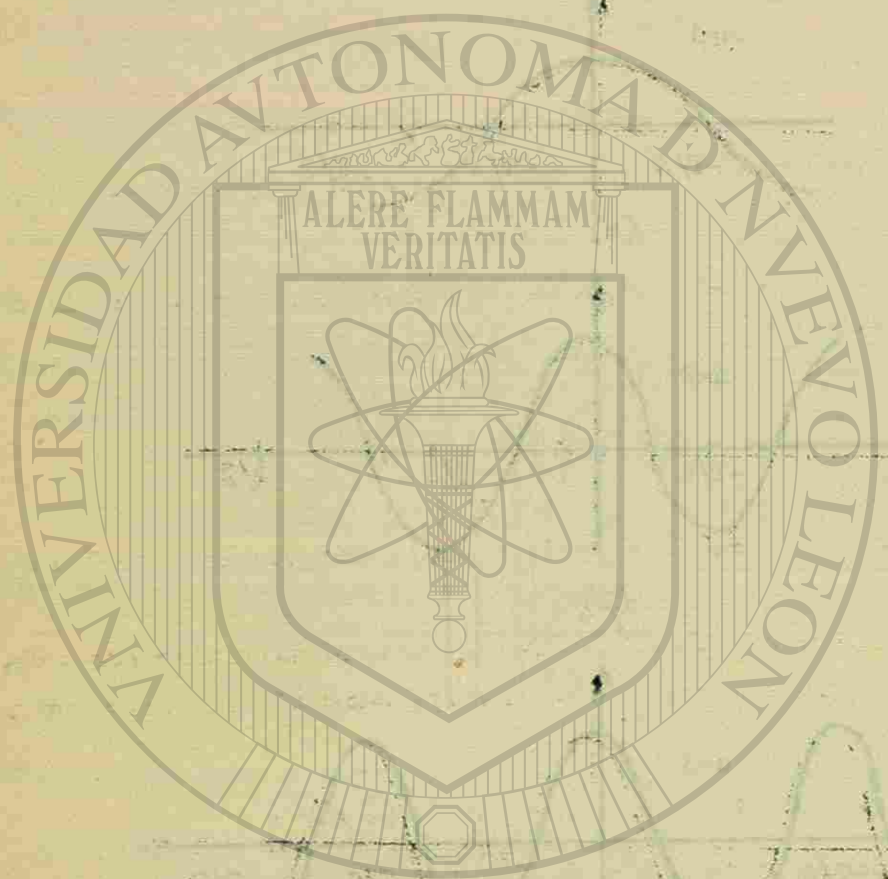


FIGURA 6-2



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$\int_{-T/2}^{T/2} (\sin N \omega t) (\cos M \omega t dt) = 0$$

se sigue que:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos N \omega t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

La constante A_0 está definida como el valor de la ec. 4 cuando $n = 0$.

Esto es:

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Comparando esta ecuación con la 1a. (ec.3) encontramos que $K = \frac{A_0}{2}$

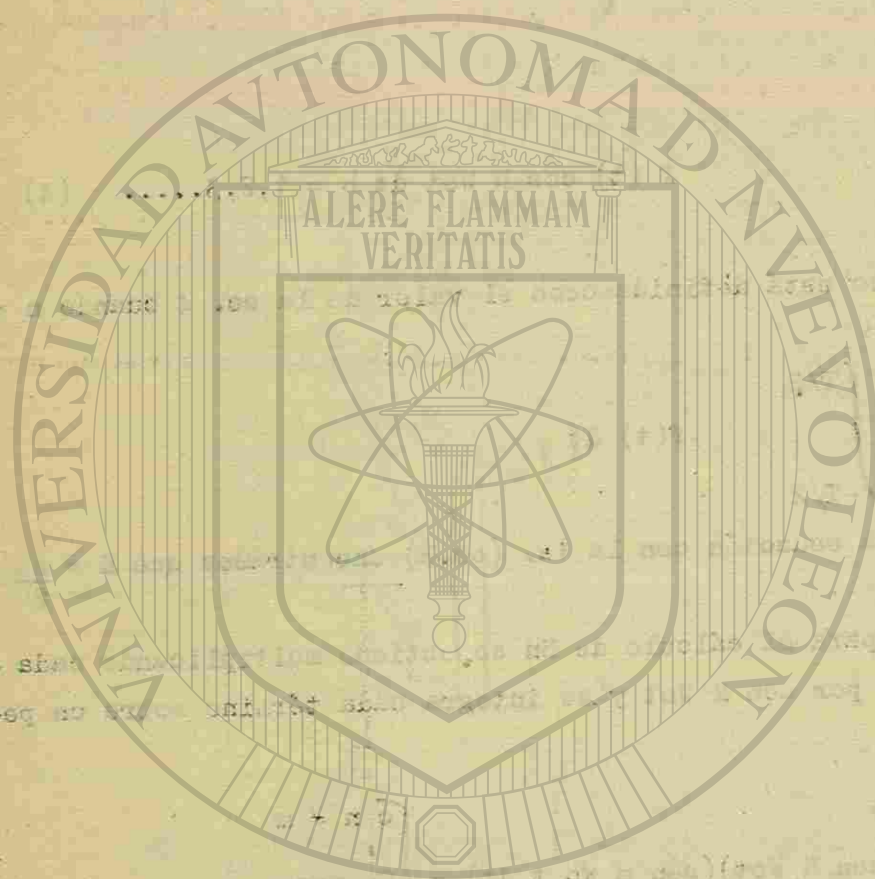
Una expresión para el cálculo de B_n se obtiene multiplicando cada término de la ec. 2 por $\sin M \omega t$ y se integra cada término sobre un período. Ya que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} (\sin N \omega t)(\sin m \omega t dt) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T}{2} & n = m \end{cases}$$

$$y \int_{-T/2}^{T/2} (\cos N \omega t)(\sin m \omega t dt) = 0$$

tomemos que:

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin N \omega t dt \quad n = 1, 2, 3, \dots (6)$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO VII

MATRICES

El cálculo de las matrices nos provee de un poderoso método para el análisis de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones diferenciales, - ecuaciones simultáneas, etc. Otra gran particularidad de las matrices es que es sumamente utilizado en la computación moderna.

SUMA Y RESTA DE MATRICES.

La suma $A + B$ está definida como la matriz que resulta de la suma de los elementos correspondientes en A y B .

Igualmente la resta está definida como la matriz que resulta cuando se restan los elementos correspondientes de A y B .

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 1 & 5 + 4 \\ 7 + 3 & 6 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - 1 & 5 - 4 \\ 7 - 3 & 6 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACION DE MATRICES.

Supóngase que tenemos el sistema de ecuaciones.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 = Y_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 = Y_2$$

Un ejemplo de una matriz se obtiene por el arreglo de la coeficiente de las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de dos matrices se efectúa de la siguiente manera como lo indica la figura 7-1

		b_{11}
		b_{21}
		b_{12}
a_{11}	a_{12}	

FIGURA 7-1

A manera de explicación de la multiplicación de dos matrices, hacemos el ejemplo siguiente:

supóngase que tengamos dos sistemas de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 &= Y_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 &= Y_2 \end{aligned} \right\} \text{ sistema 1}$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} Y_1 + b_{12} Y_2 &= A \\ b_{21} Y_1 + b_{22} Y_2 &= B \end{aligned} \right\} \text{ sistema 2}$$

El primer sistema lo podemos poner en forma matricial tal como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

para el segundo sistema igualmente tenemos que:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad (3)$$

Substituyendo (2) en (3) tenemos:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Ahora necesitamos multiplicar las dos matrices de la izquierda.

Esto se hace de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de dos matrices no es permutable o sea:

$$A \times B = D$$

$$A \times B \neq B \times A$$

Ejemplo: Calcule $A \times B$ de las matrices.

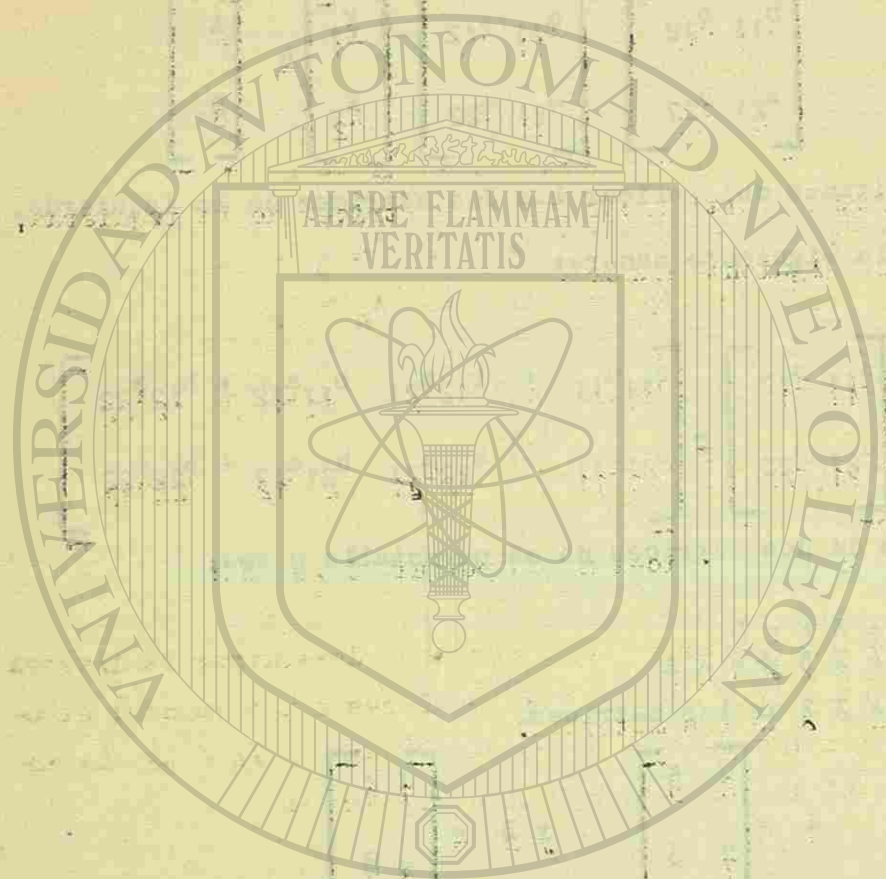
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+15 & 8+40 \\ 7+18 & 28+48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 48 \\ 25 & 76 \end{bmatrix}$$

INVERSA DE LA MATRIZ.

Las matrices nos proveen de un camino completo para la solución de ecuaciones lineales, antes de entrar a esto es necesario definir algunas propiedades adicionales de las matrices. La unidad o matriz identidad 1, es definida como la matriz en la cual todos los elementos de la diagonal principal son 1 y todos los otros elementos son cero (0) esto es:

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Multiplicando una matriz cualquiera por la matriz identidad no cambia el valor de la matriz esto es:

$$IX = X$$

La inversa A^{-1} de una matriz A es una matriz que:

$$A^{-1} A = I$$

Si tenemos un sistema de ecuaciones:

$$A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + \dots + A_{1n} X_n = b_1$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + \dots + A_{2n} X_n = b_2$$

$$A_{n1} X_1 + A_{n2} X_2 + \dots + A_{nn} X_n = b_n$$

La rotación matricial para estas ecuaciones será:

$$A^{-1} Ax = A^{-1} b$$

o bien

$$x = A^{-1} b$$

Entonces la solución se reduce al problema de determinar la inversa A^{-1} . La inversa de una matriz cuadrado (n renglones $\times$ n columnas) existe solamente si el determinante de A no es cero (esto es $|A| \neq 0$). La inversa de una matriz está dada por la relación siguiente:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

La adjunta de una matriz A es la matriz formada cuando cada elemento es reemplazado por su cofactor y transponiendo el resultado de la matriz. Una matriz es transpuesta por intercambio de sus renglones por columnas.

Como un ejemplo de lo anterior tenemos lo siguiente:

Supongamos que las siguientes ecuaciones son tres ecuaciones de malla de un circuito eléctrico.

$$2I_1 + 5I_2 - I_3 = 4$$

$$I_1 + 3I_2 + 4I_3 = 6$$

$$5I_1 - I_2 + I_3 = 3$$

y se desea encontrar las corrientes I_1 , I_2 e I_3

Para esto primero determinamos la inversa de los coeficientes de la matriz para las ecuaciones anteriores o sea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

reemplazando cada elemento por su cofactor tenemos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 19 & -16 \\ -4 & 7 & 27 \\ 23 & -9 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Cada uno de estos elementos es el resultado del determinante (a) - resuelto por "Menores" por ejemplo para encontrar el primer renglón se hace de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar el primer cofactor del primer elemento (2) del primer renglón tenemos:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 - (-4) = 7$$

para encontrar el segundo cofactor del segundo elemento (5) primer renglón tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & \textcircled{5} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1 - 20) = 19$$

y así sucesivamente para encontrar los demás cofactores del determinante.

Transponiendo la matriz (b) y dividiéndola entre /A/ tenemos la inversa de la matriz:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 23 \\ 19 & 7 & -9 \\ -16 & 27 & 1 \end{bmatrix}$$

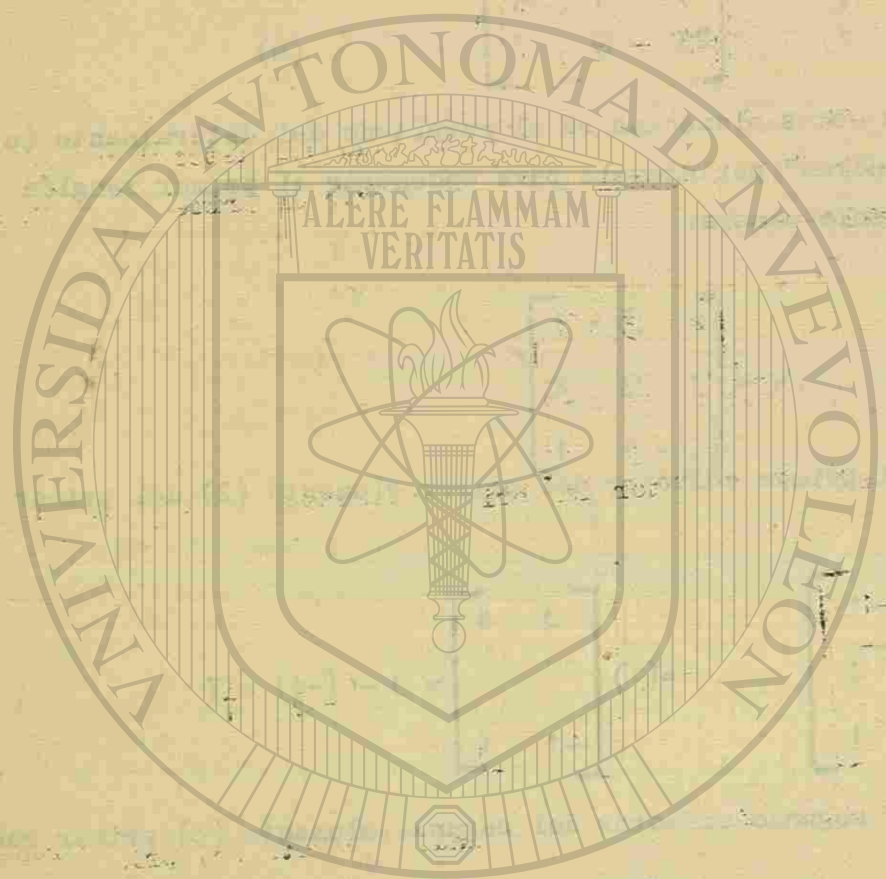
Poniéndola en la forma de la solución, $I = A^{-1}b$ es:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 23 \\ 19 & 7 & -9 \\ -16 & 27 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para I_2 :

$$I_2 = \frac{19(4) + 7(6) - 9(3)}{125} = \frac{91}{125}$$

y así igualmente para encontrar los valores de I_1 e I_3 .



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



U A N L

SIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO

CCIÓN GENERAL DE BIBLIOTEC