UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

TEORIA DE CIRCUITOS LINEALES
EN CORRIENTE DIRECTA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

TEORIA DE CIRCUITOS LINEALES EN CORRIENTE DIRECTA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA

I N D I C E

CAPITULO		Página
	Circuito equivalente para redes de cuatro terminales....................	66
	Circuito "t" equivalente............	68
	Circuito "π"........................	69
VI	DIFERENCIACION E INTEGRACION DE FUNCIONES	
	Introducción.......................	71
	Diferenciación.....................	71
	Integración........................	73
	Funciones de Singularidad...........	78
	Función Escalón....................	78
	Función Impulso....................	80
	Función Rampa......................	81
	Funciones de singularidad en un determinado tiempo.......................	81
	Solución de Curvas Periódicas........	82
VII	RESPUESTA EN EL TIEMPO DE ELEMENTOS SIMPLES	
	Introducción.......................	83
	Relación Volt Ampere................	83
	Energía Inicial Almacenada..........	84
	Respuesta a un impulso..............	89
	Capacitancia.......................	91
VIII	RESPUESTA DE LOS CIRCUITOS RL-RC	
	Introducción.......................	93
	Ecuación diferencial de 1er. orden...	94
	Respuesta en los circuitos Rl.......	98
	Circuitos sobre amortiguado.........	105
	Amortiguamiento Crítico.............	110

CAPITULO I

DEFINICIONES Y SISTEMAS DE UNIDADES

Antes de entrar al estudio de los elementos que normalmente constituyen a los circuitos eléctricos es conveniente dar una breve introduccion de ciertos términos, y la necesidad de un sistema de unidades que están estrechamente relacionados con ellos.

Como primer paso hablaremos sobre el medio que hace que los elementos de los circuitos eléctricos se activen, esto es, la energía eléctrica, por ejemplo al accionar un conmutador de una lámpara, esta encenderse.

La energía eléctrica es un flujo constante de electrones que para moverse de un lado a otro lo hace por medio de elementos conductores, las diminutas partículas que se mueven y transportan la energía reciben el nombre de electrones.

Para poder dar una explicación de los electrones es necesario antes hablar de la materia, nos referiremos a ésta como todo aquello que se pueda tocar.

La materia está formada por átomos y estos a su vez están constituídos por protones y electrones, ambas son partículas eléctricas y no son divisibles.

Ahora bien, los electrones son partículas menores más ligeras, las cuales como sabemos tienen carga negativa, lo que significa que están rodeados por un campo de fuerza invisible que actúa de un modo electricamente negativo sobre cualquier elemento que tenga carga eléctrica y esté dentro de los límites del campo.

Los protones son partículas más pesadas que los electrones y están rodeados por un campo eléctrico positivo. Se dice que el protón es tan positivo como negativo es el electrón, teniendo cada uno de ellos una carga eléctrica unidad. Teóricamente las líneas de fuerza negativa del electrón no se pueden unir con otras líneas de fuerzas negativas, sino que se repelen entre si, lo mismo sucede con las líneas de fuerza positiva.

Ahora bien, si un electrón y un protón se encuentran muy-Alejados entre sí la atracción es mínima, y si están muy cerca aumenta. Esto quiere decir que los electrones se repelen entre sí lo mismo los protones, pero electrones y protones se atraen unos a otros siguiendo la ley de la física: "Cargas semejantes se repelen y opuestas se atraen". Debido a que el protón es -- más pesado que el electrón, es lógico suponer que es el elec-- trón el que se mueve recorriendo así la distancia que los separa.

De esta manera cuando los electrones se mueven, el resultado es la electricidad dinámica. La palabra dinámica indica - que existe movimiento.

Para producir el movimiento de un electrón es necesario - tener un campo cargado negativamente que lo repela, un campo - cargado positivamente que lo atraiga, ó como sucede normalmente con los circuitos eléctricos una carga positiva y otra negativa entre las cuales se mueve el electrón.

Otro de los términos que está íntimamente ligado con los-circuitos eléctricos es la corriente, de la cual se puede de-- cir que es un movimiento progresivo de electrones libres a lo-largo de un alambre ú otro conductor.

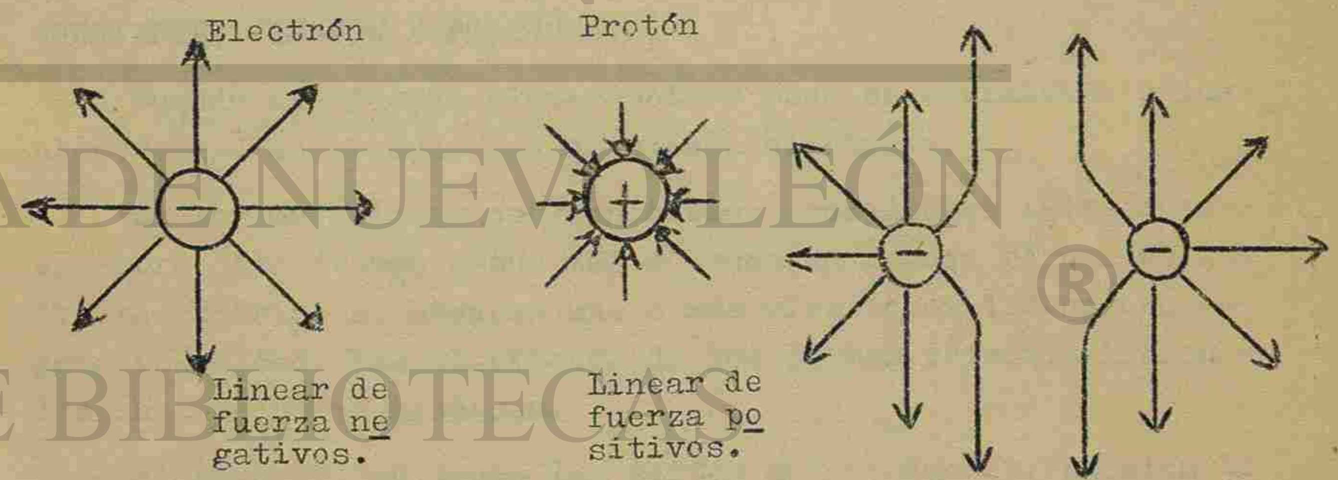


FIG. -1

Existe además el término llamado fuerza electromotriz: -- "fuerza que mueve a los electrones de un circuito atrayéndolos y repeliéndolos, produciendo corrientes a través del mismo".

Otro de los términos que explicaremos más ampliamente en- este capítulo es el de resistencia. Este término, en los cir-- cuitos eléctricos, lo utilizaremos para representar cualquier- efecto de oposición que dificulte el movimiento de los electrones libres disipando energía, a través de los alambres, cuando una fuerza electromotriz trata de producir corriente en un circuito.

Como se sabe los ingenieros no pueden comunicarse entre - sí, en forma eficaz, a menos que empleen términos claros, precisos y concretos, de ahí la necesidad de utilizar un sistema- de unidades adecuado. Debemos llegar a un acuerdo en cada unidad normal y asegurarnos de su permanencia y de su general --- aceptabilidad. Por ejemplo; la unidad normal de la longitud no debe definirse como una distancia entre dos marcas hechas en - una barra de goma, ésto no es permanente, por lo que cada uno- emplearía una norma distinta.

Necesitamos definir también cada término técnico a medida que se presenta, estableciendo la definición en función de unidades y magnitudes previamente definidas.

CORRIENTE, TENSION Y POTENCIA.

Cuando una fuerza electromotriz pone en movimiento a los- electrones, se produce una corriente eléctrica.

En los materiales que son buenos conductores tales como - el cobre, los átomos están más ó menos en reposo porque de la- órbita exterior se escapan uno o más electrones libres con --- gran velocidad. Los electrones de los átomos próximos llenan - los huecos que se producen.

Al parecer, en todas las partes del conductor, existen billones de electrones que se mueven constante y erráticamente.

Cuando a este conductor se le aplica una fuerza eléctrica por medio de una batería, algunos de los electrones que se mueven erráticamente son impulsados por la fuerza negativa hacia-la positiva.

Es improbable que un electrón se mueve en un segundo más de una fracción de centímetro. Sin embargo a través del conductor fluye energía con una velocidad bastante grande. Esto se puede explicar mediante una sencilla analogía con un grupo de automóviles estacionados formando una circunferencia, como se muestra en la figura -2.

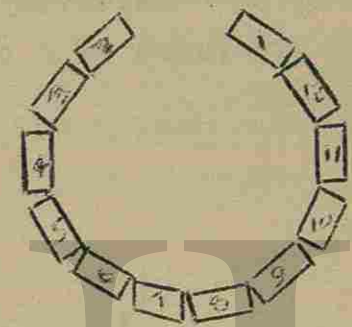


FIGURA -2

Las defensas de todos los automóviles se tocan exceptuando las de los coches uno y dos separados entre sí una corta distancia.

Así como se encuentra el circuito no sucede nada. Luego el conductor del coche uno pone en marcha el motor, por lo cual se produce la energía mecánica, y su coche es impulsado hacia adelante golpeando al coche dos. La fuerza del impacto transmite energía al coche dos, el cual la transmite a su vez al coche tres y así sucesivamente. Un instante después, la energía se transmite a la defensa trasera del coche doce por lo cual es lanzado hacia adelante golpeando la parte posterior del coche uno, de esta manera la energía ha dado una vuelta completa alrededor del circuito en un tiempo mínimo y sin embargo ninguno de los coches, con excepción del uno y el doce puede haberse movido más de una fracción de centímetro. Este ejemplo es muy análogo a lo que sucede en un circuito eléctrico, en el cual los electrones son algo parecidos a los coches.

Al moverse repentinamente en una dirección, los electrones pueden rechazar a otros electrones, estos repelen a su vez a ---- otros y así sucesivamente. La transferencia de energía, (corriente) de un solo impulso es muy rápida, pero el desplazamiento de electrones es relativamente lento.

Una fuerza de energía eléctrica no hace que aumente el número de electrones libres de un circuito, únicamente produce - sobre los electrones, una presión dirigida.

Teniendo en cuenta que los electrones son cargas negativas, la dirección de su movimiento es la opuesta a la que se - asigna convencionalmente a la corriente eléctrica, como se --- muestra en la figura -3.

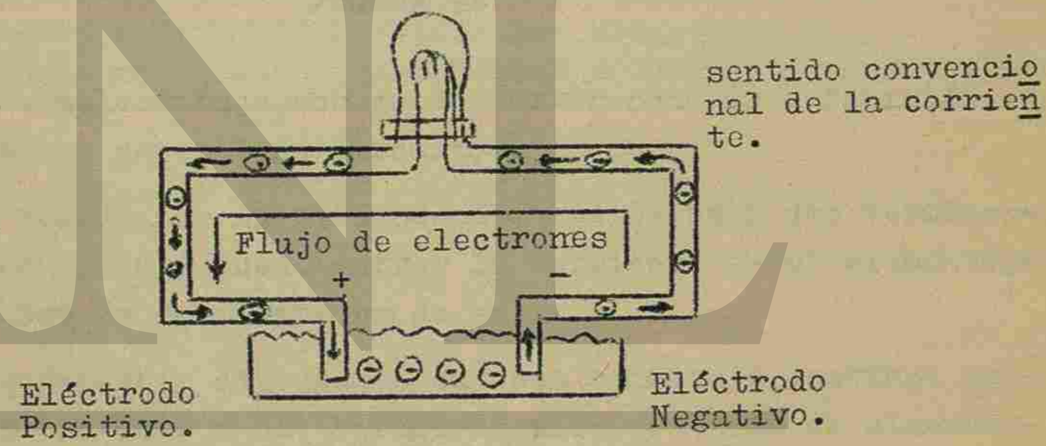


FIG. -3

En un circuito la cantidad de corriente se mide en amperios (A). Un amperio es un cierto número de electrones que pasa por un punto de un circuito eléctrico en un segundo. En --- otras palabras un amperio es un culombio por segundo, un culombio son 6.24×10^{18} electrones. La corriente se representa -- simbólicamente por (l) ó (i). En suma.

$i = \frac{dQ}{dt}$ donde i es igual a corriente en amperios,

Q = carga en culombios y t = tiempo en segundos.

TENSION.

Para una mayor comprensión de éste término es necesario - definir los elementos de los circuitos eléctricos; empezaremos mostrando la circuito como un elemento que no tiene forma, teniendo dos terminales en las cuales pueden hacerse las conecciones con otros elementos, esta se muestra en la fig. -4.

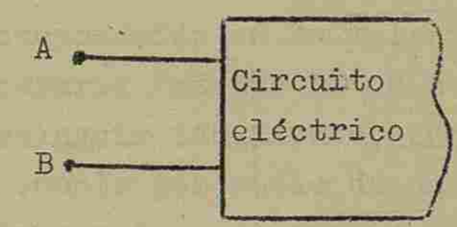


FIGURA -4

Este simple dibujo nos puede servir como la definición -- de un elemento general de circuitos.

Este dibujo nos muestra además, que existen dos terminales una por la cual puede entrar la corriente en el elemento,- y por la otra la corriente puede salir.

Sabiendo esto, supongamos que una corriente contínua entra por la terminal A de la figura, pasa por todo el elemento- y sale por la terminal B. Supongamos también que el paso de esta carga a través del elemento requiere un consumo de energía. Entonces decimos que entre las dos terminales del elemento existe una tensión eléctrica o diferencia de potencial. De esta manera la tensión a través de un par de terminales es una medida del trabajo requerido para mover una carga a través del elemento.

Entonces definiremos de una manera específica la tensión- a través de un elemento, como el trabajo requerido para mover- una carga de un culombio desde una terminal a la otra a través del dispositivo.

La representación simbólica de la tensión es E ó e, ----- V ó v. La unidad de la tensión es el Voltio (V) un Voltio es = a un Julio/Culombio.

En general,

$$v = \frac{dW}{dQ}$$

donde v = tensión en voltios, W = energía en Julios, Q = a carga de culombios.

Para una mayor comprensión en la relación existente entre estos términos es necesario establecer un convenio por medio - del cual se pueda distinguir fácilmente, entre la energía que-es suministrada al elemento por medio de un dispositivo externo y la energía que proporciona el propio elemento a un dispositivo exterior.

Esto lo podremos lograr por medio de la selección de un - signo para la tensión de la terminal A con respecto a la terminal B.

Si por ejemplo, por la terminal A del elemento, está en-- trando una corriente positiva, y si una fuente exterior debe - gastar energía para establecer esta corriente se tiene que la- terminal A es positiva con respecto al B ó también podremos decir que la terminal B es negativa con respecto a la terminal - A.

El sentido de la tensión se indica gráficamente por una - flecha. En la figura -5.

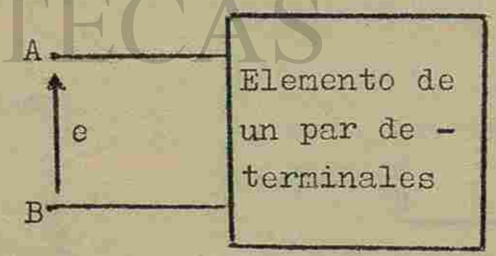


FIGURA -5

La punta de la flecha de tensión se coloca en la terminal A, esto significa que la terminal A es (e) voltios positivos - con respecto al terminal B. Si por algún motivo encontramos -- que e vale (-5 voltios) entonces se puede decir que A es menos 5 voltios positivo con respecto a B ó, lo que es lo mismo, que- B es positivo cinco voltios con respecto de A.

Analizando los casos de la Figura -6, vemos que no es posible saber lo concerniente con respecto a la transferencia de energía en tanto no se especifique la dirección en la que circula la corriente.

Supongamos que en cada conductor superior se coloca una - flecha dirigida hacia la derecha y marcada con +2A, puesto que en los casos c y d' por el terminal A esta pasando una corriente positiva, entonces se dice que se le está suministrando -- energía al elemento.

En los otros dos casos el elemento está entregando energía a algún dispositivo externo.

Con esto queda definido también el término de potencia. - El producto de la corriente y el voltaje es la potencia asociada a un circuito eléctrico. La potencia se mide en Julios/seg. o vatios y tiene como representación simbólica (P) o p.

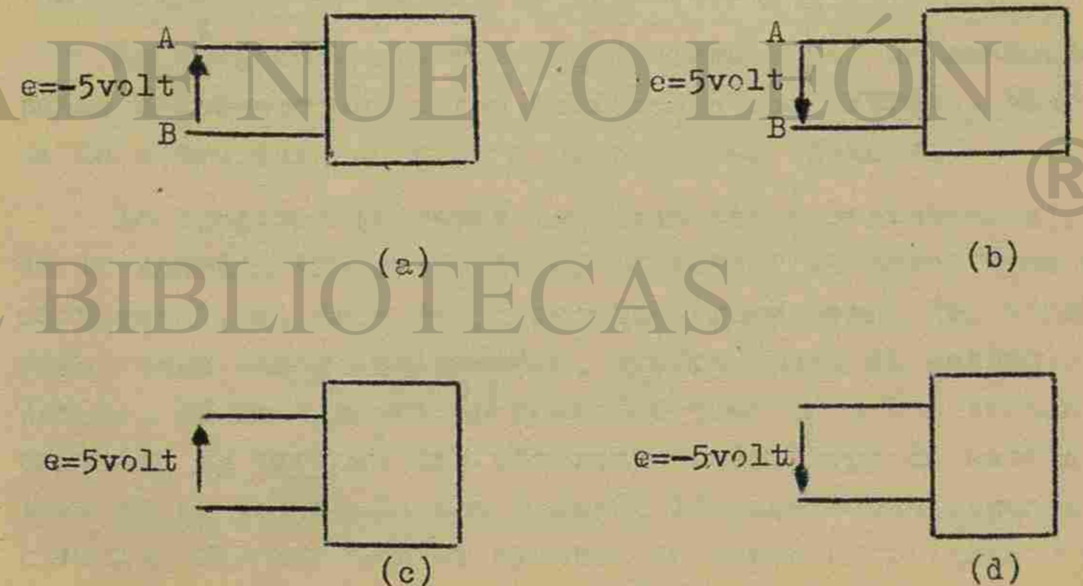


FIGURA -6

En general P = ei; donde P = potencia en voltios e = tensión en voltios, e = a corriente en amperios.

Ahora ya conocidos los conceptos de corriente y tensión - es posible definir los elementos de circuitos de forma más precisa.

Primero, los tres elementos básicos de un circuito eléc-- trico lineal son:

Resistencia, Inductancia, Capacitor.

RESISTENCIA.

Se conoce que ciertos metales como la plata y el cobre, - tienen muchos electrones libres que se mueven al azar con velocidades altas a través de los espacios entre los átomos del material, también sabemos que existen otros metales como el ní-- quel y el hierro que tienen menos electrones libres en movi--- miento. En otros materiales tales como el vidrio, porcelana, - etc., no existe prácticamente ningún movimiento de electrones- libres, si nosotros aplicásemos una fem a un pedazo de alambre de cobre, los electrones libres se moverán a lo largo del alambre, por lo tanto, se producirá una corriente eléctrica.

Si se aplicase la misma fem a través de un alambre de hierro del mismo tamaño solamente circulará una sexta parte de la corriente, que circulaba en el alambre de cobre. De aquí que - un alambre de cobre de ciertas dimensiones tenga menos resis-- tencia que uno de hierro de las mismas dimensiones.

La corriente eléctrica que circula por un conductor no depende solamente de la fem aplicada a sus extremos sino también de la estructura química y propiedades físicas.

La longitud (a mayor longitud mayor resistencia), el área de la sección transversal del conductor (a mayor área menor resistencia), el área de la sección transversal del conductor (a mayor área menor resistencia, excepto para el carbón). Por e-- jemplo, si un alambre de cobre se conecta a las terminales de- una pila se produce una corriente a lo largo de este conduc--- tor. Si se intercala una pequeña lámpara incandescente en el - circuito formado por el alambre de cobre el filamento de la --

lámpara se calentará y llegará a encenderse, al mismo tiempo - la corriente en el circuito disminuirá su intensidad. En este- caso el calor se manifestará especialmente en los puntos en -- que está intercalado el elemento que es menos conductor.

Esta propiedad del circuito eléctrico que tiende a oponerse a la corriente y que al mismo tiempo es causa de la trans-- formación de la energía eléctrica en calor, recibe el nombre - de resistencia.

La resistencia tiene como unidad el ohmio (Ω) que se le - define como la resistencia que permite el paso de una corrien- te de un amperio, cuando se le aplica una diferencia de poten- cial de un voltio entre las terminales de dicha resistencia.

Para el elemento de resistencia ideal,

$$e = Ri$$

donde e = tensión que cruza el elemento en voltio, i = corrien te a través del elemento en amperios, y R = resistencia en --- ohmios.

1).- Constitución de la Resistencia.

Los materiales tales como la plata alemana y el nicromo,- son aleaciones de dos o más metales y se utilizan para constru ir resistencias.

Si sobre un núcleo tubular de cerámica se enrolla un alam bre de dichos materiales, se obtiene uan resistencia de alam-- bre como la que muestra la figura - 7a. La figura -7d muestra- como se representa una resistencia en un circuito eléctrico. - El símbolo utilizado para un tipo de resistencia variable lla mado reóstato se muestra en la figura -7c. El símbolo para un- potenciómetro, que es un reóstato que tiene conexiones con am- bos extremos de la resistencia más otra conexión en un contac- to deslizante, se muestra en la figura -7d.

2).- Código de colores para resistencias.

En muchos casos, las resistencias no llevan impreso su -- valor. En cambio, están pintadas de colores con arreglo a un - código el cual se muestra en la tabla -1.

TABLA -1

Negro	0
Café	1
Rojo	2
Naranja	3
Amarillo	4
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Gris	8
Blanco	9

Para leer el valor de una resistencia según el código de-colores de las tres franjas, empiécese por la franja más próxima al extremo de la resistencia. La primera franja es la pri--mer cifra. La segunda es la segunda cifra. La tercera es el número de ceros que siguen a la segunda cifra. La figura -8 muestra como puede describirse el valor de una resistencia escrito según el código de colores de las tres franjas.

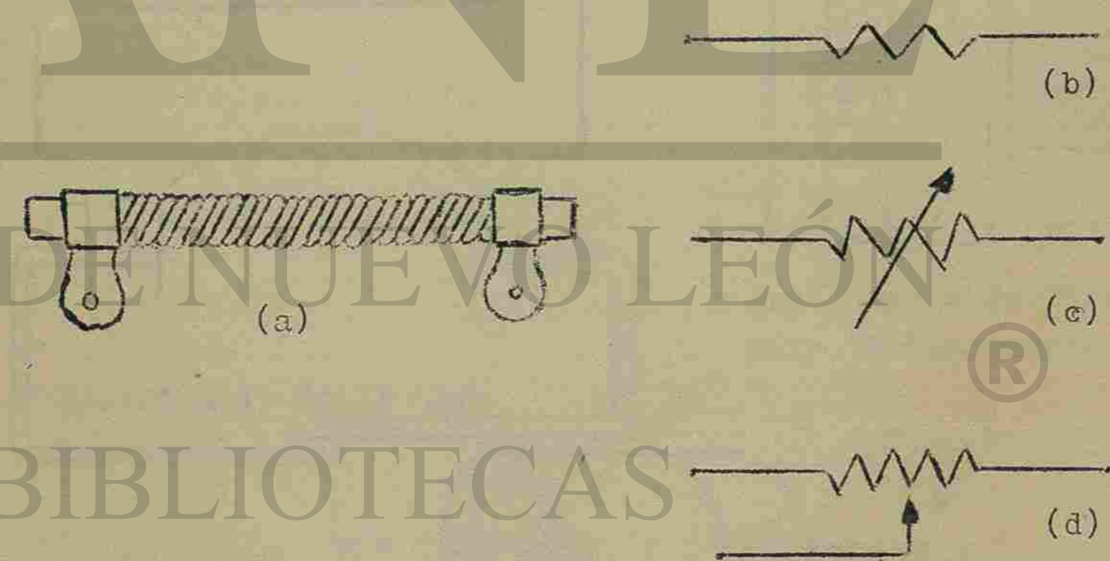
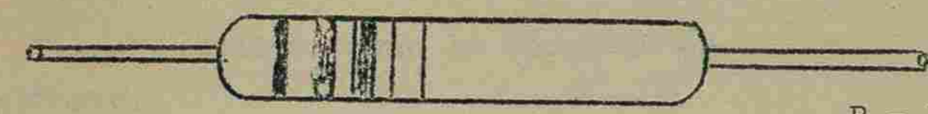


FIGURA -7

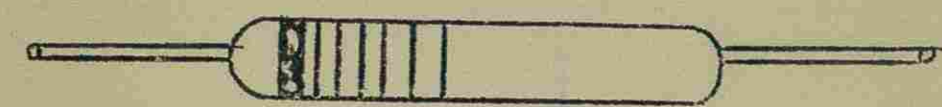
Si en la resistencia no hay más franjas significa que el-valor de la resistencia con arreglo al código de colores es co rrecto con una tolerancia del 20%.

Si se utiliza una cuarta franja, la tolerancia es del 10% si es de plata y del 5% si es de oro.



R = 100

café negro café plata $\pm$ 10%
1 0 0

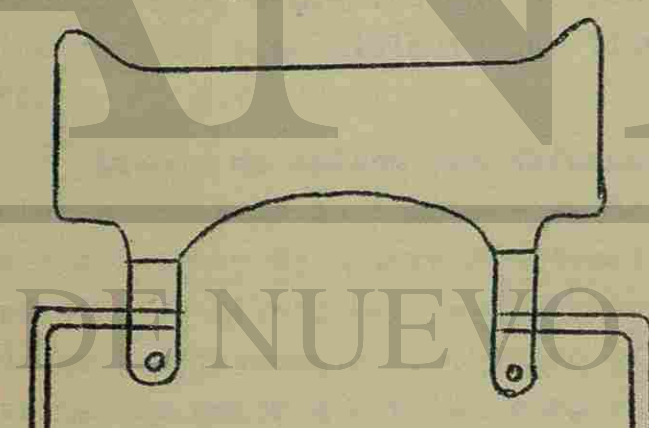


R = 270,000

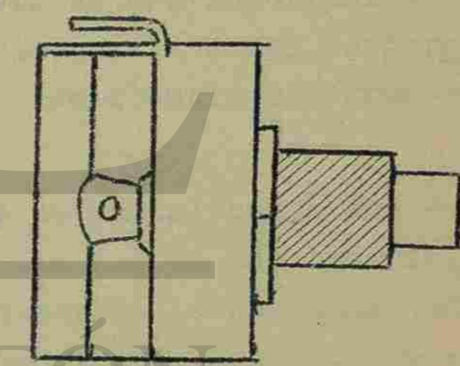
rojo violeta amarillo plata $\pm$ 10%
2 2 (0)

RESISTENCIAS DE CARBON

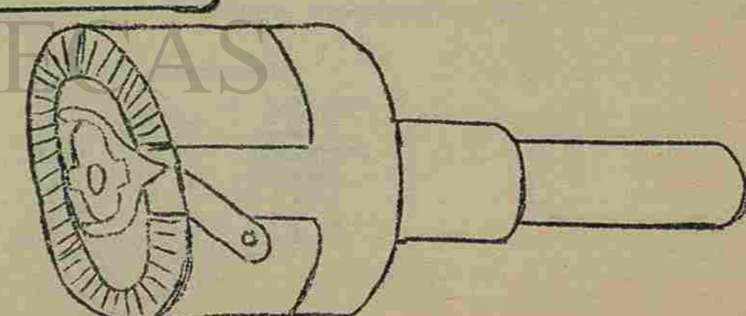
Aspecto físico de las resistencias:



Resistencia de Alambre



Resistencia de Carbón tipo "Potenciometro"



Reostato de Alambre

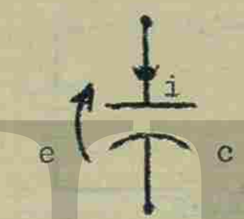
C A P A C I T A N C I A

Uno de los elementos simples de circuitos eléctricos cuya relación tensión-corriente depende de una tensión o de una corriente variable es el condensador, el cual hace necesario el estudio de la capacidad o capacitancia.

El condensador tiene la facultad de retener una carga de electrones.

La propiedad mediante la cual un condensador puede servir como recipiente para almacenar cargas eléctricas cuando se aplica una tensión se denomina capacidad.

La figura siguiente muestra el símbolo del condensador.



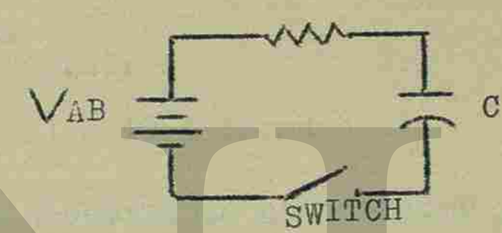
Físicamente, un condensador consiste en dos superficies conductoras, sobre las que se puede almacenar la carga, separadas por una capa aislante que tiene una resistencia muy grande.

Cuando se aplica una diferencia de potencial entre las placas A y B de la figura - 9, tal como la fem de una batería, una corriente de naturaleza transitoria empieza a circular. La pérdida de electrones que experimenta la placa A hace que se carge positivamente, ya que en dicha placa el número de electrones es menor que el de cargas positivas. El exceso de electrones que adquiere la placa B hace que se adquiera una carga negativa igual en magnitud a la carga positiva de la placa A.

FIGURA -9

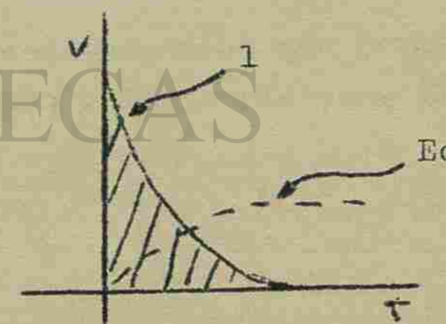
Una diferencia de potencial queda establecida entre placas --- cuando esta tensión sea igual a la fem de la batería y la co-- rriente se hace cero. Al transcurrir el tiempo, la diferencia- de potencial entre las placas disminuye a cero, usualmente con mucha lentitud, dado que el material que sirve de soporte a -- las placas no es un aislante perfecto y los electrones exceden tes de B pasan a la placa A desapareciendo la tensión AB.

En un circuito RC en el momento de cerrar el switch no ex iste en el condensador fem de oposición y la amplitud de la co rriente viene determinada unicamente por la resistencia del -- circuito.



CIRCUITO RC
FIGURA -10

La fem de oposición o voltaje en placas crece conforme au menta el tiempo y la corriente del circuito disminuye continua mente cuando la fem de oposición es igual a la de fem de la -- fuente y dejará pasar corriente por el circuito, la tensión a- través del condensador alcanza un valor máximo igual a la ten- sión de la fuente como muestra las curvas Ec e I del gráfico.



La relación entre la corriente y la variación de la tensión a través del condensador, es lineal y la constante de --- proporcionalidad es evidentemente la capacidad C, como $i = C\frac{de}{dt}$ las dimensiones de la capacidad son amperios-seg. por voltio, o columbios, por voltio, esto define al faradio como la - unidad de capacidad, teniendo el faradio (F) derivaciones, F,- PF, etc..

Es clara que un faradio es una unidad extremadamente grande para fines prácticos. Usualmente el microfaradio, abreviado (μf) e igual a millonésima de un faradio o el micro-microfaradio, abreviado ($\mu\mu$f) (también llamado el picofaradio), son unidades usadas para especificar la capacitancia.

1 f = 10^{-6} faradios

1 f (1 pf) = 10^{-12} faradios.

El tiempo que necesita un condensador para alcanzar una - determinada carga, es proporcional a la capacidad y a la resistencia del circuito. La constante de tiempo de un circuito RC.

T = RC

T = seg

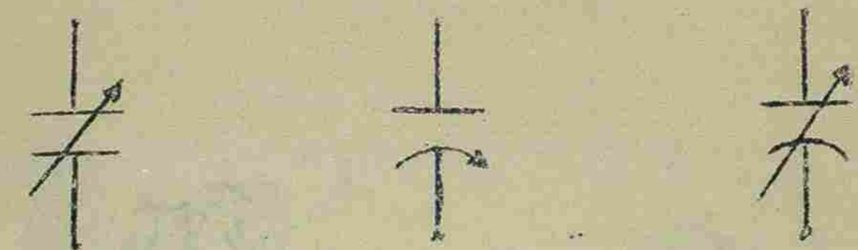
R = (ohmios)

C = faradios

Este tiempo es el que se necesita para alcanzar el 63% -- del valor de la tensión de la fuente, si no hay resistencia en el circuito el tiempo necesario es cero, y el condensador se - carga o se descarga instantáneamente.

CONDENSADORES VARIABLES.

Hay dos tipos de condensadores que permiten que varíe su capacidad, los ajustables y los variables. fig. sig.



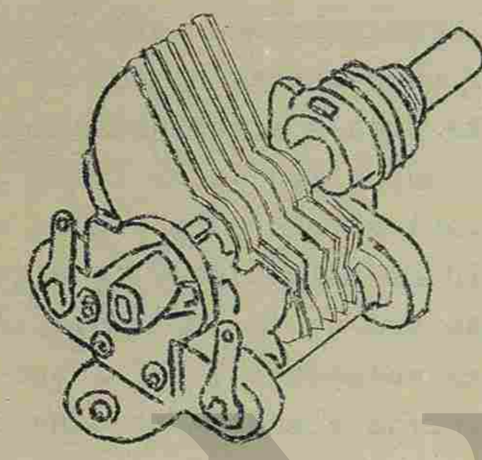
ANTIGUO MODERNO ACTUAL

SIMBOLOS PARA REPRESENTAR CONDENSADORES VARIABLES.

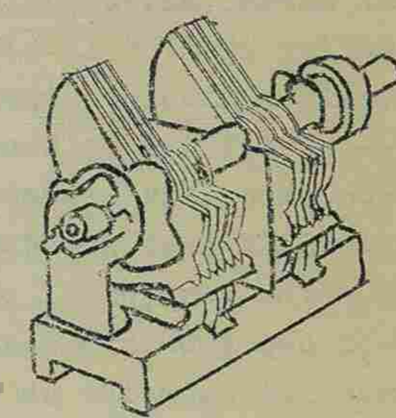
Los condensadores ajustables se construyen generalmente con dos o más placas planas separadas por hojas de mica. Las placas planas están dispuestas de tal modo que permanecen normalmente algo separadas. Dichas placas pueden acercarse apretando un tornillo con lo que se aumenta la capacidad. Los condensadores ajustables son, a veces, denominados "podders" o "trimmers". Los condensadores variables tienen un <u>estator</u> o conjunto de placas fijas, y un <u>rotor</u> o conjunto de placas giratorias. Si se gira el eje, las placas del rotor se mezclan con las del estator (sin tocarse entre ellas) con lo cual varía el área de las placas que se enfrentan y en consecuencia la capacidad del condensador. Generalmente el dieléctrico de estos condensadores es el aire, aunque existen algunos condensadores variables especiales con dieléctrico de vacío que se emplean en transmisores de radio.

Los valores de capacidad de los tipos de condensadores descritos anteriormente, varían usualmente de unos picofaradios hasta 1,000 o más picofaradios.

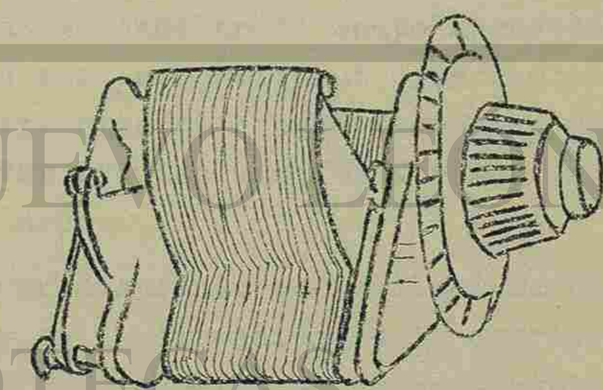
FORMA FISICA DE CONDENSADORES VARIABLES



CONDENSADOR VARIABLE DEL TIPO ENANO



CONDENSADOR VARIABLE DE ESTATOR DIVIDIDO O MULTIPLE



CONDENSADOR VARIABLE CON AJUSTE DE NONIO

INDUCTANCIA.

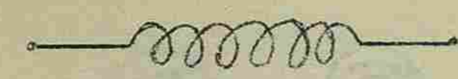
Una vez que se han definido los términos básicos referentes a resistencias, pasamos a enumerar los términos básicos referentes a inductancias. En primer lugar la definición de inductancia será: "La propiedad de oponerse a cualquier cambio de corriente que pase por la bobina". Físicamente una bobina consiste en un enrollamiento de cables conductores que al pasar por ellos una corriente, crean líneas de fuerza, estas líneas de fuerza producen un efecto contrario al voltaje aplicado denominándosele a este efecto fuerza contra electromotriz, en general un circuito que es inductivo pone de manifiesto esta propiedad o sea la fuerza contra electromotriz, como por ejemplo al separar las cuchillas del switch que está alimentando al circuito, si se les separa demasiado lento crea entre las cuchillas y contactos un fuerte chispazo o arco y que dependiendo del voltaje aplicado, puede ser de tal magnitud que puede dañar el material de que están constituídas las cuchillas y contactos, o bien dañar a otros elementos que se encuentran cerca de estos conmutadores o interruptores.

La duración del arco o chispazo está determinado por la energía almacenada en el campo magnético, esta energía se disipa como ya se dijo en forma de calor.

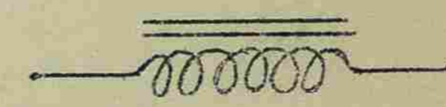
Ahora bien, en un circuito de baja corriente y alambres cortos, la energía almacenada en el campo magnético no es grande y la chispa puede ser insignificante, en cambio en líneas largas y grandes corrientes el efecto producido puede ser espectacular y presentar grandes manifestaciones ya sea de chispazo o una forma de arco.

De lo anterior se desprende que cualquiera que sea el cambio en la amplitud y en la dirección de la corriente que pasa por un conductor, la fem inducida se opone siempre a ese cambio. Cuando existe corriente continua en el circuito la bobina no presenta oposición debido a que no hay cambio de corriente, sin embargo, si ésta corriente contínua la disminuímos entonces la bobina se opone a que baje, y si la aumentamos, la bobina se opone a que suba, en corriente alterna la variación de corriente es contínua por lo que la bobina se está oponiendo -contínuamente a estas variaciones.

De lo anteriormente expresado podemos definir también la inductancia de la siguiente forma: "como la propiedad que tiene un circuito de almacenar energía en forma de un campo electromagnético". Así como la unidad de resistencia es el Ω, las unidades de inductancia son los henrios y su representación -- simbólica es L.



Bobina con núcleo de aire



Bobina con núcleo de hierro

El henrio lo podemos definir como la cantidad de inductancia necesaria en un circuito para que un cambio medio de co--rriente de un amperio por segundo, produzca una fuerza contra-electromotriz media de un voltio.

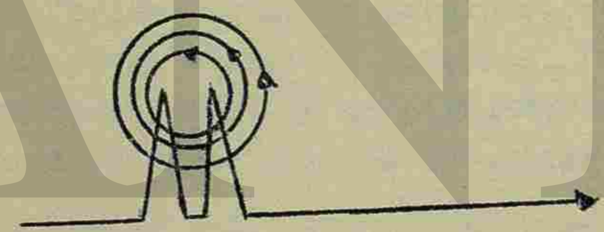
Como ya se dijo un trozo de alambre tiene la facultad de producir una fuerza contra electromotriz por lo que tiene cierta inductancia. Si la longitud de alambre es corta, eléctricamente tiene un bajo valor de inductancia. En la práctica lo -- podemos observar en los circuitos de radio en que el valor de la inductancia viene expresada en Milihenrios o MicroHenrios, ya que en un circuito de radio, una inductancia con un valor - de 2H es relativamente alto por lo cual se expresa en las unidades antes dichas.

Ahora bien, para que la inductancia de un alambre llegue a ser de 2H deberá de tener una longitud de muchos miles de metros lo cual en un circuito no es práctico pues es mejor enrollar o devanar un centenar de metros de alambre sobre núcleo - de hierro o de otro material de permeabilidad alta para que la inductancia del circuito pueda tomar un valor de varios hen---

rios; aún sin núcleo de hierro, una cierta longitud de alambre tendrá una inductancia mucho mayor si se devana o enrolla en forma de bobina. Por ejemplo, si a un alambre se le forman dos lazos separados cierta distancia para que sus campos magnéticos no tengan ningún efecto y después se unen esos lazos uno junto al otro el valor del campo magnético se incrementará al doble, por lo que se dice que la inductancia de una bobina varía con el cuadrado del No. de vueltas, esquemáticamente quedaría representado de la siguiente manera:

Corriente

Según el efecto del campo magnético en los lazos del cable o alambre, se puede ver que el campo magnético se incrementó al doble, en el segundo caso.



Corriente

En la práctica, el valor del campo magnético que produce la bobina al pasarle una corriente queda determinada por la formula:

$$E_N = \frac{L\,l^2}{2}$$

donde la energía está en JULIOS, la L es la inductancia en Henrios, e l la corriente en Amperios.

En los circuitos de radio se utilizan bobinas con núcleo de aire que tienen unos cilindros de conglomerado de hierro que pueden entrar o salir a través del núcleo, esto es con el fin de variar el valor de la inductancia.

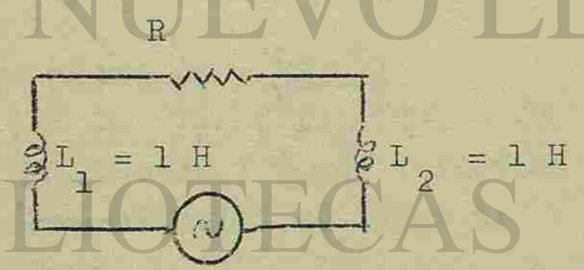
Otras de la bobinas que se utilizan normalmente son los - toroides, estos son núcleos de conglomerado a base de hierro - en polvo, que tienen de anillo, sobre el cual se devanan unas- o varias capas, este tipo de bobina tiene la ventaja de que el valor de su inductancia puede ser grande además de que las líneas de fuerza que produce el campo van en el núcleo y no fuera de él, si se colocan 2 toroides muy cercanos unos del otro- no se produce ningún efecto porque como ya se dijo sus líneas- de carga van por el núcleo.

Como ya se sabe, la bobina se opone al cambio en la co--- rriente, haciendo que esta a su vez sea más suave en las co--- rrientes de tipo variable o pulsatorio, a este tipo de bobina- se le llama comunmente bobina de choque ya que su función es-- triba en rechazar las variaciones, de la amplitud, en circui-- tos de radio se emplean las de núcleo de aire, pero en circuitos de frecuencias más bajas éstos tienen que tener una inductancia mucho mayor.

Las bobinas, como las resistencias, pueden ser conectadas tanto en serie como en paralelo, dependiendo de la forma en -- que se desee operar el circuito. Para encontrar el valor de la inductancia total en un circuito cuando existen varias induc-- tancias en serie pero no acopladas se suman directamente.

$L \text{ tot. serie} = L_1 + L_2 + L_3 \text{ --- } L_n$

esta L total puede ser, por ejemplo, la que se pide en ésta -- ilustración:

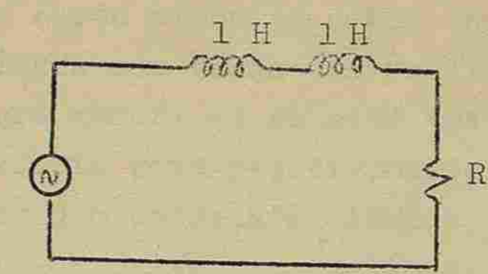


$L\,T = 1\,H + 1\,H$

$L\,T = 2\,H$

como las dos inductancias están separadas, sus líneas de fuerza no se entrelazan siendo el valor de la inductancia total -- 2 H directamente.

Si las 2 inductancias se conectan en serie pero están muy próximas entonces sus líneas de fuerza se entrelazan afectando por lo tanto el valor de la inductancia total:



$$L\ Tot = L_1 + L_2 + 2\ M$$

$$L\ Tot = 1+1+2\ (1) = 4\ H$$

donde M es el valor de la inductancia mutua en henrios. La inductancia mutua es un efecto que depende del sentido como están enrrollados los alambres de la bobina, si están enrrollados en el mismo sentido, la f.e.m. que produce cada una de ellas se suma aumentando así el efecto que producen en comparación cuando están separadas una de la otra.

Ahora bien si se colocan una junto a la otra en serie, pero el sentido de sus devanados no va en fase, entonces se resta el efecto que produce dando una inductancia total menor. En el ejemplo anterior, se supuso que el sentido de sus devanados es el mismo o sea que están en fase.

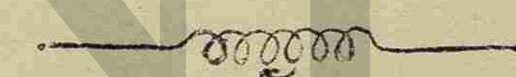
También se ha visto que en los circuitos de radio y electrónica existen conexiones de bobinas que están en paralelo, entonces para encontrar el valor total de la inductancia en el circuito cuando tiene 2 bobinas en paralelo se procede así:

$$L\ T \text{ en paralelo} = \frac{L_1\ L_2}{L_1 + L_2}$$

en cambio si existen 3 o más inductancias en paralelo el valor de la inductancia total es igual a:

$$L \text{ total paralelo} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots \frac{1}{L_n}} = \text{Henrios}$$

Hay ocaciones en que se tiene que reducir la inductancia de una bobina, existen varios métodos para realizar ésto, además de los indicados con anterioridad, uno de estos consiste en efectuar un corto circuito sobre una vuelta o más de la bobina, así se logra que tenga una vuelta menos, por lo tanto su inductancia será menor; si se está trabajando con corriente contínua, el efecto será relativamente bajo, en cambio si se está trabajando con corriente alterna, el efecto será mayor, ya que al corto-circuitar la vuelta se induce una fuerza contra electromotriz que va en sentido contrario a la que pasa por el resto de la bobina, esto hace que se produzca una reacción que cancela parcialmente el campo de la bobina, entonces el valor de la inductancia de la bobina se reduce mucho más que si se le hubiese suprimido simplemente una vuelta. Otros de los métodos para reducir el valor de la inductancia sería el de estirarla para que tenga mayor longitud y utilizar un núcleo menos permeable.



Esquema que muestra como se cortó circuita una de las vueltas.

FUENTES DE VOLTAJE Y CORRIENTE.

Además de los elementos pasivos del circuito eléctrico, los que almacenan y disipan ENERGIA, se va a definir el MODELO DE FUENTES IDEALES que son elementos que suministran energía al circuito. Las fuentes ideales se pueden clasificar en dos categorías, Fuentes de Voltaje y Fuentes de Corriente.

FUENTES DE VOLTAJE.

Este elemento se caracteriza por tener una tensión en terminales que es completamente independiente de la corriente que pasa por él. Si tenemos una fuente ideal y si tiene una tensión entre terminales de 10^{-12}, se está seguro de que en un segundo la tensión será 10 voltios, independientemente de la corriente. Una fuente de voltaje representa como se muestra en la Fig. -11

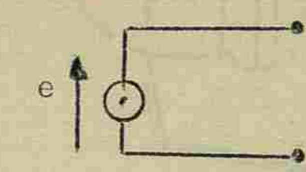
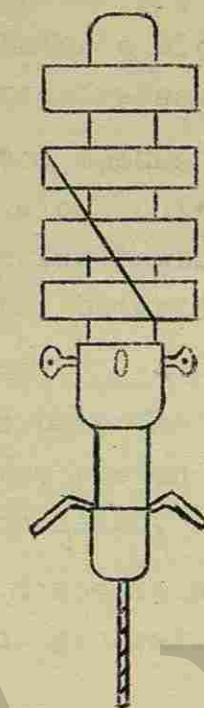


FIGURA -11

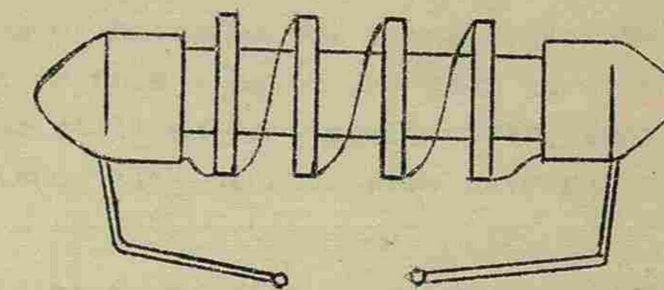
Por lo general una fuente de voltaje suministra potencia a una red, esto no quiere decir que no pueda absorber potencia Si por ejemplo: por la terminal superior de la fig. -11 ponemos una flecha hacia la izquierda entonces la (i) está entrando por la terminal en la que está la punta de la flecha, por lo tanto, esta fuente absorbe una potencia = ei. Si se escoge que la flecha en la misma fig. -11, sea dirigida hacia la derecha, en el mismo terminal superior, entonces la fuente va a suministrar una potencia = ei.

Un ejemplo claro, para ver ésto, es el de la batería de un automóvil. Esta tiene una tensión de, digamos 12 voltios, que permanece prácticamente constante, en tanto que la corriente no exceda de unos pocos amperios. Esta corriente puede circular en ámbas direcciones, por lo cual la batería puede suministrar potencia (por ejemplo a los faros) y además puede absorber potencia por medio del generador o del cargador de baterías.

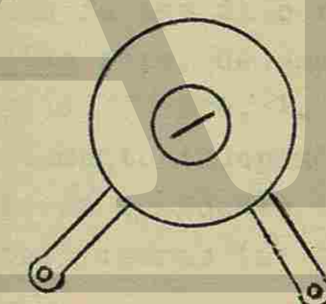
Una fuente ideal de tensión puede, en teoría, suministrar por sus terminales una cantidad infinita de energía.



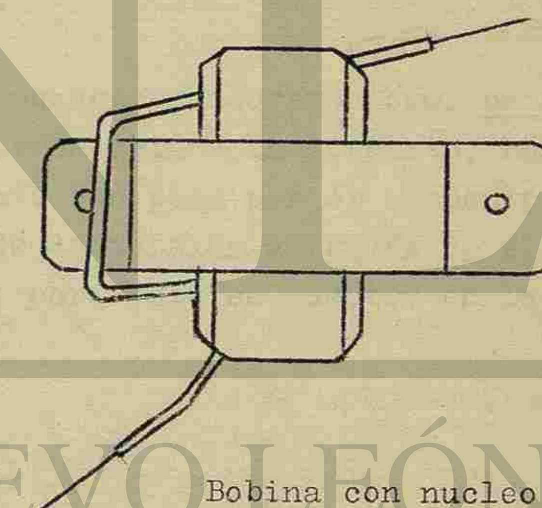
Bobina con nucleo de hierro (variable)



Bobina con nucleo de aire



Toroide



Bobina con nucleo de hierro

TIPOS DE FUENTES DE VOLTAJE.

Una batería es una fuente de voltaje.

Una batería eléctrica es una combinación de dos o más celdas electroquímicas.

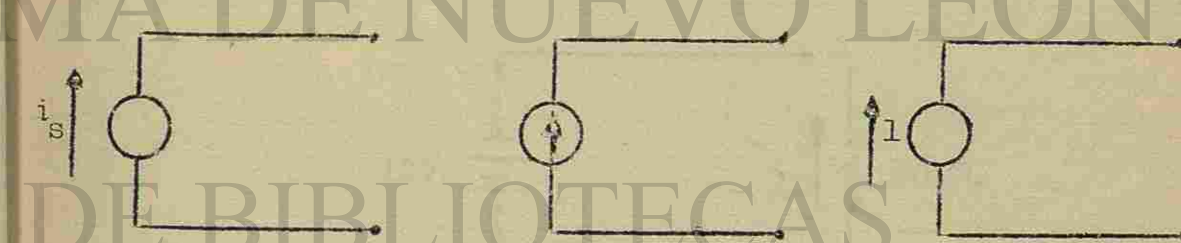
Existen muchos tipos de baterías por ejemplo, las baterías para radios, entregan en poca tensión una gran corriente. - Otras baterías también se utilizan para suministrar tensión de placa; estas baterías tienen alta tensión pero entregan poca - corriente.

Otras baterías suministran tensión de polarización de rejilla, estas pueden proporcionar baja tensión con muy poca ó - ninguna corriente.

Otro dispositivo que puede proporcionar tensión en terminales es un generador movido por un motor.

LA FUENTE IDEAL DE CORRIENTE.

Una fuente de corriente puede considerarse como <u>un elemento activo</u> capaz de suministrar energía a un circuito, Para este tipo de fuente, la corriente que pasa por el elemento es -- completamente independiente de la tensión a través de él. El - símbolo de la fuente ideal de corriente se muestra en las si-- guientes figuras (a, b, c).



a).- Fuente ideal. b) c)

FIGURA - 12

Refiriéndonos a la figura -12 (a); si i_s es constante, diremos que se trata de una fuente ideal de c-c. Esta fuente es- una aproximación razonable de un elemento físico.

LEY DE OHM

Siempre que se utilizan circuitos eléctricos en la cons-- trucción de determinados aparatos, van estrechamente ligados - la tensión, la corriente y la resistencia, ahora bien, dado el gran desarrollo que tienen los circuitos eléctricos, se pone - de manifiesto recordar las leyes por las cuales se rigen éstos circuitos.

Una de las principales leyes por la cual se rigen éstos - circuitos es la ley de ohm, la que fué dada a conocer por el - físico alemán George Simon Ohm, ésta ley estipula lo siguien-- te.

La corriente es directamente proporcional al voltaje e inversamente proporcional a la resistencia. De lo anterior se deduce que en el circuito eléctrico al aumentar el voltaje aumenta la corriente y si luego se aumenta la resistencia entonces- disminuye la corriente.

La ecuación fundamental de la ley de ohm es la siguiente:

$$E = RI$$

De donde E está dada en volts, I en amperes y R en ohms;- de la fórmula anterior se puede despejar la variante descono-- cida si se tiene cualquiera de las otras dos conocidas.

Un ejemplo sencillo de lo anterior sería el siguiente:

Para el circuito de la figura -13 encontrar la corriente I

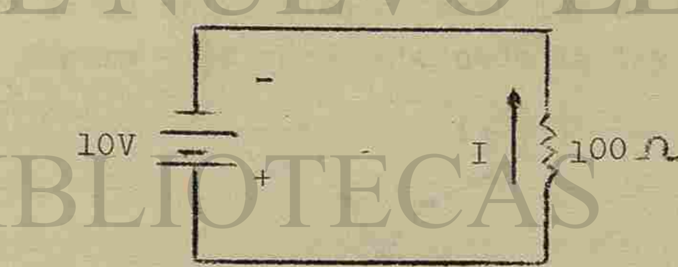


FIGURA - 13

Solución: como la fŕmula de la ley de ohm es: E = RI despejando I tenemos

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10}{100} = 0.1 \text{ Amp.}$$

La relación entre el voltaje y la corriente es la poten-- cia P = VI donde V está dada en volts, I en ampers, Pen Watts- combinando está con la ley de ohm tenemos, a) P = VI, b) V = RI combinando a) y b) tenemos c) $P = RII = RI^2$ despejando de b) I tenemos $I = \frac{V}{R}$ combinando está con a) $P = VI = \frac{VV}{R} = \frac{V^2}{R}$ conclu ción $P = VI$; $P = I^2R$, $P = \frac{V^2}{R}$

LEYES DE KIRCHHOFF

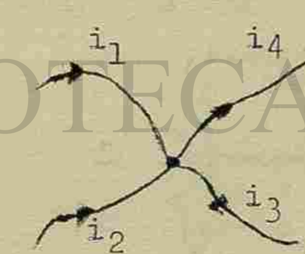
Las leyes básicas que gobiernan la interconexión de ele-- mentos eléctricos son: la primera y la segunda ley de Gustav - Kirchhoff.

Las leyes de Kirchhoff son una consecuencia de la conserva ción de la energía y conservación de la carga. Siendo que la - conservación de la carga es creada y transformada pero nunca - destruida.

Primero Ley: la suma de corrientes en un nodo es igual a- cero ($\sum i = o$). En termino de corriente las corrientes que - entran a un nodo es igual a las corrientes saliendo de un nodo Si las corrientes saliendo de un nodo son tomadas positivas y- las corrientes entrando como negativas, la suma algebroica de- las corrientes en el nodo es igual a cero.

$$\boxed{\sum i = o}$$

La ecoación interior es la ley de las corrientes de Kir-- chhoff. Ejemplo de la aplicación de esta ley es la mostrada en- el nodo de la figura - 14 para este nodo la ley de las corrien tes es:



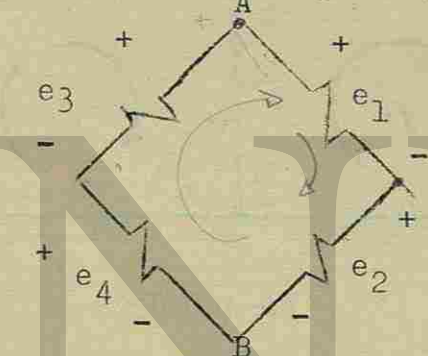
$$i_3 + i_4 - i_1 - i_2 = 0$$

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4$$

La segunda Ley de Kirchhoff se basa en la ley de la conservación de la energía. Esta ley enuncia que la suma de voltajes en un circuito cerrado es igual a cero como un ejemplo de la aplicación de la ley de los voltajes de Kirchhoff consederemos el circuito de la figura -15. Siguiendo una trayectoria al rededor del lazo nosotros obtendremos: $e_1 + e_2 - e_4 - e_3 = 0$

Con un arreglo de la ecuación anterior nosotros nos damos cuenta que la caida de voltaje de A a B puede ser obtenida por cualquiera de las dos partes.

$$e_1 + e_2 = e_3 + e_4$$



$-e_1 - e_2 + e_4 + e_3 = 0$

$-V_1 - V_2 + V_4 + V_3 = 0$

$\boxed{V_1 + V_2 = V_3 + V_4}$

FIGURA - 15

La idea de que una la elebación de voltaje es análogo a una elebación gravitacional sugiere la posibilidad de un punto de referencia es llamado tierra. Con esto nosotros podemos nombrar el voltaje de cualquier punto con respecto al punto de referencia (tierra). Como un ejemplo aplicado este punto de referencia es el mostrado en la figura -16 en esta nosotros observamos que:

$$e_C = e_1, \; e_B = e_1 + e_2, \; e_A = e_1 + e_2 + e_3$$

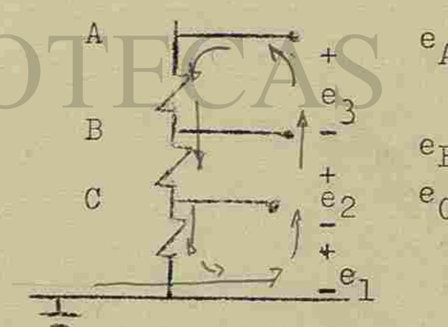


FIGURA 16

Similarmente, nosotros podemos definir corrientes más generales por medio de la ley de las corrientes de Kirchhoff. Un ejemplo particular de este proceso son las corrientes circulantes i_a y i_b en la figura -17. La corriente i_a circula por --- la malla a b e d a , y la corriente i_b circula por la malla b-c f e b.

La ley de las corrientes de Kirchhoff se puede, aplicar - a las corrientes circulantes en términos de las corrientes en-- los elementos, de acuerdo con las siguientes ecuaciones.

$$i_1 = - i_a, \quad i_2 = i_a - i_b, \quad i_3 = i_b$$

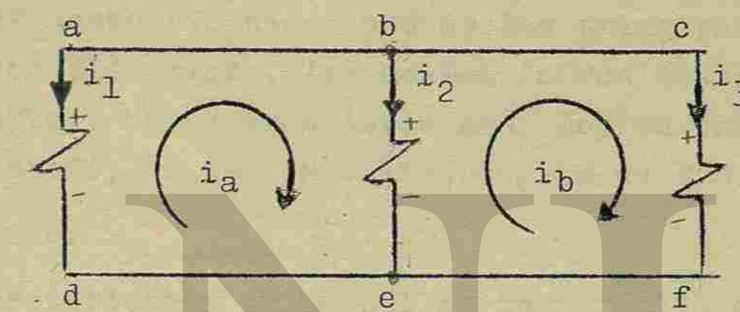


FIGURA -17

$i_1 = -i_a$ $\quad i_2 = i_a - i_b$ $\quad \boxed{i_3 = i_b}$

CAPITULO II

ECUACIONES DE LAS REDES ELECTRICAS

Los circuitos eléctricos están constituídos de la unión de dos o más elementos (Resistencia, Inductancia, Capacitancia). Esta unión dependiendo de la forma en que esten conectados los elementos, hacen que el circuito se comporte de una manera determinada. Las concexiones ó uniones más comunes que existen en la práctica con circuitos eléctricos son: Serie y Paralelo.

Para lograr comprender el comportamiento de estas dos conexiones, es necesario hacer uso de las principales leyes de los circuitos eléctricos, las cuales fueron tratadas en el capítulo anterior. Estas tres leyes son: Ley de Ohm, las dos leyes de Kirchhoff, la de los voltajes y la de las corrientes.

Circuito Serie.

La característica principal de un circuito serie, es que la corriente que fluye a través de todos sus elementos es la misma, como se muestra en la figura 2-1

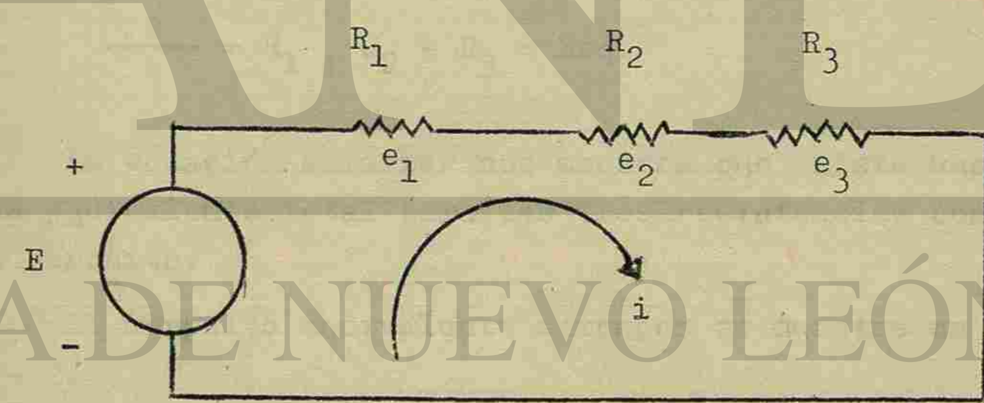


FIGURA 2 - 1

Esta corriente produce una caída de voltaje en cada una de las resistencias, que viene dado según la Ley de Ohm: ----- $e = Ri$, de donde,

$$e_1 = R_1 i \ , \quad e_2 = R_2 i \ , \quad e_3 = R_3 i.$$

Sabiendo esto y tomando en cuenta la ley de Kirchhoff de-los voltajes tenemos que: La suma de las caídas de voltaje a -través de las resistencias es igual al voltaje que entrega la-fuente, esto es:

$$E = iR_1 + iR_2 + iR_3$$

De donde: $$E = i\,(R_1 + R_2 + R_3)$$

Entonces el valor de la corriente que fluye a través del-circuito es,

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Sabiendo que, $R = \frac{E}{i}$ entonces,

$$\frac{i}{E} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Invirtiendo términos tenemos que,

$$\frac{E}{i} = R_1 + R_2 + R_3 = Req.$$

La ecuación anterior nos muestra que existe una resistencia equivalente total para las tres resistencias contenidas en el circuito.

El circuito equivalente entonces se muestra en la Figura-2 - 2.

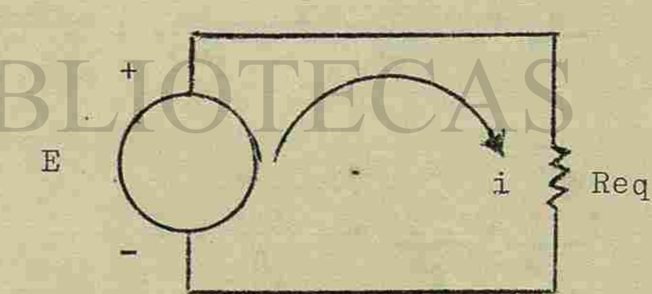


FIGURA 2 - 2

Circuito Paralelo.

La característica principal de un circuito en paralelo es Un circuito en el cual existe el mismo voltaje a través de todos los elementos.

Un circuito conectado en paralelo se muestra en la figura 2 - 3.

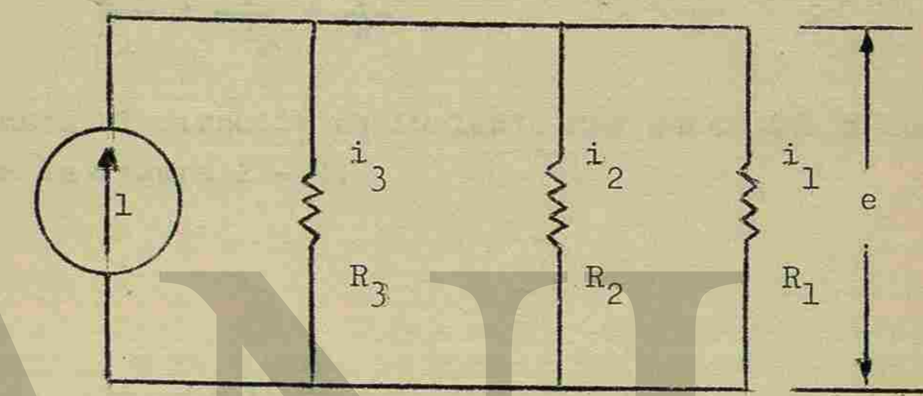


FIGURA 2 - 3

Esta figura nos muestra la cominación de una fuente de corriente en paralelo con tres resistencias, la corriente que -- fluye por cada una de ellas y el voltaje que es el mismo para-todas las resistencias.

Empleando la Ley de Kirchhoff; la corriente entregada por la fuente es igual a la suma de las corrientes en las resistencias, ó:

$$i = \frac{e}{R_1} + \frac{e}{R_2} + \frac{e}{R_3}$$

De donde,

$$= e\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Entonces el voltaje en el circuito será;

$$e = i \quad \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Así como en el circuito serie se obtuvo una resistencia - equivalente, en el circuito en paralelo, ella es igual:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Entonces el circuito equivalente nos queda tal y como se- muestra en la figura 2 - 4.

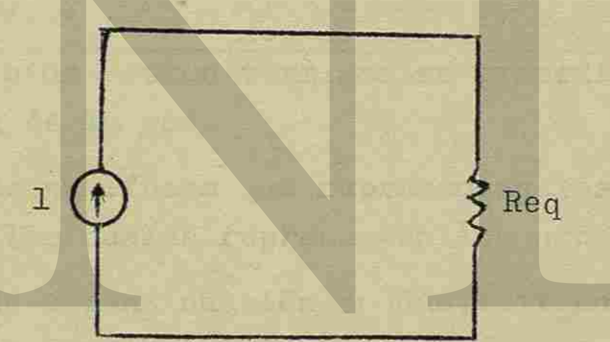


FIGURA 2 - 4

Cuando se tienen dos resistencias en paralelo (R_1 y R_2) la la resistencia equivalente será: $Req = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Definición Topológica.

Todos los elementos que forman un circuito constituyen -- una red eléctrica. Estas redes pueden estar formadas por la -- combinación de resistencias, inductancias, capacitancias, etc. Independientemente de la clase de elementos que constituyen la red eléctrica existe una cuestión importante que es la geome-- tría de la red. La cual se refiere a la manera en que están --

agrupados los diversos elementos e intercomunicados por sus -- terminales.

Existen redes formadas por elementos que están dispuestos de una forma que resulta un tanto complicada para su solución- por los medios más sencillos estudiados hasta ahora (Serie-Paralelo).

Una manera de solucionar este tipo de redes es por medio- de su representación topológica.

Para lograr esto es necesario definir antes lo que es una rama, nodo, lazo.

Rama.- Una rama es un elemento (Resistencia), ó un elemento en combinación con una fuente de energía.

Nodo.- Un nodo es un punto de unión entre dos ramas.

Lazo.- Se define como una trayectoria cerrada independiente de un circuito.

Una vez definidos éstos términos se procede a la representación topológica de la red.

Ella consiste en líneas que representan las tamas en las- mallas y puntos, los cuales representan los nodos.

Los pasos que a continuación se dan, sirven para la obtención de la Gráfica Topológica de la red:

1o.- Todas las fuentes en la red son iguales a cero, ya que -- sus valores son conocidos y lo que nos interesa es el número de variables desconocidas.
Las fuentes de voltaje están en corto circuito, y las de- corriente en circuito abierto.

2o.- Cada una de las ramas de la red se representa por una línea. Cuando existe un elemento en serie con una fuente de corriente, este elemento es suprimido junto con dicha --- fuente quedando una, un circuito abierto, ya que la co--- rriente que pasa por él es la misma que proporciona la -- fuente.

Cuando existe un elemento en paralelo con una fuente de voltaje éste también se suprime ya que tiene el mismo potencial que dicha fuente. Quedando la red como un corto circuito.

Como un ejemplo de redes y sus gráficas topológicas tenemos la figura 2 - 5.

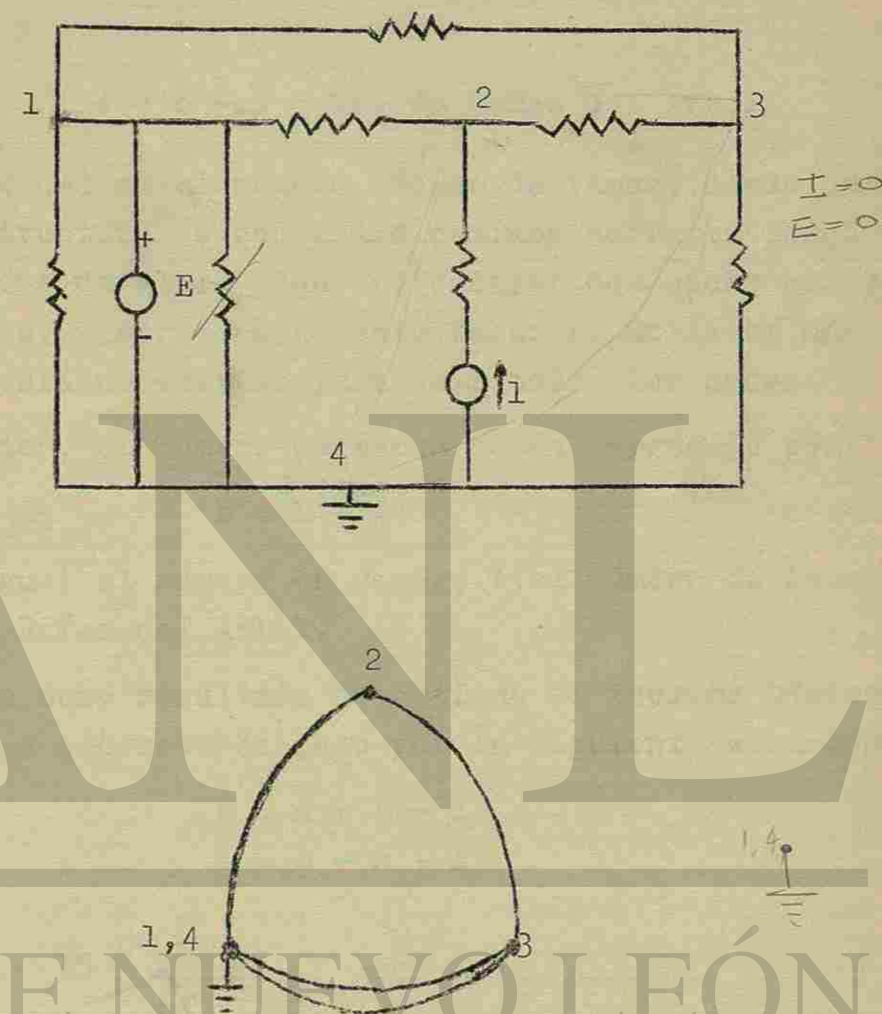


FIGURA 2 - 5

Para poder resolver un gráfico de la red debemos tener en cuenta lo que es "Arbol de la Red" esto se define de la siguiente manera: Arbol de la Red es un conjunto de ramas dispuestas de tal modo que cada nodo está conectado cuando menos con una rama, el conjunto no tiene trayectorias cerradas. Suponiendo que la figura 2 - 6 sea el gráfico de la red, el árbol que se obtiene será el que se muestra en la figura 2 - 6a.

Para formar un árbol correspondiente a una red determinada necesariamente deben abrirse ciertas ramas como se hizo en la figura, las ramas abiertas reciben el nombre de eslabones ó enlaces y se representa por la letra L, y en la figura son las líneas punteadas.

Para encontrar el número de ramas existentes en un árbol es igual:

$$A = n - 1 = \text{No. de Ramas del Arbol.}$$

De donde n-l es el número mínimo de ramas, donde está claro que la estructura no contendrá caminos cerrados porque la creación de uno de ellos requiere enlazar dos nodos que ya están conectados, y por consiguiente requiere utilizar más ramas de las realmente necesarias para unir todos los nodos.

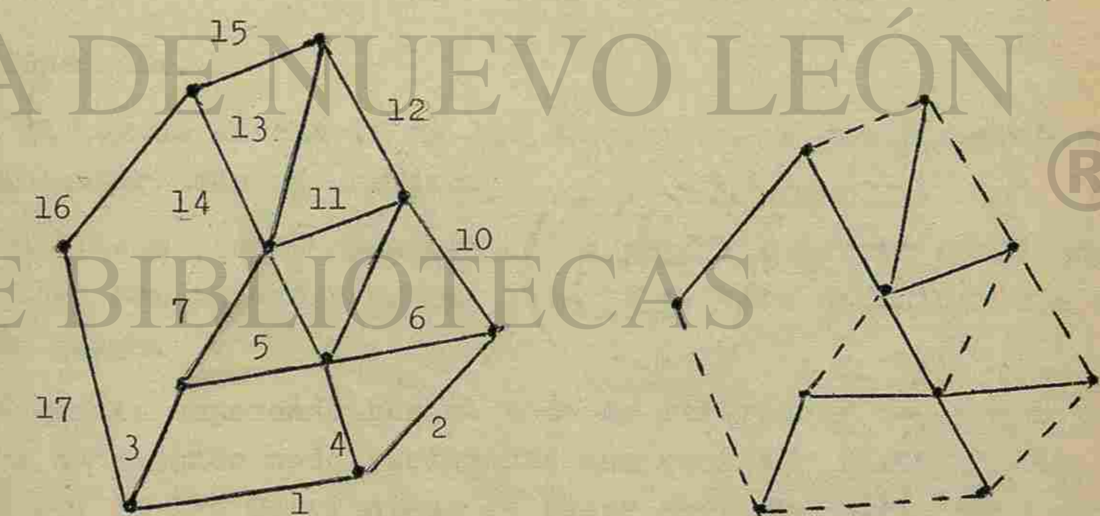
Ahora bien, el número de ramas queda expresado por:

$$b = L + A$$

donde b es igual al número de ramas, L el número de lazos y A el número de Ramas del Arbol.

De donde como resultado se obtiene el teorema básico de la Topología y que esta ha dado por la siguiente ecuación:

$$b = n + L - 1$$
$$L = b - n + 1$$



a) GRAFICO DE LA RED. b) ARBOL DE LA RED.

FIGURA 2 - 6

donde b es el número de brazos, n es el número de nodos y L es el número de lazos.

Ecuaciones 2b.

Cuando se tenga ya reducida una red a su gráfica topológica, ó sea conteniendo solo ramas y nodos, es entonces cuando estamos en condiciones de encontrar el número de incógnitas algebráicas, así como las ecuaciones por medio de las cuales serán encontradas dichas incógnitas. Las ecuaciones serán la de Volt-Ampere y las dos Leyes de Kirchhoff.

Como tenemos b ramas en una red, tendremos b corrientes desconocidas y b voltajes desconocidos ó un total de 2b incógnitas algebráicas. En suma,

No. de Incógnitas = 2b

Ecuaciones Volt-Ampere.

Como ya que sabemos cada rama en una gráfica topológica contiene una resistencia, las cuales pueden ser diferentes, para cada una de las ramas podemos encontrar una ecuación de Volt-Ampere, la cual nos proporciona en cada lazo una nueva información. De donde encontramos que el número de ecuaciones Volt-Ampere independientes es igual al número de ramas que hay, en suma,

No. de ecuaciones Volt-Ampere independientes = b

Ecuaciones Ei.

La Ley de Kirchhoff de las corrientes se puede escribir de cualquier nodo en una red.

No todas las ecuaciones que se pueden escribir utilizando esta Ley, son independientes, pero sí podemos encontrar una serie de ellas.

Primero empezando por el nodo de referencia se agrega una rama y un segundo nodo, solamente una ecuación independiente de la Ley de las Corrientes, se puede escribir para éstos dos nodos, puesto que solo se genera una corriente.

LOS CUATRO TIPOS DE RAMA SON:

1° UNA RAMA CON UNA RESISTENCIA

POR LO TANTO LA ECUACION VOLTIO-AMPERIO ES

$e = Ri'$

2° UNA RAMA CON UNA RESISTENCIA EN SERIE CON UNA FUENTE DE VOLTAJE Ó LA ECUACION VOLTIO-AMPERIO EN ESTE CASO SERA

$e = Ri' + E$

3° UNA RESISTENCIA EN PARALELO CON UNA FUENTE DE COR

$e = R(i' + I)$

4° UNA RESISTENCIA EN SERIE CON UNA FUENTE DE VOLTAJE Y EN PARALELO CON UNA FUENTE DE CORRIENTE

$e = E + R(i' + I)$

Cada rama que se crea envuelve un nuevo nodo el cual nos- dará la oportunidad de escribir una nueva ecuación de la Ley - de las corrientes para ese nodo.

En suma, el número de ecuaciones de la Ley de las corrientes independientes que podemos escribir será entonces igual al número de nodos menos uno o sea:

No. de ecuaciones de la Ley de las corrientes independientes = n-1.

Ecuaciones Ei.

Las ecuaciones de la Ley de Kirchhoff pueden escribirse - alrededor de cualquier paso cerrado en una red, incluyendo circuitos abiertos a través de ramas no existentes. Puesto que no todas de estas ecuaciones son independientes, es necesario conocer la gráfica topológica de la red, la cual nos dará la información del número de ecuaciones independientes que podemos- escribir, en suma.

No. de ecuaciones de la Ley de Voltajes independientes -- = L.

Hasta aquí hemos encontrado que el número de incógnitas,- de corrientes y voltajes en un problema es 2b. También encon-- tramos que el número de ecuaciones Volt-Ampere independientes- que se pueden escribir es b. Además se encontró que el número- de ecuaciones de la Ley de Corrientes es n-1. Y por último en- contramos que el número de ecuaciones de la Ley de los volta-- jes independientes es L.

Entonces el número total de ecuaciones independientes que encontramos es:

$$b + n - 1 + L$$

Por el teorema básico de la topología encontramos que el- número total de ecuaciones es 2b. De esta manera ya hemos en-- contrado 2b ecuaciones para nuestras 2b incógnitas las cuales- ahora pueden ser fácilmente resueltas por las reglas simples - del álgebra.

CAPITULO III

CORRIENTES DE MALLA Y VOLTAJES

DE NODO

METODO DE CORRIENTES DE MALLA.

Habiendo una vez establecido las Leyes de Ohm y las de --- Kirchhoff, estamos en condiciones de aplicar estos conceptos a- la resolución de circuitos resistivos formados por una o varias mallas.

El método de las corrientes de malla consiste en lo siguiente: "Si el primer paso consiste en imponer una corriente que -- fluye a través de la malla o mallas, generalmente se supone en- sentido de las manecillas del reloj".

Como segundo paso se construyen las ecuaciones de los voltajes de Kirchhoff para cada una de las mallas en términos de - corrientes expuestas. (El No. de ecuaciones será igual al No. - de incógnitas). A continuación son planteadas las ecuaciones de las corrientes de malla, resolviendo estas ecuaciones, ya sea - por el método de simultáneas, determinantes, etc.

Para comprender mejor el método anterior resolvamos el siguiente circuito resistivo.

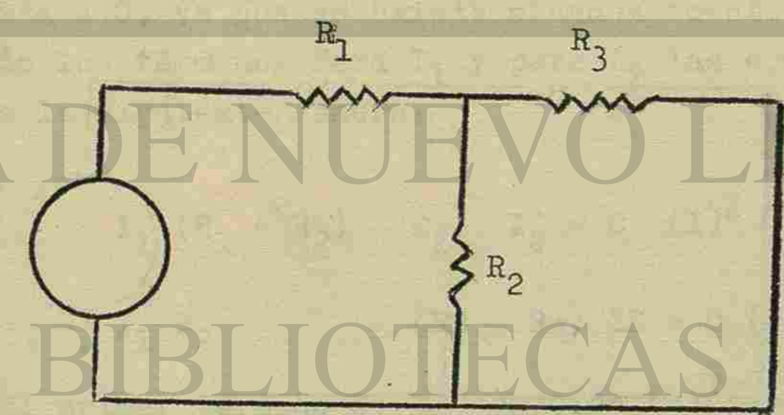
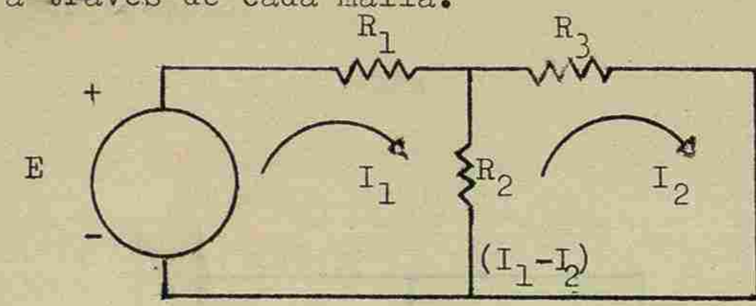


FIGURA 3 - 2

En el ejemplo se pide encontrar la corriente que pasa a -- través de cada una de las resistencias, así como también las --

caídas de tensión en ellas. Como primer paso suponemos una corriente a través de cada malla.



En seguida aplicando la ley de los voltajes de Kirchhoff para cada malla tenemos:

$$I_1 R_1 + R_2 (I_1 - I_2) = E \ (1)$$

$$I_2 R3 - R2 (I_1 - I_2) = 0 \ (2)$$

La primera ecuación está igualada a E que es el valor de la fuente en la malla, mientras que la segunda ecuación está igualada a 0, ya que no existe ninguna fuente en la malla. Acomodando los términos Para I_1 y para I_2 las ecuaciones nos quedan de la siguiente manera:

$$I_1 (R_1 + R_2) - R_2 \quad I_2 = E \quad (1)^I$$

$$- \ I_1 R_2 \qquad + (R2 + R3) \ I2 = 0 \ (2)^I$$

El primer término de la ecuación $(1)^I$ es el voltaje producido en la malla 1 debido a la corriente de la malla I_1, el segundo término es el voltaje producido en la malla 1 debido a la corriente de la malla I_2, así igualmente en la ecuación $(2)^I$

Las corrientes se pueden encontrar resolviendo estas ecuaciones por medio de simultáneas, determinantes, etc. Hay casos --

especiales en los cuales intervienen corrientes de mallas fan-- tasmas, esto sucede cuando existe en la malla una fuente de corriente, por ejemplo:

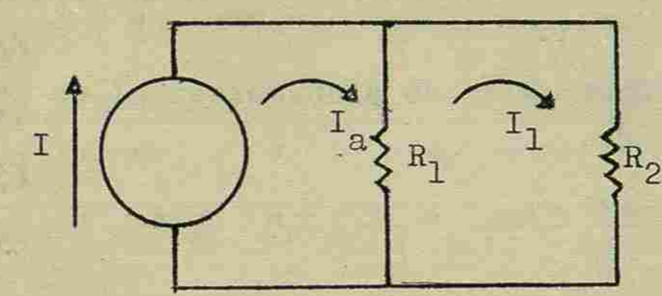


FIGURA 3 - 3

El método para calcular las corrientes a través de las resistencias en este circuito es el siguiente: como 1er. caso se supone las corrientes de malla en todas las mallas aparentes -- del circuito, después se escriben las ecuaciones para cada ma-- lla topológica, y como último paso se escribe una ecuación para cada una de las mallas fantasmas creadas por cada fuente de corriente, para el caso de la figura 3-3 las ecuaciones serán las siguientes: como solo existe una red topológica habrá una sola ecuación de la ley de los voltajes y será:

$$I_1 (R_1 + R_2) - I_a (R_1) = 0$$

$$I_a = I$$

La ecuación para K número de Mallas nos queda:

$$\begin{aligned}
r_{11}I_1 - r_{12}I_2 - r_{13}I_3 - \cdots\cdots - r_{1k}I_k &= E_1 \\
- r_{12}I_1 + r_{22}I_2 - r_{23}I_3 - \cdots\cdots - r_{2k}I_k &= E_2 \\
- r_{13}I_1 - r_{23}I_2 + r_{33}I_3 - \cdots\cdots - r_{3k}I_k &= E_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$- r_{1k}I_1 - r_{2k}I_2 - r_{3k}I_3 - \ldots\ldots + r_{kk}I_k = E_k$$

Donde:

r_{11} es la suma de resistencias en la malla 1

r_{22} " " " " " " " " 2

r_{33} " " " " " " " " 3

r_{kk} " " " " " " " " K

r_{12} es la resistencia de unión entre la malla 1 y 2

r_{13} " " " " " " " " 1 y 3

r_{23} " " " " " " " " 2 y 3

METODOS DE LOS VOLTAJES DE NODO.

El método de los voltajes de nodo consiste en encontrar -- las diferencias de voltaje a que se encuentra cada uno de los - nodos contenidos en un circuito, para tal propósito es necesario tener una referencia que generalmente es el nodo al cual le llegan mayor cantidad de elementos.

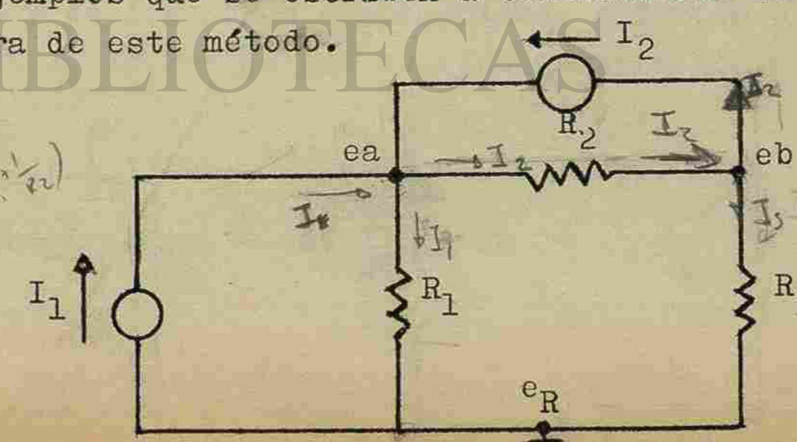
Por tal motivo se tendrá N-1 incógnitas donde N es el número de nodos reales en el circuito, para utilizar este método se sigue los pasos siguientes:

a) Primero se relaciona el nodo de referencia y los voltajes de nodo con respecto al referido, ellos serán los desconocidos, luego se escriben las ecuaciones de la ley de las corrientes de Kirchhoff, para cada uno de estos nodos, estas ecuaciones son - escritas en términos de los voltajes de los nodos.

Los 2 ejemplos que se escriben a continuación nos dan una- idea más clara de este método.

$I = I_1 + I_2$

$I = \frac{e_a}{R_1} + \frac{e_a}{R_2} - e_a\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$



En este circuito existen 2 nodos en donde eR es el nodo -- que se escogió como nodo de referencia, luego la ecuación de -- voltaje de nodo para el nodo desconocido será:

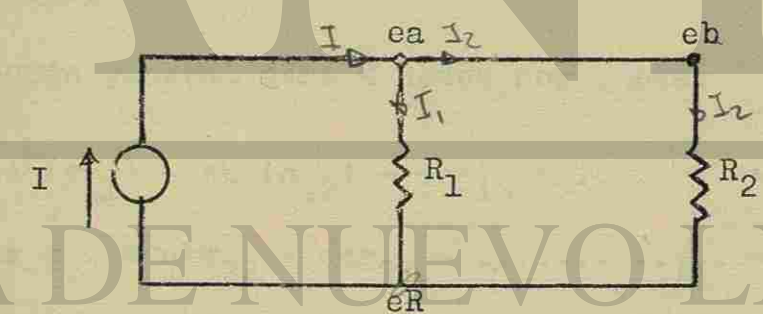
$$ea\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) = I$$

como $\frac{1}{R1} = G_1$ y $\frac{1}{R2} = G2$, la ecuación en función de conductancias quedará de la siguiente manera:

$$ea\,(G_1 + G_2) = I$$

El término del lado izquierdo de la ecuación representa la corriente que fluye a través del nodo de voltaje es, el lado - derecho de la ecuación representa la fuente de corriente que - trata de entrar al nodo.

El siguiente ejemplo nos da aún otra idea de como se desarrolla un circuito con más de 2 nodos.



En este circuito existen 3 nodos de donde eR es el nodo -- de referencia y ea los nodos desconocidos, entonces usaremos -- las ecuaciones de la ley de las corrientes para los nodos.

$$ea\left(-\frac{1}{R1}\right) + (ea - eb)\,\frac{1}{R2} = I1 + I2$$

$$eb\,\frac{1}{R3} + (eb - ea)\,\frac{1}{R2} = I2$$

La primera ecuación representa la corriente que fluye a -- través del nodo, ea, y la segunda ecuación representa la co---rriente que fluye a través del nodo eb.

Otra interpretación de estas fórmulas es la siguiente:

$$ea\left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}\right) - eb\left(\frac{1}{R2}\right) = I1 + I2 \quad (1)$$

$$-ea\left(\frac{1}{R2}\right) + eb\left(\frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right) = + I_1 \quad (2)$$

en donde el primer término de la ecuación I representa la suma de las corrientes que fluyen a través del nodo de voltaje ea, --cuando todos los otros nodos de voltaje son iguales a 0 ó co--nectados al punto de referencia, el coeficiente se multiplica a "ea" es la suma de todas las conductancias que llegan a ese nodo, el segundo término es la corriente que fluye a través del -nodo del voltaje "es", cuando a "eb" se le asigna un valor positivo y cuando la a está referida a 0, y los términos del lado -derecho de la ecuación son los valores de las fuentes de co ---rriente que entran al nodo.

Una vez obtenidas las ecuaciones se pueden resolver, ya -- sea por el método de simultáneas o también por el método de determinantes.

La ecuación general para K nodos nos queda:

$$\begin{array}{l}
ea\,(g_{11}) - eb\,(g_{12}) - ecg_{13} - \cdots\cdots - ekg_{1k} = I_1 \\
-ea\,g_{12} + ebg_{22} - ecg_{23} - \cdots\cdots - ekg_{2k} = I_2 \\
-ea\,g_{13} - ebg_{23} + ecg_{33} - \cdots\cdots - ekg_{3k} = I_3 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
-eag_{1k} - ebg_{2k} - ecg_{3k} - \cdots\cdots + ekg_{kk} = I_k
\end{array}$$

Donde:

g_{11} es el resiproco de la suma de resistencias en el nodo 1
g_{22} " " " " " " " " " 2
g_{33} " " " " " " " " " 3

g_{kk} Es el recíproco de la suma de resistencias en el nodo K

g_{12} Es el recíproco de la resistencia de unión entre nodo 1 y 2

g_{23} " " " " " " " " " " 2 y 3

g_{31} " " " " " " " " " " 3 y 1

También en estos casos existen configuraciones especiales-denominadas "super nodos" que son nodos que se encuentran en la Red creada por fuentes de voltaje.

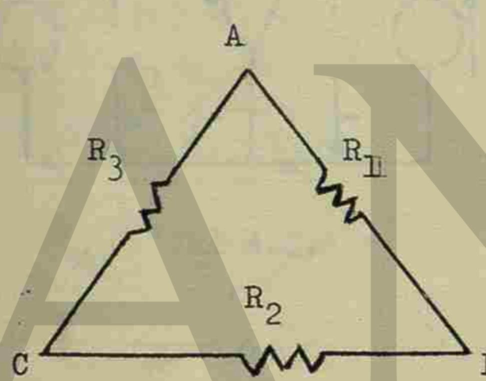
CAPITULO IV

TRANSFORMACION DE CIRCUITOS

En muchos casos la reducción sencilla de una red eléctrica no puede emplearse debido a las interconexiones que determinan que la no posibilidad de realizar una reducción del tipo serie, paralelo o serie-paralelo.

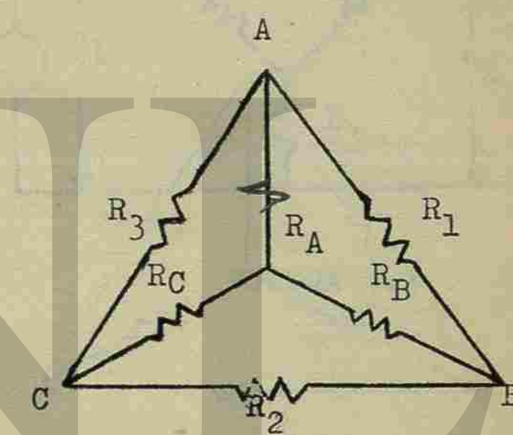
En tales casos, dichas reducciones o transformaciones de circuitos pueden presentarse de la siguiente manera:

a) TRANSFORMACION -Y.- Si se tiene una malla formando un triángulo con tres resistencias R1, R2, y R3, normalmente se le llama delta, este tipo de conexión se observa en la figura 4.1. -- (a)



Tres resistencias concectadas en triángulo.

FIGURA 4.1.(a)



Transformación -Y

FIGURA 4.1 (b)

Este tipo de configuración delta se puede reemplazar por una estrella de tres radios, (o Y) representados en la figura 4.1 (b), por R_A, R_B y R_C, siempre que los valores R_A, R_B y R_C se calculen correctamente.

Una sustitución de esta clase exige que las resistencias vistas desde las terminales AB, BC, CA, sean precisamente las mismas, después de hecha la sustitución que antes de efectuar ésta. Se puede realizar una deducción general, de las relacio--

nes que deben existir entre los valores de las resistencias para que la combinación sea equivalente.

Podemos establecer la equivalencia de un circuito estrella y uno delta por el manejo de dos pares de terminales con fuentes de corriente y con la condición de que el voltaje sea el mismo en la estrella y la delta. Dos sistemas con estas condiciones se muestran en las figuras 4.2 y 4.3.

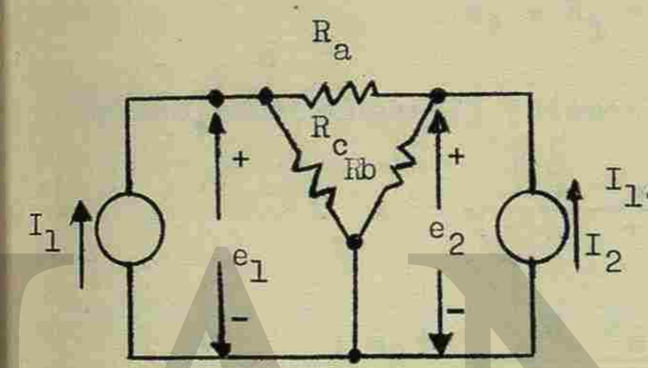
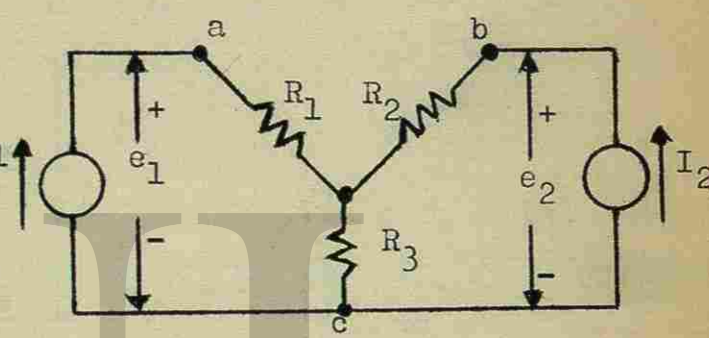


FIGURA 4.2.



FUGURA 4.3

Las respuestas pueden ser escritas por inspección de cada sistema por medio del teorema de superposición:

Para el circuito Estrella los voltajes son:

$$e_1 = (R_1 + R_3)(I_1) + R_3(I_2) \qquad \text{Ec. 4.1}$$

$$e_2 = (R_3)(I_1) + (R_2 + R_3)(I_2)$$

Para el sistema en Delta (∇) las ecuaciones son:

$$e_1 = \frac{(R_c)(R_a + R_b)(I_1)}{R_a + R_b + R_c} + \frac{R_c(R_b)(I_2)}{R_a + R_b + R_c} \qquad \text{Ec. 4.2}$$

$$e_2 = \frac{R_c(R_b)}{R_a + R_b + R_c}(I_1) + \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}(I_2)$$

Los coeficientes en las ecuaciones 4.1 y 4.2 pueden ser idénticos y entonces:

$$R_1 + R_3 = \frac{R_c\ (R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_b\ R_c}{R_a + R_b + R_c} \qquad \text{Ecs. 4.3}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_b\ (R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

De las ecuaciones 4.3 podemos obtener:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_a\ R_c}{R_a + R_b + R_c} \\ R_2 &= \frac{R_a\ R_b}{R_a + R_b + R_c} \\ R_3 &= \frac{R_b\ R_c}{R_a + R_b + R_c} \end{aligned}\right\} \Delta \text{ A } Y$$

De lo anterior podemos deducir la expresión general para pasar de un circuito delta (∇) a un estrella (Y)

$$\text{Resistencia } Y = \frac{\text{Producto de Resistencias adyacentes del } (\nabla)}{\text{Suma de las resistencias del } (\nabla)}$$

Igualmente de las ecuaciones 4.3 podemos encontrar la solución para resistencias (∇) que son:

$$\left.\begin{aligned} R_a &= \frac{R_1\ R_2 + R_2\ R_3 + R_3\ R_1}{R_3} \\ R_b &= \frac{R_1\ R_2 + R_2\ R_3 + R_3\ R_1}{R_1} \\ R_c &= \frac{R_1\ R_2 + R_2\ R_3 + R_3\ R_1}{R_2} \end{aligned}\right\} Y \text{ A } \Delta$$

igualmente podemos obtener una expresión general para pasar de-un circuito estrella a un delta (∇).

$$\text{Resistencia } (\nabla) = \frac{\text{Suma de los productos de las resistencias en } \lambda \text{ tomadas en pares}}{\text{La Resistencia opuesta en estrella}}$$

TEOREMAS DE THEVENIN Y NORTON

Algunas veces durante el transcurso del análisis de Circuitos Lineales, nos encontramos con algunas redes compuestas de - varias fuentes ya sea de corrientes o de voltaje y elementos resistivos, de las cuales se desea particularmente conocer la co-corriente, voltaje o potencia en un elemento determinado o agregado que bien puede ser una resistencia de carga (R_L); la aplicación de los teoremas de Thevenin y Norton resulta la manera - más ventajosa de lograr rápidamente estos propósitos, ya que -- sustituye gran parte de una red complicada por un circuito equivalente más simple. Este nuevo circuito como ya se dijo nos permite calcular rápidamente los parámetros antes mencionados. El-Teorema de Thevenin se enuncia de la manera siguiente:

"Cualquier red compuesta de elementos resistivos, fuentes-de voltaje y corriente, se pueden substituir por una fuente de-voltaje en serie con una resistencia". El valor de la fuente es igual al voltaje medido en terminales estando en circuito abierto, la resistencia es igual a la resistencia equivalente medida en las terminales cuando todas las fuentes estan igualadas a -- cero.

Para formar una fuente de voltaje "cero" se cortocircuitan sus terminales, para el caso de una fuente de corriente las terminales se colocan en circuito abierto.

APLICACION DEL TEOREMA DE THEVENIN.

Supóngase que se tiene un circuito como el mostrado en la-Figura 4.4 y se quiere encontrar su equivalente Thevenin.

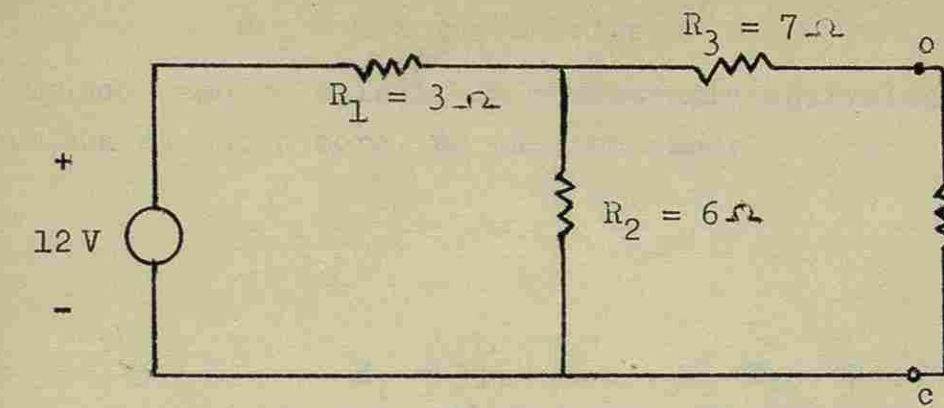


FIGURA 4.4

Como primer paso es necesario encontrar el valor de la --- fuente de voltaje del circuito equivalente. Según el enunciado- del Teorema este valor es el voltaje medido en terminales cuan- do se encuentra en circuito abierto como se muestra en la Figu- ra 4.5.

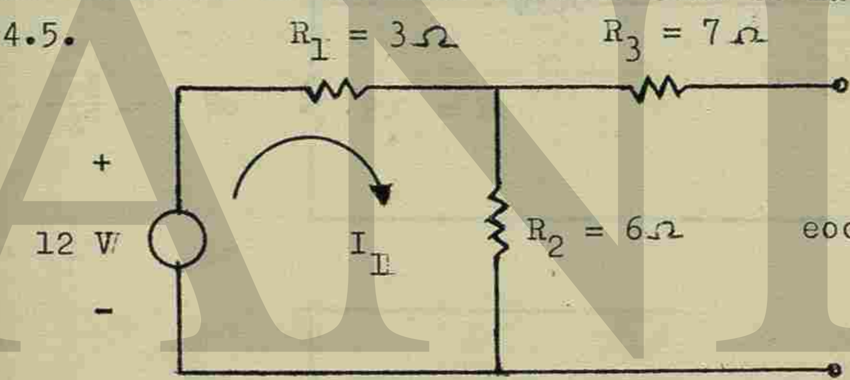


FIGURA 4.5

$e_{oc} = \frac{13}{16}\,12$

Este voltaje se puede calcular por cualquiera de los méto- dos enunciados en el capítulo anterior, (Corriente de malla, -- voltaje de nodo, etc.). Analizando el circuito por corriente de malla se encuentra una corriente (i) que viene dada por la si-- guiente ecuación:

$$12 - 3i - 6i = 0$$

De donde:

$$i = \frac{12}{9} = 4/3 \text{ Amps.}$$

De donde el voltaje (e_{oc}) que es el valor que hay que dar a la- fuente de voltaje en el circuito equivalente, viene dado por:

$$e_{oc} = R_2\ i$$

$$e_{oc} = 6 \times \frac{4}{3} = 8 \text{ Volts}$$

Como segundo paso se calcula la resistencia equivalente cuando- las fuentes se hacen cero, en nuestro caso:

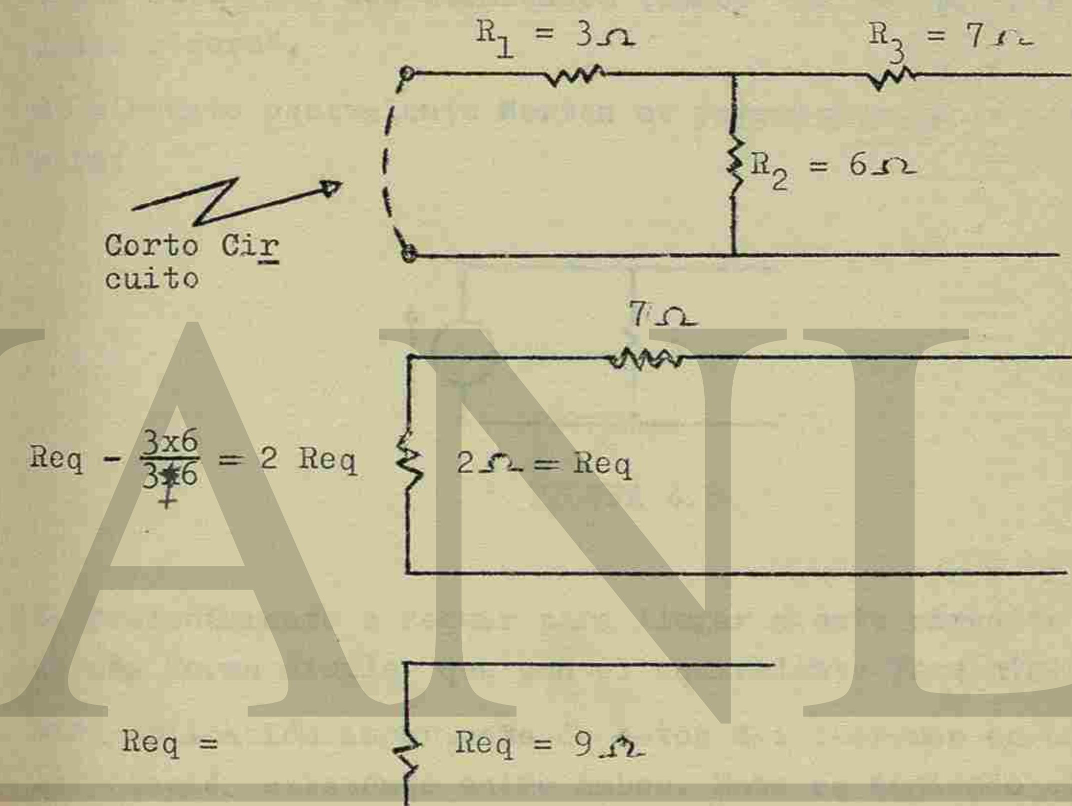


FIGURA 4.6

Por lo tanto el equivalente Thevenin queda de la siguiente manera:

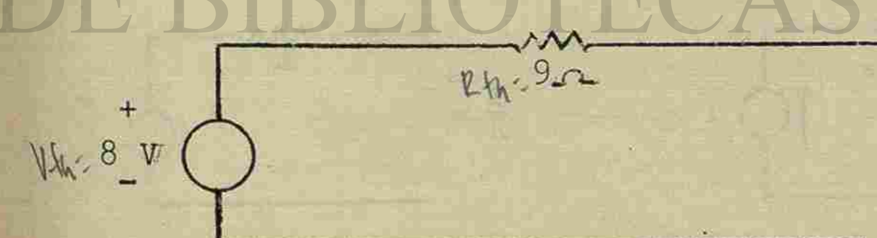


FIGURA 4.7

TEOREMA DE NORTON.

El Teorema de Norton está expresado de la siguiente manera:

"Cualquier red de dos terminales formada por fuentes y resistencias puede ser sustituída por una fuente de corriente en paralelo con una resistencia. El valor de la fuente de corriente es igual a la corriente de corto circuito que circula por las terminales y la resistencia es igual a resistencia equivalente, vista desde las dos terminales cuando las fuentes han sido igualadas a cero".

El circuito equivalente Norton se representa de la siguiente manera:

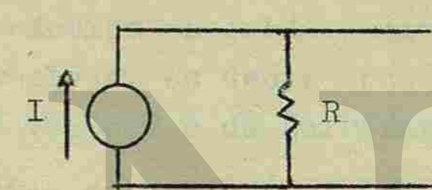
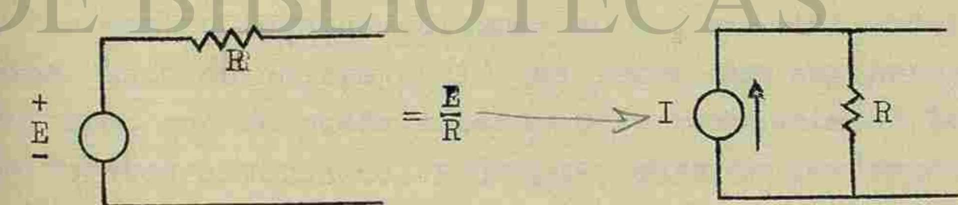


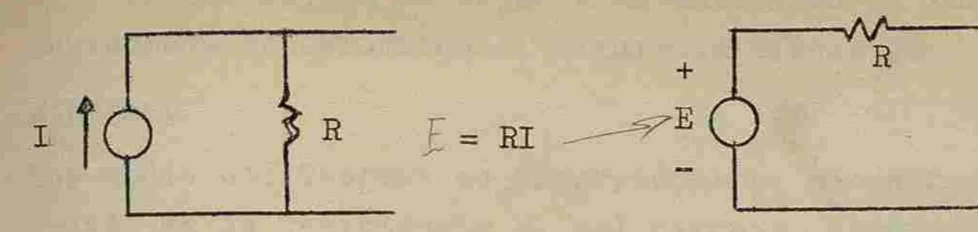
FIGURA 4.8

El procedimiento a seguir para llegar a este circuito se hace de una forma similar que con el equivalente Thevenin.

Otra aplicación importsnte de estos dos teoremas es el uso de la relación existente entre ambos. Esto es teniendo el equivalente Thevenin o partiendo de él, encontrar el equivalente Norton e inversamente teniendo el equivalente Norton, encontrar el Thevenin, como se muestra a continuación:



THEVENIN NORTON



NORTON THEVENTN

FIGURA 4.9

TEOREMA DE SUPERPOSICION.

El análisis de Circuitos Eléctricos que se ha hecho hasta ahora, se ha considerando tomando en cuenta una sola fuente de energía. En la práctica es común encontrar estos circuitos de una forma más compleja, es decir constituídos por más de una fuente ya sea de voltaje o de corriente.

Analizar estos circuitos por los medios ya conocidos, sería muy complejo y laborioso por lo cual se recurre a un método de análisis más sencillo y que es el teorema de superposición: el cual se enuncia de la siguiente manera:

"En cualquier red resistiva lineal que contenga distintas fuentes, la corriente, y la tensión a través de cualquier resistencia o fuente, puede ser calculada sumando algebráicamente todas las corrientes y voltajes producidos individualmente por cada fuente actuando sola, con todas las demás fuentes de tensión substituídos por corto circuito y todas las demás fuentes de corriente sustituídas por circuito abierto".

Para un mayor entendimiento de este teorema supóngase que se tiene un circuito contenido cuatro fuentes. El teorema enuncia que se puede encontrar una respuesta considerando cada una de las cuatro fuentes actuando sola y sumando los cuatro resultados. Esto no quiere decir que tenga que ser necesariamente así, sino que se puede encontrar la respuesta de las dos primeras fuentes alternadas, y después sumarle los resultados de las otras dos fuentes. En general la idea es de que una fuente inactiva conduce siempre a un circuito más simple.

Con el objeto de dejar bien entendida la aplicación de este teorema se soluciona el siguiente circuito:

Ejemplo:

Por medio del Teorema de Superposición, encontrar el voltaje através de la resistencia R_2 del circuito siguiente:

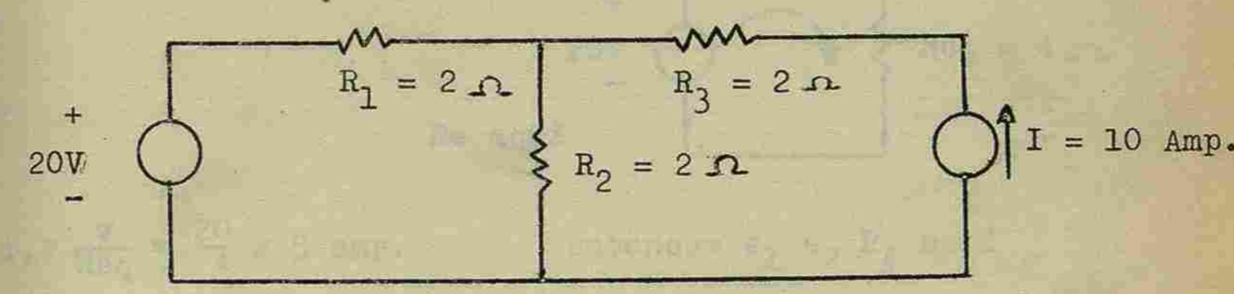
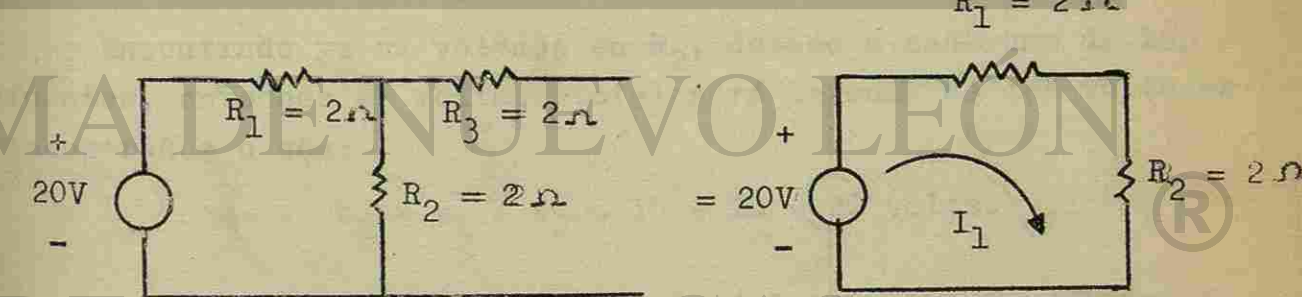


FIGURA 4.10

SOLUCION:

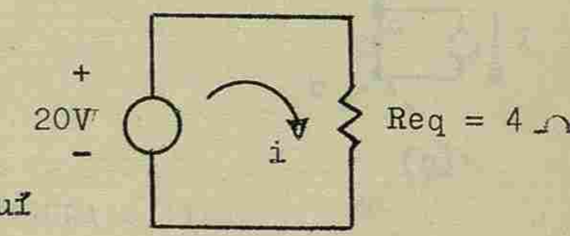
El primer paso es el de eliminar cualquiera de las dos --- fuentes, en este caso se eliminó primero la fuente de corriente (para hacer cero la fuente se pone en Circuito abierto) quedándonos el circuito de la siguiente manera:



Como el circuito quede abierto en el lado de la fuente de corriente, R_3 es eliminada, ya que no fluye corriente por ella y no causa ningún afecto al circuito.

El siguiente paso es encontrar la corriente que circula -- por la R_2 ya que es donde deseamos conocer el voltaje, ésto lo- podemos hacer por medio de Corriente de malla como se muestra a continuación:

$$Req = R_1 + R_2 = 2 + 2 = 4$$



De aquí

$$i_1 = \frac{v}{Req} = \frac{20}{4} = 5 \text{ amp.}$$ entonces e_1 e_2 R_4 será

$$e_1 = i_1 \times R_2 = 5 \times 2 = 10 \text{ volts.}$$

A continuación se va a calcular el voltaje en la R_2 debido a la fuente de corriente, para ello es necesario cortocircuitar la fuente de voltaje. Entonces la $i_2 = 5$ amp. y el e_2 será:

$$e_2 = R_2 \times i_2 = 2 \times 5 = 10 \text{ volts}$$

Encontrado ya el voltaje en R_2, debido a cada una de las - fuentes, entonces el voltaje total será la suma de los voltajes encontrados o sea:

$$e_T = e_1 + e_2 = 10 + 10 = 20 \text{ volts.}$$

TEOREMA DE SUSTITUCION. El enunciado del teorema de sustitución es el siguiente: "Un voltaje conocido en un circuito puede ser- reemplazado por un voltaje ideal (fuente), y una corriente conocida puede ser reemplazada por una fuente de corriente ideal".- Para probar este teorema podemos considerar una resistencia Rab conectada entre dos puntos a y b en un sistema como se muestra- en la figura 4.11 (a).

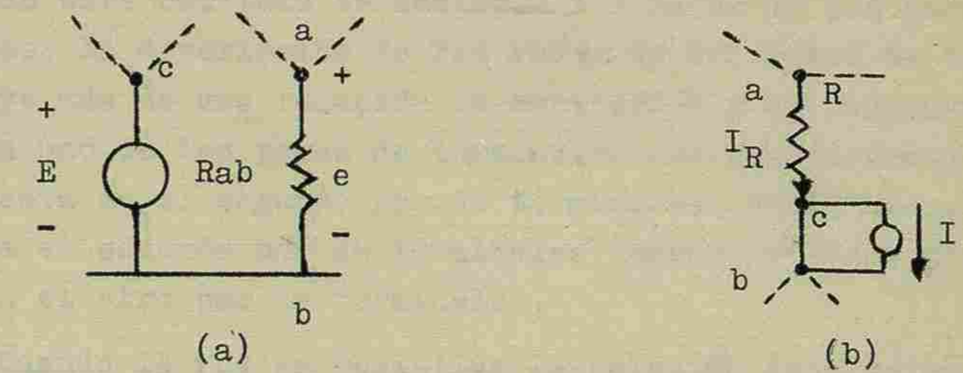


FIGURA 4.11

Una fuente de voltaje se conecta en el punto b, si el voltaje-- a través de b a c es el mismo que el existente entre b y a, los puntos c y a estarán al mismo potencial.

Si cortocircuitamos estos dos puntos, la resistencia Rab - está entonces en paralelo con una fuente de voltaje.

El resultado neto es el cambio de la resistencia por una - fuente de voltaje con el mismo valor de voltaje a través de --- ésta.

Un argumento similar puede seguirse para la fuente de co-- rriente de la figura 4.11 (b). Supóngase que una corriente IR - está fluyendo en la resistencia desde el punto a al punto b. -- Una fuente de corriente puede ser colocada en paralelo con el - corto circuito entre los puntos c y b sin cambio alguno. Si la- fuente de corriente I es del mismo valor que la corriente iR, - no habrá corriente en la conexión b y c y puede ser cambiada. - La Resistencia R está en serie con la fuente de corriente y pue de ser cambiado tan lejos como sea al resto del circuito en --- cuestión.

El resultado neto es que la Resistencia R puede ser reemplazada por una fuente de corriente ideal con el mismo valor de corrien te que fluye a través de ella.

CAPITULO V

REDES DE 2 PARES DE TERMINALES

INTRODUCCION.

En este capítulo se analizan las redes de dos pares de terminales; la descripción de las redes de dos pares de terminales incluye más de una relación de excitación y de respuesta; si se excita uno de los pares de terminales obviamente producimos una respuesta en el segundo par de terminales. Ahora bien, si se -- excita el segundo par de terminales también obtendremos una señal en el otro par de terminales.

Cuando la red es resistiva la relación excitación y respuesta es de resistencias equivalentes simples, entonces una -- red resistiva de dos pares de terminales se puede reducir a --- tres resistencias equivalentes.

TEOREMA DE RECIPROCIDAD.

El teorema de reciprocidad trata de la relación de excitación y de respuesta de un sistema de dos pares de terminales, - como el que se muestra en la figura 5.1

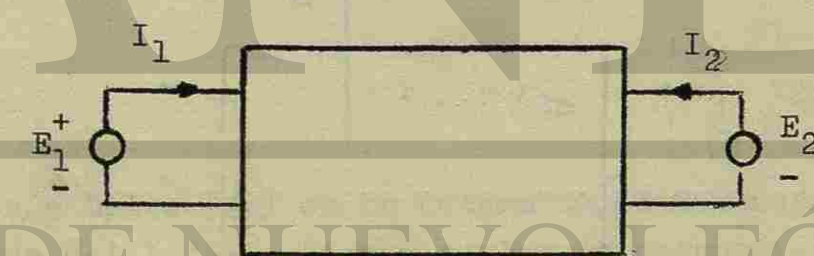


FIGURA 5.1

Supóngase que la red esta excitada por una fuente de voltaje E_2 o por una fuente de voltaje E_1, entonces se puede escribir una serie de ecuaciones de malla que describen el sistema - como sigue:

$$
\begin{aligned}
i_1 r_{11} - i_2\, r_{12} - i_3\, r_{13} \;----\; i_n\, r_{1n} &= E_1 \\
-\; i_1 r_{12} + i_2\, r_{22} - i_3\, r_{23} \;----\; i_n\, r_{2n} &= E_2 \\
-\; i_1 r_{13} - i_2\, r_{23} + i_3\, r_{33} \;----\; i_n\, r_{3n} &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad & \\
i_1 r_{1n} - i_2\, r_{2n} - i_3\, r_{3n} \;----\; + i_n\, r_{nn} &= 0
\end{aligned}
$$

La solución de la red se lograría una vez resulto este --- conjunto de ecuaciones generales. Primero se puede hacer $E_2 = 0$ o sea cortocircuitar E_2 y calcular la corriente I_2 que fluiría- en corto circuito, la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$
I_2 = \frac{-E1}{\Delta}\begin{vmatrix} - r_{12} & - r_{23} & \cdots\cdots & - r_{2n} \\ - r_{13} & r_{33} & \cdots\cdots & - r_{3n} \\ \vdots & & & \\ - r_{1n} & - r_{3n} & \cdots\cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5\text{-}1)
$$

En donde Delta (Δ) es un determinante compuesto por los - coeficientes del lado izquierdo de las ecuaciones. Ahora si hacemos $E_1 = 0$ y calculamos la corriente I_1 que fluye debido al -- voltaje E_2, quedará expresada:

$$
I_1 = \frac{-E2}{\Delta}\begin{vmatrix} - r_{12} & - r_{13} & \cdots\cdots\cdots & - r_{1n} \\ - r_{23} & + r_{33} & \cdots\cdots\cdots & - r_{1n} \\ \vdots & & & \\ - r_{2n} & - r_{3n} & \cdots\cdots\cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5\text{-}2)
$$

El determinante de las ecuaciones 5-1 y 5-2 es el mismo -- excepto por un intercambio del primer renglón en la primera columna, es fácil determinar que este intercambio no cambia el valor del determinante y entonces que los dos determinantes son iguales; una condición necesaria para esta igualdad es la simetría del determinante original de los coeficientes.

Cuando los dos determinantes son iguales, se tiene que la corriente producida I_2 por el voltaje E_1 es la misma que la corriente I_1 producida por el voltaje E_2.

Un enunciado alternativo del Teorema de Reciprocidad es:

"Una fuente de voltaje ideal y un amperímetro ideal en --- cualquiera de las dos ramas de la red pasiva que es lineal y bilateral, puede ser cambiado sin cambiar el valor leído en cualquiera de ellas". Un análisis análogo puede hacerse con fuentes de corriente que ahora excitarán la red y los voltajes obtenidos en la respuesta lo cual hace que se llegue a la conclusión siguiente:

"Una fuente de corriente y un voltímetro a través de cualquier par de nodos en una red pasiva que es lineal y bilateral, puede ser intercambiados sin cambiar los valores leídos en cualquiera de ellos".

Estas dos conclusiones constituyen el Teorema de Reciprocidad: Es fácil recordar que los elementos que pueden tener la -- misma impedancia interna. La fuente de voltaje y el amperímetro tienen resistencia 0, las fuentes de corriente y el voltímetro tienen resistencia infinita.

Parámetros "R"

Nuestro objetivo es encontrar el circuito equivalente de una red de dos pares de terminales como la mostrada en la figura 5-2.

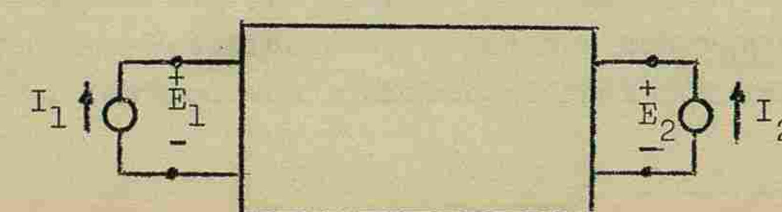


FIGURA 5.2

Si consideramos las dos fuentes de corriente como las excitaciones y los dos voltajes como las respuestas, podemos escribir por medio del Teorema de Superposición:

$$E_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 \qquad (5\text{-}3\ a)$$

$$E_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \qquad (5\text{-}4\ b)$$

Donde los parámetros "r" son constantes de proporcionabilidad obtenidos calculando la respuesta, debido al valor unitario de cada fuente cuando la otra fuente se hace 0. Entonces de la ecuación (5-3 a) cuando $I_2 = 0$ tenemos:

$$r_{11} = \frac{E1}{I_1} \text{ cuando } I_2 = 0 \qquad (5\text{-}5\ a)$$

De la misma ecuación cuando $I_1 = 0$ tenemos:

$$r_{12} = \frac{E1}{I_2} \text{ cuando } I_1 = 0 \qquad (5\text{-}5\ b)$$

De la ecuación (5-4) cuando $I_2 = 0$ tenemos:

$$r_{21} = \frac{E2}{I_1} \text{ cuando } I_2 = 0 \qquad (5\text{-}5\ c)$$

De la misma ecuación cuando $I_1 = 0$ tenemos:

$$r_{22} = \frac{E2}{I_2} \text{ cuando } I_1 = 0 \qquad (5\text{-}5\ d)$$

Ya que una fuente de corriente cero es simplemente un circuito abierto, la resistencia r_{11} es la resistencia en las terminales de entrada de la red con las terminales de salida en circuito abierto. La resistencia r_{22} es la resistencia vista desde las terminales de salida de la red con las terminales de entrada en circuito abierto. La constante r_{12} es el voltaje E_1 producido en las terminales de entrada, en el circuito abierto por amper de corriente I_2 de las terminales de salida y la constante r_{21} es el voltaje E_2 producido en las terminales de salida en circuito abierto por amper de entrada de la corriente I_1. Por el Teorema de Reciprocidad, estas dos constantes son iguales o: $r_{12} = r_{21}$ y podemos escribir la realción volt-ampere por la red de dos pares de terminales como:

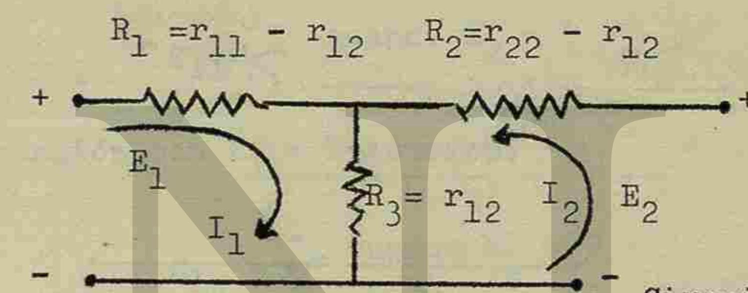
$$E_1 = r_{11} I_1 + r_{12} I_2 \qquad (5\text{-}6)$$

$$E_2 = r_{12} I_1 + r_{22} I_2 \qquad (5\text{-}7)$$

Usualmente los parámetros "r" se obtienen directamente por el cálculo de las ecuaciones (5-5).

Las tres constantes r_{11}, r_{12} y r_{22} describen completamente la red para cualquier tipo de excitación.

Cuando la red es resistiva, la ecuación representa una red de tres resistencias como se muestra en la figura 5.3.



Circuito equivalente T de dos pares de terminales

FIGURA 5.3

De las ecuaciones encontramos que la resistencia mutua R_3 entre las dos mallas en la red es igual a r_{12}

$$R_3 = r_{12} \qquad (5\text{-}8)$$

La resistencia total de la malla 1 es r_{11} entonces:

$$R_1 = r_{11} - r_{12} \qquad (5\text{-}9)$$

Y simultáneamente:

$$R_2 = r_{22} - r_{12} \qquad (5\text{-}10)$$

Un valor negativo de R resulta yá si el voltaje de salida es opuesto en polaridad al voltaje de entrada, y un valor negativo de R_1 o R_2 ocurre cuando r_{12} es mayor que r_{11} o r_{22}.

El circuito equivalente T no es el más general para redes pasivas de dos pares de terminales como se verá más adelante.

PARAMETROS "g".

Si los voltajes son las excitaciones en la figura 5.3 y -- las corrientes son la respuesta, por medio del teorema de superposición, podemos escribir:

$$I_1 = g_{11}\, E_1 + g_{12}\, E_2 \qquad (5\text{-}11)$$

$$I_2 = g_{21}\, E_1 + g_{22}\, E_2 \qquad (5\text{-}12)$$

donde los parámetros g son coeficientes de proporcionalidad entre la fuente individual y las respuestas individuales dadas -- por:

de la ecuación (5-11), con $E_2 = 0$, tenemos:

$$g_{11} = \frac{I_1}{E_1} \text{ cuando } E_2 = 0 \qquad (5\text{-}13a)$$

De la misma ecuación con $E_1 = 0$ tenemos:

$$g_{12} = \frac{I_1}{E_2} \text{ cuando } E_1 = 0 \qquad (5\text{-}13b)$$

De la ecuación (5-12) y con $E_2 = 0$ tenemos:

$$g_{21} = \frac{I_2}{E_1} \text{ cuando } E_2 = 0 \qquad (5\text{-}13c)$$

De la misma ecuación con $E_1 = 0$ tenemos:

$$g_{22} = \frac{I_2}{E_2} \text{ cuando } E_1 = 0 \qquad (5\text{-}13d)$$

La constante g_{11} es la admitancia de entrada de la red, -- con un corto circuito en el par de terminales de salida, similarmente g_{12} es la admitancia en el par de terminales de salida La constante g_{12} es la corriente producida en la entrada por -- voltio aplicado en la salida, la g_{21} es la corriente producida en la salida, por voltio en la entrada. Por el teorema de reciprocidad estas dos cantidades, son iguales:

$$g_{12} = g_{21} \qquad (5\text{-}14)$$

Como un resultado de la ecuación (5-14), la relación de la Ley de Ohm de la ecuación (5-11 y 12), puede ser simplificada:

$$I_1 = g_{11}\, E_1 + g_{12}\, E_2 \tag{5-15}$$

$$I_2 = g_{12}\, E_1 + g_{22}\, E_2 \tag{5-16}$$

Las ecuaciones (5-15 y 16) representan una forma alternativa de las ecuaciones volt-ampere de una red de dos pares de terminales dadas en la ecuación (5-6 y 7). El circuito equivalente (∇) de la figura (5-4) representa las ecuaciones (5-15 y 16).

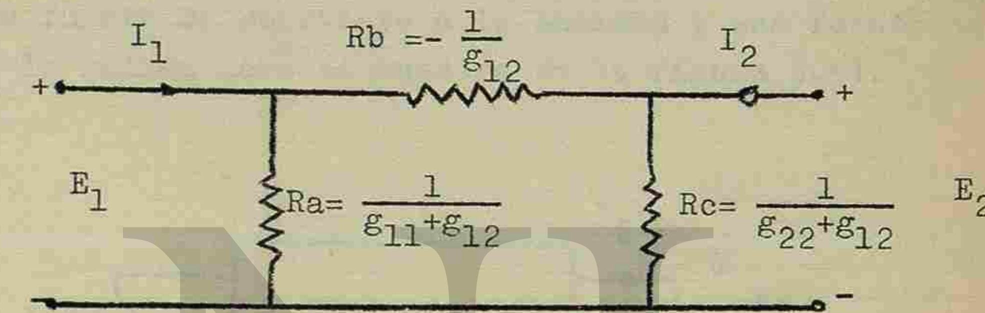


FIGURA 5.4

De la ecuación, la conductancia mutua es g_{12}, y entonces - la resistencia R_b entre los dos nodos es:

$$R_b = -\frac{1}{g_{12}} \tag{5-17}$$

El signo negativo viene dado por la dirección asignada a I_2. La conductancia total del nodo 1 es g_{11}. La conductancia mutua-es menos g_{12} la conductancia en el nodo 1 es por lo tanto g_{11} + g_{12} luego:

$$R_a = \frac{1}{g_{11} + g_{12}} \tag{5-18}$$

Similarmente la conductancia total del nodo dos es g_{22} y la conductancia neta es $g_{22} + g_{12}$ entonces R_c será:

$$R_c = \frac{1}{g_{22} + g_{12}} \tag{5-19}$$

Este circuito (π) no es más general que el circuito T porque cualquier resistencia dada por las ecuaciones (5-17), (5-18) y (5-19) pueden hacerse negativas, el circuito T y el circuito-(π) son formas generales de los circuitos delta y estrella y están relacionados por las transformaciones delta y estrella.

PARAMETROS "h".

Los parámetros "r" tienen dimensiones de resistencia y los g de conductancia, otros conjuntos de parámetros son posibles,- entre los cuales los parámetros "h" o híbridos son los más útiles, Para definir los parámetros híbridos, la red se excita por medio de una fuente de corriente a la entrada y una fuente de - voltaje en la salida como se muestra en la figura 5.5).

FIGURA 5.5

Por medio del Teorema de superposición podemos escribir:

$$E_1 = h_{11} I_1 + h_{12} E_2 \qquad (5\text{-}20\ a)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} E_2 \qquad (5\text{-}20\ b)$$

De donde encontramos que h_{11} de la ecuación (5-20a) con E_2 = a 0

$$h_{11} = \frac{E_1}{I_1} \text{ cuando } E_2 = 0 \qquad (5\text{-}21\ a)$$

$$h_{12} = \frac{E_1}{E_2} \text{ cuando } I_1 = 0 \qquad (5\text{-}21\ b)$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \text{ cuando } E_2 = 0 \qquad (5\text{-}21\ c)$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{E_2} \text{ cuando } I_1 = 0 \qquad (5\text{-}21\ d)$$

El parámetro h_{11} es la resistencia de entrada con un corto circuito en la terminal de salida. El parámetro h_{12} es la ganancia de voltaje inverso obtenida al aplicar un voltaje en la salida y calculando el voltaje de circuito abierto resultante en la entrada. El parámetro h_{21} es la ganancia de la corriente hacia adelante al aplicar una corriente a la entrada y calculando la corriente resultante del cortocircuito en la salida, el parámetro h_{22} es la admitancia de la salida, con un corto circuito en la entrada. Por medio del Teorema de Reciprocidad es fácil demostrar que:

$$h_{21} = -\,h_{12}$$

El circuito equivalente para los parámetros h de la ecuación (5-21);

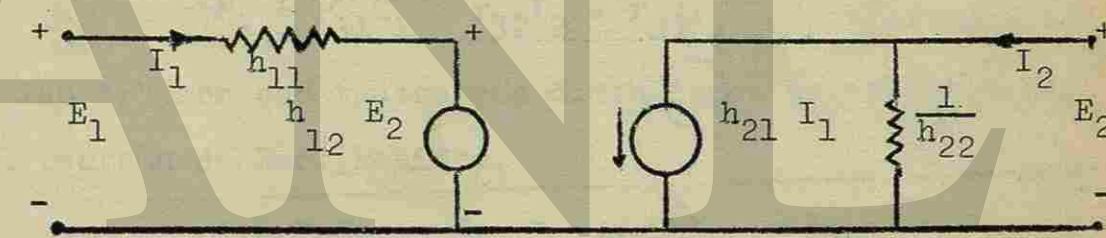


FIGURA 5.6

Las ecuaciones para este circuito son idénticas que las ecuaciones (5-20):

Los elementos resistivos se muestran en ohmios y las razones de voltaje y corriente aparecen como fuentes.

Hay relaciones obvias entre los parámetros h, r y g que pueden ser encontradas manipulando las ecuaciones del parámetro h hasta llevarlos a la forma de las ecuaciones del parámetro r o g, generalmente, un solo conjunto de parámetros se usa para un problema dado y estas relaciones son académicas.

CIRCUITO EQUIVALENTE PARA REDES DE CUATRO TERMINALES.

Una red de cuatro terminales se muestra en la figura (5-7)

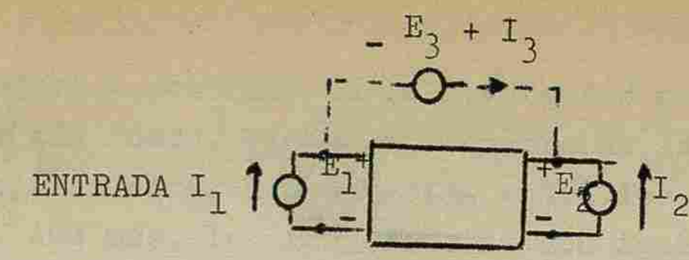


FIGURA 5.7

Los pares de entrada y de salida están completamente separados y no tienen un punto común de tierra.

Si va a ver conexiones externas entre las terminales de entrada y de salida, el tercer par de terminales marcado como --- E_3I_3 debe ser considerado. Si tomamos a la corriente como excitación, y los voltajes como respuesta, por superposición podemos escribir:

$$E_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + r_{13}I_3 \qquad (5\text{-}22\ a)$$

$$E_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + r_{23}I_3 \qquad (5\text{-}22\ b)$$

$$E_3 = r_{31}I_1 + r_{32}I_2 + r_{33}I_3 \qquad (5\text{-}22\ c)$$

Donde las "r" son constantes con dimensiones de resistencia.

Por el Teorema de Reciprocidad.

$$r_{12} = r_{21}, \quad r_{13} = r_{31}, \quad r_{23} - r_{32}$$

Los seis parámetros r restantes describen la red general de cuatro terminales y por lo tanto un circuito general de cuatro terminales, puede ser reducido a seis resistencias.

Red simétrica mostrada en la figura (5-8).

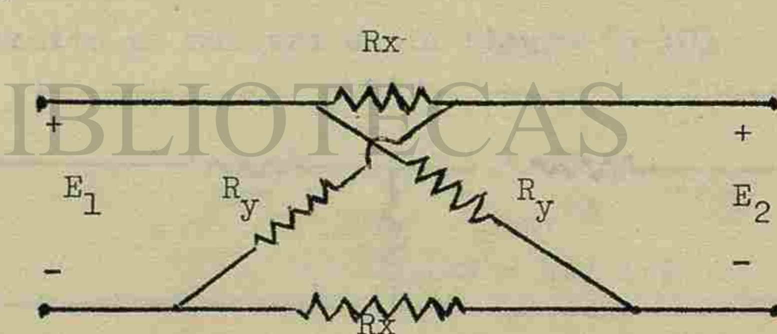


FIGURA 5.8

La red simétrica mostrada en la figura 5-8 es la red de cuatro-terminales más común. Tiene solo cuatro de las seis posibles resistencias, las otras dos estarían entre los pares de entrada y de salida. Aún más, las resistencias son iguales en pares y por lo tanto hay solo dos parámetros independientes en una red simétrica. Cuando no hay conexiones externas entre las terminales de entrada y salida la red puede ser reemplazada por una red T-o (π) de tres terminales.

Las constantes de las redes T (π) generalmente son obtenidas dibujando la red en la forma del circuito puente de la figura (5-9).

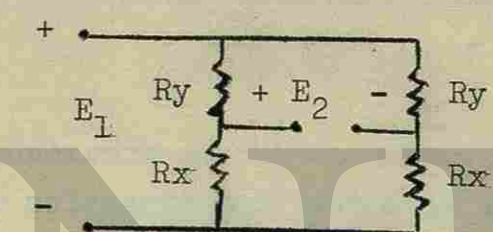


FIGURA 5.9

EL CIRCUITO T EQUIVALENTE.

Los parámetros r pueden ser obtenidos por inspección del circuito puente, estos son:

$$r_{11} = r_{22} = \frac{1}{2} \; (R\,x + R_y)$$

$$r_{12} = \frac{1}{2} \; (R_y - R_x)$$

El circuito T equivalente puede ser obtenido directamente de estos parámetros.

El circuito se muestra en la figura (5-10)

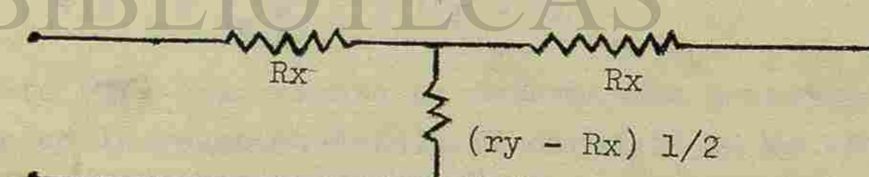


FIGURA 5.10

Los valores de las resistencias son:

$$R_1 = R_2 = r_{11} - r_{12} = R_x$$

$$R_3 = r_{12} = \frac{1}{2} \ (R_y - R_x)$$

Si R_x es más grande que R_y el voltaje de salida en la figura (5-11) es negativo.

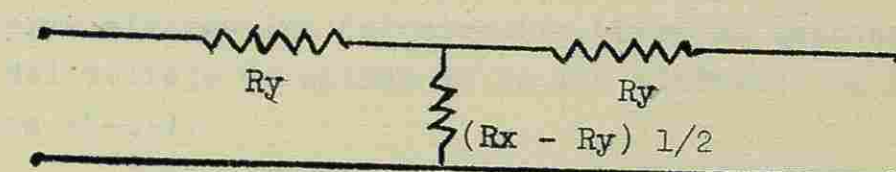


FIGURA 5.11

El efecto correspondiente puede ser logrado en el circuito T de la figura (5-10), solamente por medio de una resistencia paralelo es más general que el T ya que tiene la opción de cualquier polaridad de voltaje de salida. Si la polaridad del voltaje de salida no es importante el circuito equivalente alternativo de la figura (5-11 puede ser usado. La resistencia negativa se elimina por el cambio de un cambio en la polaridad del voltaje de salida.

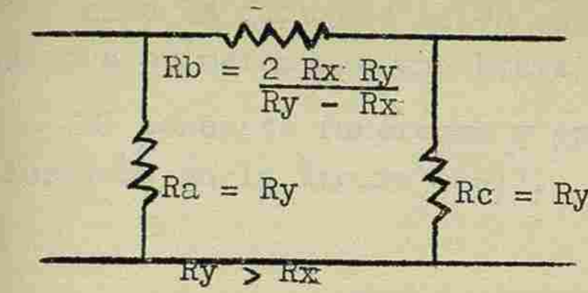
EL CIRCUITO (π) EQUIVALENTE.

Los parámetros g para el circuito pueden ser obtenidos de la figura (5-8) éstos son:

$$g_{11} = J_{22} = \frac{R_x + R_y}{2\ R_x\ R_y} = \frac{1}{2}\ (g_x + g_y) \qquad (5\text{-}23\ a)$$

$$g_{12} = \frac{R_x - R_y}{2\ R_x\ R_y} = \frac{1}{2}\ (G_y - G_x) \qquad (5\text{-}23\ b)$$

El circuito (π) equivalente es determinado directamente de los valores g en la ecuación (5-23). El circuito se muestra en la figura 5-12.



$$R_a = R_c = \frac{1}{G_{11} + G_{12}} = R_y$$

$$Rb = \frac{1}{G_{12}} = \frac{2\ Rx\ Ry}{R_y - R_x}$$

FIGURA 5.12

Una forma alternativa del circuito obtenido cambiando la -- polaridad del voltaje de salida de la red simétrica se muestra - en la figura (5-13).

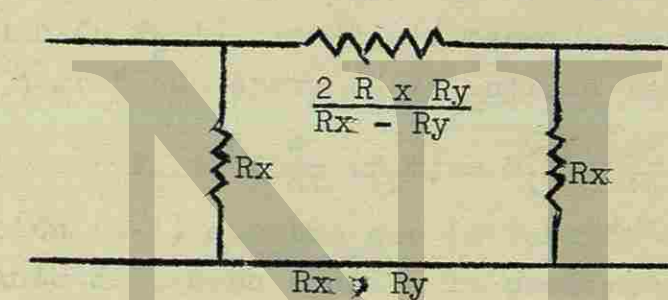


FIGURA 5.13

Como con el circuito T una resistencia negativa puede ser - quitada a expensas de cambiar la polaridad en el voltaje de sali da.

DIFERENCIACION DE FUNCIONES

Como la diferenciación es menos difícil que la integración, daremos primeramente una breve explicación de ésta.

El concepto funcional y operacional de diferenciación está ilustrado en la figura (6-1).

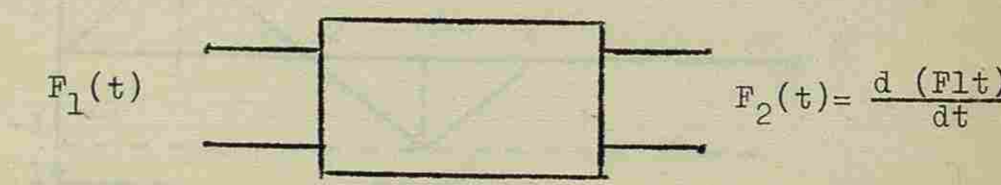


FIGURA 6.1

La entrada en la "caja negra" es la función f_1 (t) y la salida es la función $f_2(t)$. La diferenciación está representada por la "caja negra" que opera en la entrada tal como:

$$F_2(t) = \frac{d}{dt}\ (f_1 t) = F_1(t) \qquad (6\text{-}1)$$

La ecuación (6-1) muestra que la función de salida $f_2(t)$ es en cada instante de tiempo igual a la pendiente, o la derivada de la función de entrada $f_1(t)$. Si $f_1(t)$, es una línea recta la pendiente es una constante. Si $f_1(t)$ es una vurva más general, la pendiente en cualquier instante es la pendiente de la tangente dibujada en la curva. Note que la derivada de un punto no está definida. La naturaleza de la curva sobre cualquier lado del punto determina la derivada; la curva puede ser conocida antes que la derivada del punto pueda obtenerse.

Diferenciación Gráfica. Una curva típica y su derivada se muestran en la figura (6-2).

A la izquierda del origen, la curva original f (t) y su derivada f' (t) son 0. Entra t = 0 = 1 la curva original sube con una pendiente constante de (= 1). La derivada de la curva tiene por lo tanto un valor constante de (+ 1). Entre t = 1 y t = 3 la curva original cae con una pendiente de (- 1) y por la parte correspondiente de la derivada de la curva tiene también un valor de (- 1). Del punto t = 3 a t = 4 la curva original nuevamente -

tiene una pendiente de (+ 1) y enconces la derivada de la curva tiene nuevamente un valor de (+ 1). Hacia la derecha de $t = 4$ la curva original y su derivada son 0.

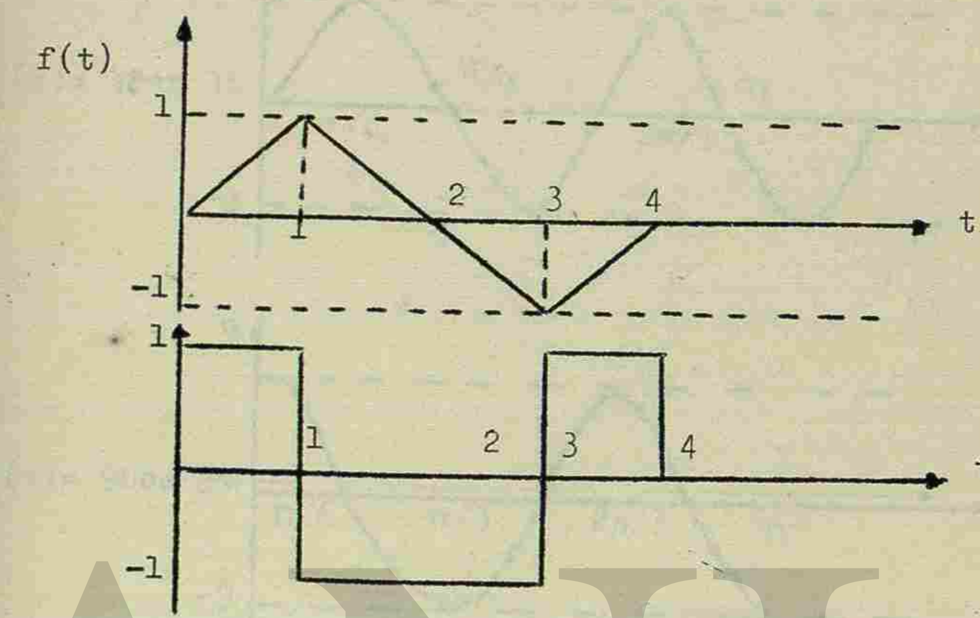


FIGURA 6.2

NOTE que una función puede ser 0 en un punto y no obstante tener una derivada. Por ejemplo en el punto $t = 2$ en la figura 6-2 la curva f (t) es 0, pero su derivada tiene un valor de (-1).

Diferenciación Analítica. Si una función original puede ser ex-presada como una expresión matemática simple, la función derivada puede ser generalmente encontrada en tablas comunes de derivadas. Un ejemplo es la función:

$$f_1 (t) = 3 \text{ sen } (3t)$$

Las tablas de derivadas muestran que:

$$d \text{ (sen } x) = \text{Cos } x \, dx$$

Aplicando esta fórmula a la función del ejemplo, la derivada viene dada por:

$$f_2 (t) = \frac{f_1 (t)}{dt} = 9 \text{ Cos } 3 \, t \qquad (6\text{-}1)$$

Las funciones f_1 (t) y f_2 (t) se muestran en la figura (6-3)

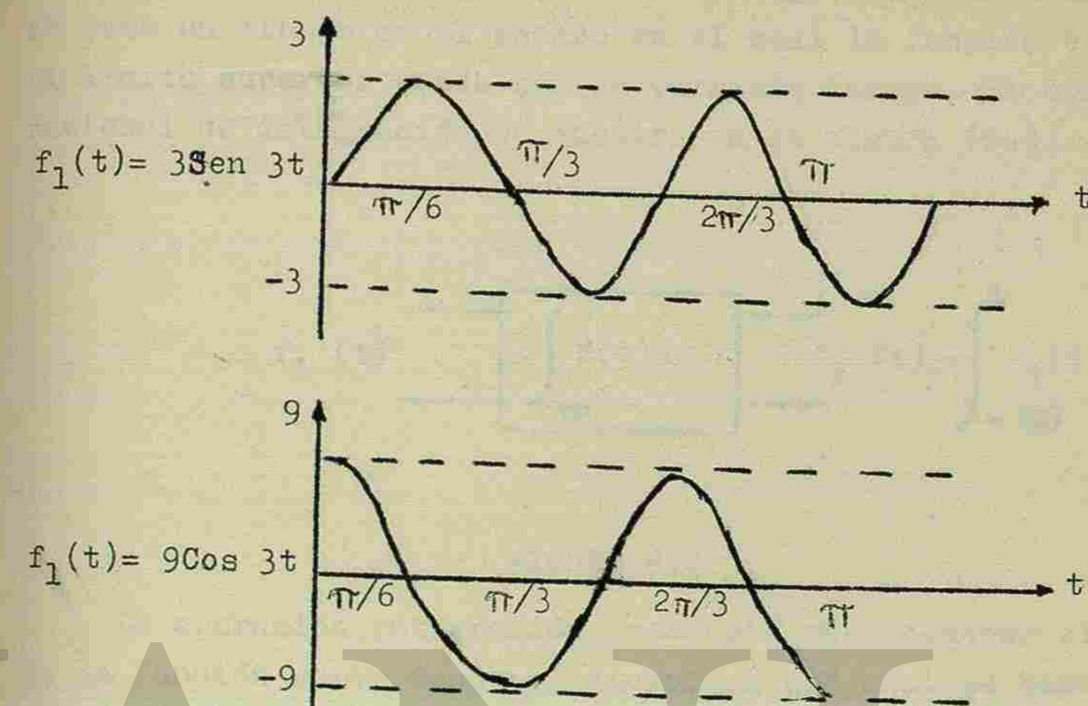


FIGURA 6.3

De t = 0 a t = (∞) la derivada de la curva puede también - ser obtenida dibujando una tangente a cada punto sobre la curva- original y entonces dibujar las pendientes de las tangentes. Entonces en t = (π)/6 la pendiente de la tangente es 0 y el valor- correspondiente de la derivada de la curva es 0, en t = (π)/4 la pendiente de la tangente es negativa y tiene un valor de aproximadamente (-6.3). La ecuación (6-1) muestra un valor más exacto.

$$f2\ (t = \pi/4) = 9\ \text{Cos}\ \frac{3\pi}{4} = -\ 9\ (.707) = -\ 6.36$$

En general puede decirse que en la operación de encontrar - una derivada, es mejor pensar en el procedimiento gráfico como - el método básico y considerar el procedimiento analítico, como - un método complementario, aunque puede hacerse de cualquiera de- las dos maneras.

<u>Integración de una Función</u>.

En este punto nos referimos únicamente a las integrales definidas. Esta integral representa el área bajo la curva, entre -

dos límites especificados por el integral. Generalmente el límite inferior de la integral suele ser $(-\infty)$, que puede interpretarse como un tiempo en el pasado en el cual la función es 0 cero; el límite superior puede ser la variable tiempo. El concepto operacional de integración se muestra en la figura (6-4)

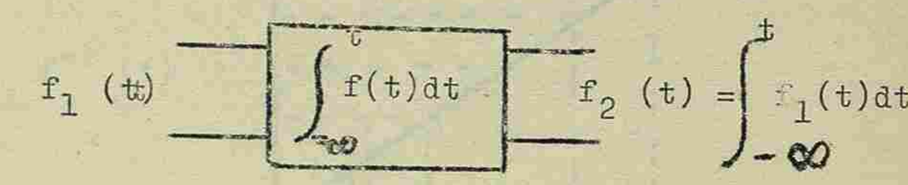


FIGURA 6.4

La operación integración, consiste en encontrar el área bajo la función curva desde el tiempo en que empieza hasta el tiempo final el cual es siempre una variable. Como el tiempo cambia el área cambia, en cualquier instante dado el valor de la área es la función de salida f2 (t). Expresada matemáticamente la integral definida de una función es:

$$f_2 (t) = \int_{-\infty}^{t} f_1 (t)\, dt \qquad (6\text{-}2)$$

La ecuación (6-2) muestra que el valor de la función $f_2(t)$ en algún tiempo (t) es el área bajo la curva $f_1(t)$ desde el comienzo de tiempo hasta el tiempo presente t.

En cualquier problema actual es posible encontrar un tiempo antes que la función $f_1(t)$ sea cero. Frecuentemente este punto es $t = 0$, pero lo hermos más general refiriéndonos a $t = -\infty$, entonces.

$$f_2 (t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(t)\, dt \qquad (6\text{-}2)$$

<u>Integración Gráfica</u>.

Un ejemplo de una función que puede ser integrada fácilmente se muestra en la figura (6-5).

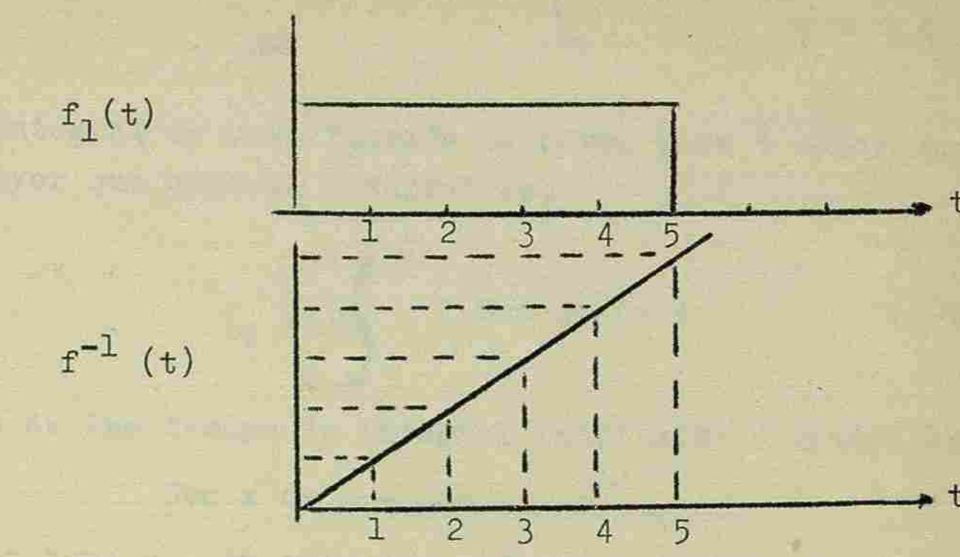


FIGURA 6.5

La función es cero hasta t = 0, el área acumulada a la iz-- quiera de t = 0 es cero. Por lo cual la integral es cero. En --- t = 1 se acumula un área de la unidad, entonces el valor de la - integral de la curva en este punto es 1. En t = 2 el área total- acumulada es 2, por lo tanto el valor de la integral es 2. En -- t = 3 la integral es igual a 3; en t = 4 la integral es igual a- 4 y así sucesivamente. A la derecha de t = 5 la integral mantie- ne un valor de 5.

Si la curva que se va a integrar es arbitraria, esto puede- hacerse aproximadamente por una serie de rectángulos de diferen- tes tamaños, la integral puede obtenerse sumando las áreas de -- los rectángulos.

Integración Analítica.

Si la forma analítica de la función original es conocida, - la integral de una función puede ser obtenida usando las tablas- de integración.

El uso de las tablas de integrales implica usualmente inte- grales indefinidas. Una integral indefinida es idéntica a la e-- cuación (6-2) excepto en que se le suma una constante arbitraria

El valor o área bajo una curva es simplemente el valor de - la integral indefinida del límite superior menos el valor del lí mite inferior. Como un ejemplo, consideremos la función:

$$f_1(t)\begin{cases} 3 \text{ Sen } 3t. & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

La integral de esta función es cero, para t menor que cero; para t mayor que cero la integral es:

$$f_2(t)=\int_0^t 3 \text{ Sen } 3t \ (dt) \qquad (6\text{-}4)$$

Por medio de las tablas de integral indefinida encontramos que:

$$\text{Sen } x \, dx = - \text{Cos } x + c$$

Si se sustituye $x = 3t$ entonces podemos calcular el integral de la ecuación (6-4) como sigue:

$$f_2(t) = \frac{(-3 \cos 3t)}{1} - \frac{(-3 \text{ Cos } 0)}{1}$$

$$f_2(t) = 3_1 - 3 \text{ Cos } 3 t$$

La función 3 sen 3t y su integral estan graficadas en la figura-(6-6).

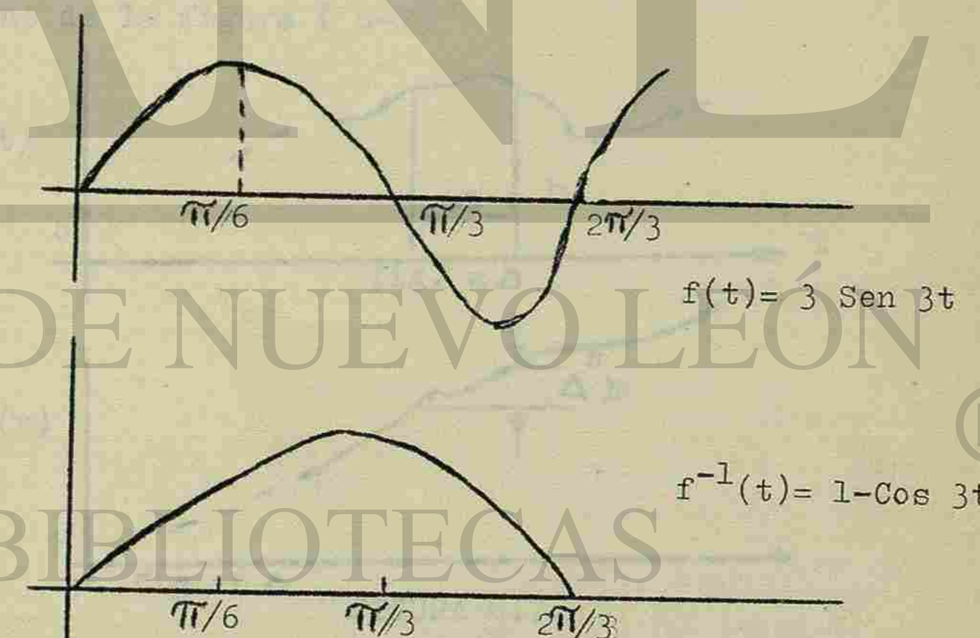


FIGURA 6.6

Desde $t = 0$ hasta $t = (\pi)/3$ la función es positiva. inicialmente a la función tiene valores pequeños y cada paso de integra ción sucesivo contribuye con una área pequeña; entonces la integral de la curva sube despacio. En las cercanías de $t = \pi/6$ la función alcanza su máximo valor y la integral de la curva sube a su promedio máximo. Este promedio decrece si la función decrece, hasta el máximo valor de la integral es alcanzado en $t = \pi/3$.

Después de este punto la función de un valor negativo, y el área negativa es restada del área positiva, hasta que el área neta acumulada es cero en $t = 2\,(\pi)/3$.

Una integración aproximada de la figura (6-6) puede ser obtenida contando los cuadros bajo esta curva.

Relación entre la integración y diferenciación.

La diferenciación e integración son funciones inversas; tal y como la división y la multiplicación. Esto quiere decir que si tomamos una curva y la integramos, y después la diferenciamos, el resultado que obtendremos será la curva original, similarmente si primero la derivamos y luego integramos el resultado volvemos a la curva original.

Estos resultados pueden ser encontrados por un estudio de las curvas de la figura (6-7)

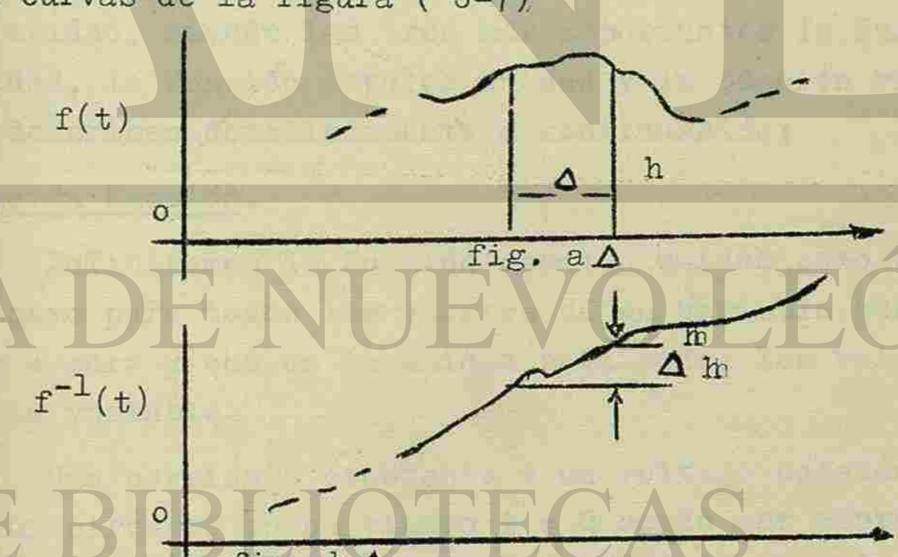


FIGURA 6.7

La figura (b) es la integral de la curva (a), en el intervalo del tiempo (Δ). El incremento de área obtenido por la curva (a) es (hΔ). Este valor es sumado a la altura de la integral de la curva en el fin de intervalo (Δ). Ahora veamos el proceso in verso y obtenemos la pendiente del integral de la curva. Sobre - el intervalo (Δ) la pendiente está dada por la elevación en la - curva, sobre el camino recorrido correspondiente, esto es:

$$\frac{h\Delta}{\Delta} = h$$

que es el valor de la curva original.

La derivada de la curva es la inversa de la integral de la- curva y viceversa.

Funciones de Singularidad.

Se ha hablado de la aplicación repentina de una fuente de - energía queriendo expresar con estas palabras su aplicación en - un tiempo cero. Por tanto el funcionamiento de un interruptor en serie con una batería es equivalente a una función excitatriz -- que es cero hasta el instante en que se cierra el interruptor y- que desde ese instante es igual a la tensión de la batería. La - función excitatriz tiene una ruptura o discontinuidad en el instante en que se cierra el interruptor.

Ciertas funciones excitatrices especiales que son discontinuas o tienen derivadas discontinuas, se llaman Funciones de Singularidad, siendo las tres más importantes la función escalón -- unidad, la función impulso unidad y la función rampa, las cuales se describen detalladamente a continuación:

Función Escalón.

Definiremos la función escalón unidad como una función que- es cero para todos los valores de su variable que sean inferio-- res a cero y que es la unidad para todos los valores positivos - de la variable.

Una corriente constante o un voltaje constante interrumpido en un circuito en un tiempo $t = 0$ puede ser representado por una función escalón. La función escalón unitaria se representa por - el símbolo ($u_{-1}(t)$ y esta definido matemáticamente por:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t \quad 0 \\ \\ 1 \text{ para } t \quad 0 \end{cases}$$

Una fuente de voltaje conectada en un circuito en t = 0 puede ser representada por medio de una función escalón unitaria. - Consideremos la fuente mostrada en la figura (6-8). Podemos decir que el switch esta cerrado en t= 0. El voltaje, que es cero antes de t = 0 es igual a E u-1 (t) para t mayor que cero, puede ser expresado como:

La figura 6-9:

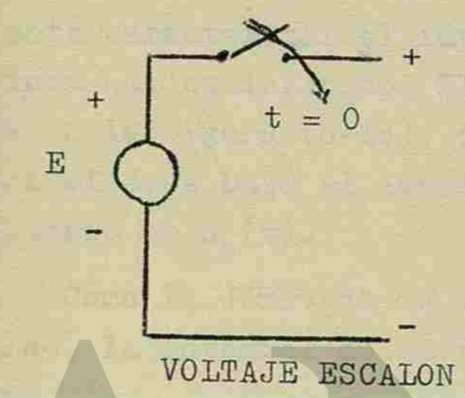


FIGURA 6.8

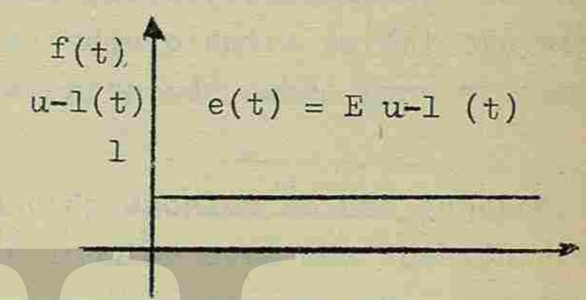


FIGURA 6.9

Una fuente de corriente figura (6-10) interrumpida en un -- circuito en t = 0 puede ser también expresada en términos de una función escalón unitario.

Antes de t = 0 el switch esta cerrado y la corriente de la fuente pasa a través del circuito exterior. La corriente i (t), que es cero antes de t = 0 a igual a I u-1 (t) para t mayor que cero, puede ser expresada analíticamente como:

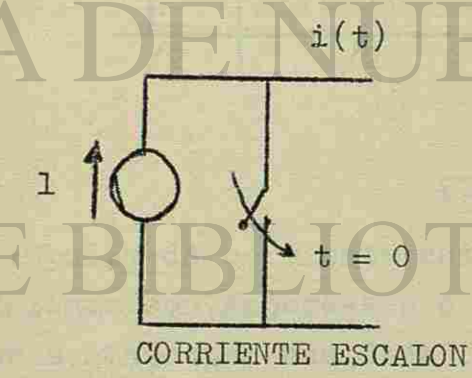


FIGURA 6.10

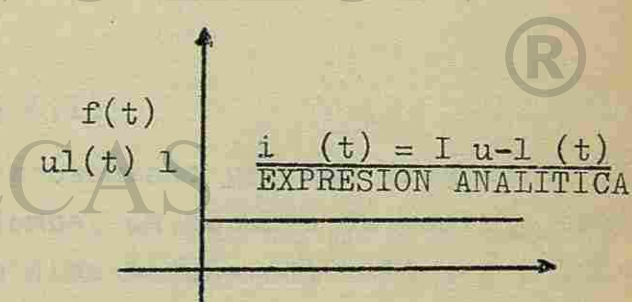
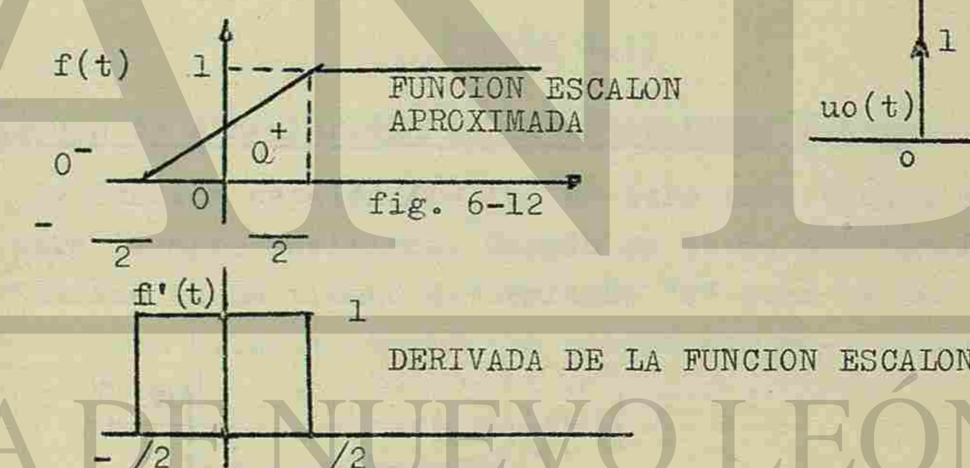


FIGURA 6.11

<u>Función Impulso</u>.

La derivada de la función escalón unitaria es llamada la -- función impulso. La figura (6-12) muestra un escalón dibujado sobre una escala entre 0-y 0+. La derivada de la figura (6-13) es- cero en cualquier parte excepto entre 0- y 0+. Si clasificamos - este intervalo como (Δ), la derivada será $1/_{\Delta}$. como delta se aproxima a cero el valor de la derivada tiene a infinito. El área- bajo el impulso puede ser obtenida de la figura (6-13). Es conveniente caracterizar el impulso por su área baja antes que por su altura que es infinito. El símbolo gráfico del impulso se mues-- tra en la figura (6-14), donde el número entre paréntesis significa el área bajo el impulso. La anotación usada para el impulso unitario es $u_o(t)$.

Como la derivada de una función escalón es una función im-- pulso, la integral de la función impulso será una función esca-- lón.



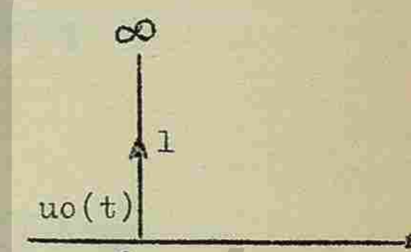


Fig. 6-14

FIGURA 6.13

Un impulso de corriente está representado por una área cuyas dimensiones son Ampere-seg o coulombs; un impulso de voltaje está representado por una área cuyas dimensiones son volt-seg o líneas de flujo. Entonces por definición:

$$u_o\ (t) = \frac{d}{dt}\ u\text{-}1\ (t)$$

La respuesta de una red a un impulso unitario es una función más primitiva que la respuesta de una función escalón unitario.

Además las funciones singularidad pueden definirse como las derivadas de la función impulso unitario.

Función Rampa.

Como los elementos de un circuito pueden producir integrales y derivadas estamos interesados en las integrales y derivadas de la función escalón. La integral de la función escalón con un tamaño A es una función rampa teniendo un valor de A en t = 1 e igualmente una pendiente de A.

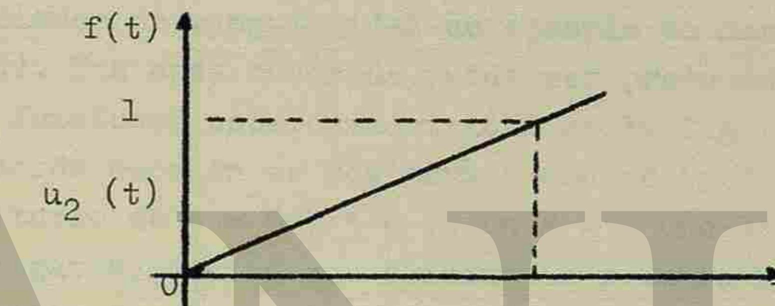


FIGURA 6.15

Funciones de singularidad en un determinado tiempo.

La función escalón $\mu_{-1}(t)$ es cero para tiempo negativos y uno para tiempos positivos. Cuando se tiene una función escalón que aparece en un tiempo determinado "a" como la que se muestra en la figura 6.16 la función la escribimos $\mu_{-1}(t-a)$

Fig. (a)

Integrando esta función

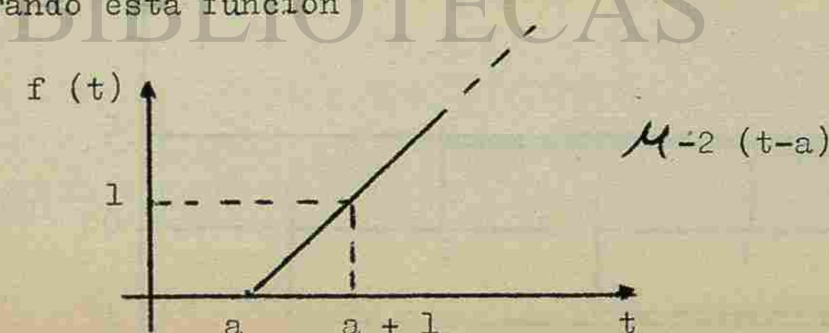


fig.(b)

Derivando la función escalón

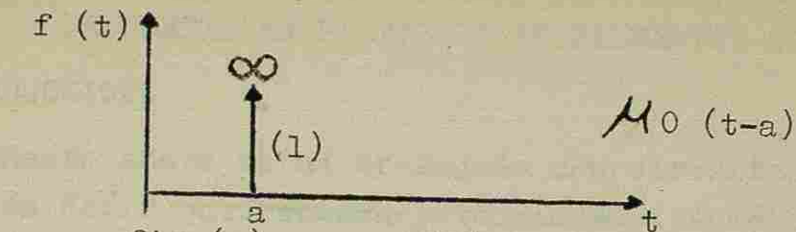


fig.(c) FIGURA 6.16

Solución de Curvas periódicas utilizando funciones de singularidad.

Nosotros podemos expresar muchas curvas periódicas en terminos - de funciones de singularidad un ejemplo es mostrado en la figura (6-17 a). Una onda cuadrada puede ser producida por una sumatoria de funciones escalón mostradas en la figura (6-17 b). La primer función escalón es positiva y ocurre en t = 0, dando un valor unitario de t = 0 a t = 1; en t = 1 una segunda, función escalón negativo ocurre que elimina la primera función escalón dando un valor de cero entre t = 1 a t = 2; en t = 2 una tercer función escalón positivo ocurre para dar un valor unitario entre -- t = 2 y t = 3. En t = 3 una cuarta función escalón negativa ocurre que elimina la tercera función escalón dando un valor de cero en t = 3 y t = 4.

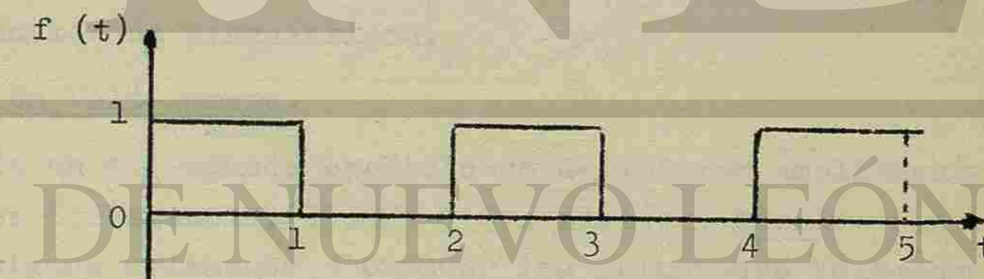


figura (a)

FIGURA 6.17

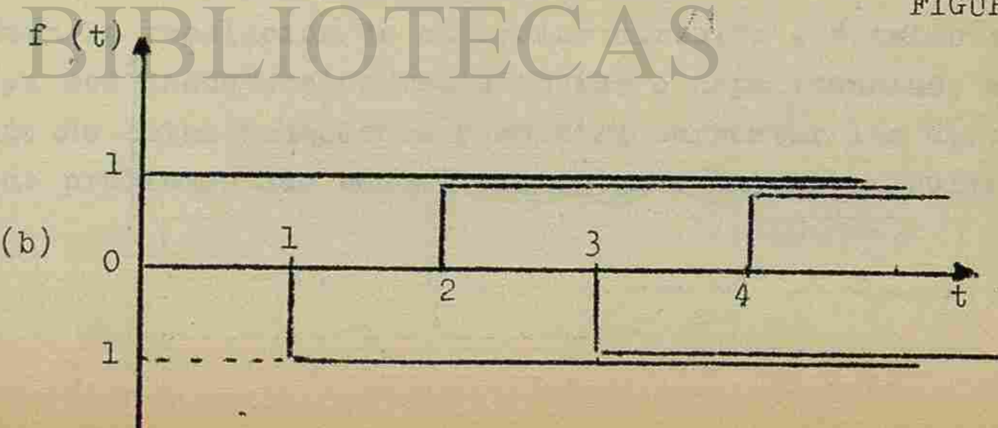


fig. (b)

CAPITULO VII

RESPUESTA EN EL TIEMPO DE ELEMENTOS SIMPLES

INTRODUCCION.

Hasta ahora se ha trabajado con circuitos puramente resistivos, es decir que reciben potencia disipándola en forma de calor también se han mencionado las leyes y teoremas principales bajo los cuales se rigen estos circuitos, así como sus aplicaciones.- Dado lo anterior, estamos ahora en condiciones de introducir dos nuevos elementos simples que estan muy relacionados en circuitos eléctricos cuyas características de voltajes-corrientes, depende de un voltaje o de una corriente variable; esos elementos son la bobina y el condensador.

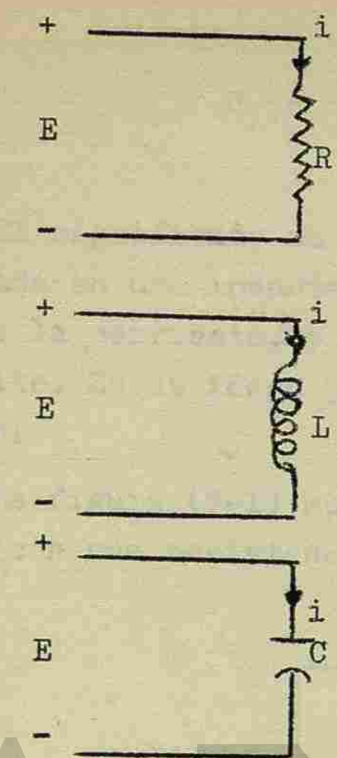
Estos elementos a diferencia de las resistencias son capaces de almacenar energía, por lo cual su comportamiento introduce integrales y derivadas en las ecuaciones de redes. Una red general está descrita por una ecuación diferencial y la solución es una función del tiempo.

Para el caso particular de elementos simples las redes desempeñan operaciones simples de integración, diferenciación y multiplicación por una constante. Entonces si la excitamos por medio de una función de singularidad, la respuesta será también una función de singularidad.

Relación Volt-Ampere.

Ya en el segundo capítulo se definieron ampliamente los elementos: Resistencia, Bobina y Condensador; por lo cual ahora nos concretamos solamente a exponer las relaciones Volt-Ampere existentes para cada uno de ellos. A continuación se muestran estas relaciones:

Para la resolución de cualquier circuito eléctrico que contenga ya sea inductancias resistencias o capacitancias, el conocimiento de estas ecuaciones permitirá enfrentar los diferentes tipos de problemas que puedan presentarse en tal circuito.



$e = Ri;\ i = G\,e \quad G = \text{conductancia}) (\mho)$

$$G = \frac{1}{R}$$

$$e = L\frac{di}{dt}\ ;\quad i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e\,dt$$

$$e = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i\,d\,t;\quad i = c\,\frac{de}{dt}$$

Energía Inicial Almacenada.

La potencia instantánea esta dada por el producto de voltaje y corriente. La energía W_L recibida por la inductancia se almacena en el campo magnético que rodea a la bobina y viene expresado por la integral de la potencia en el intervalo de tiempo correspondiente o sea;

$$W = \int_{t1}^{t2} e.i\ dt \qquad (7\text{-}1)$$

En donde T_1 y T_2 es el comienzo y el final del intervalo, donde la energía va a ser medida, y W es la energía en Watts- --Seg. o Joules. Entonces la energía almacenada en una inductancia viene dado por la ecuación (7-2) donde T_1 de la ecuación anterior se toma como $(-\infty)$. De aquí que la energía almacenada en una inductancia sea:

$$W_L = \int_{-\infty}^{T} e.i\ dt = \int_{-\infty}^{T} L\,\frac{di}{dt}\,.\,i\ d\,t \qquad (7\text{-}2)$$

Es posible el cambio de variable en la ecuación de tiempo a corriente. Si la corriente es (0) cero en $(-\infty)$ y en tiempo t- tiene un valor de i en la integral como se muestra:

$$W_L = \int_0^I L\,i\,di = \frac{1}{2} L\,i^2 \qquad (7\text{-}3)$$

El significado de esta ecuación (7-3) es que la energía almacenada en una inductancia depende solamente del valor instantáneo de la corriente, y no sobre lo sucedido anteriormente en el circuito. Estas ideas pueden ilustrarse mediante un sencillo ejemplo:

La figura (7-1) muestra una inductancia de tres henrios en serie con una resistencia de 0.1 Ohms.

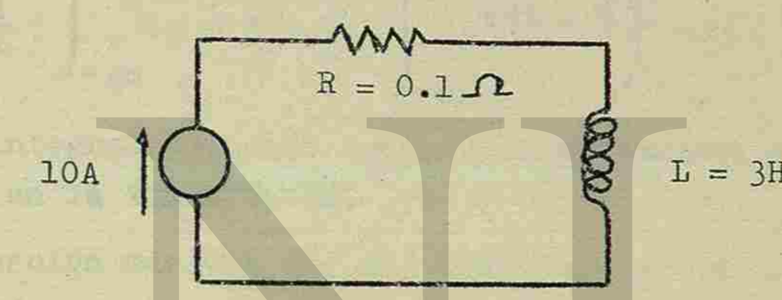


FIGURA 7.1

La energía almacenada en la bobina será:

$$W_1 \frac{1}{2} L\,i^2 = \frac{1}{2}\,(3)\quad (10)^2$$

$$W1 = \frac{300}{2} = 150 \text{ joules}$$

y la potencia disipada en la resistencia será:

$$Pot_R = I^2 R = (10)^2\ (0.1)$$

$$Pot_R = 10 \text{ Watts}$$

Una situación semejante sucede con el condensador, la energía almacenada en un capacitor está dado por el integral.

$$W_c = \int_{-\infty}^{t} e.i\ dt = \int_{-\infty}^{t} e\ .\ c\,\frac{de}{dt}\,dt$$

Si el voltaje en t = - (∞) se hace 0 y el voltaje en t = t es E- la integral queda de la siguiente manera:

$$W_c = \int_0^E C.E\ de = \frac{1}{2}\ C\ E^2$$

Entonces la energía en el capacitor depende de solamente del voltaje a través de él en el instante en que se analiza.

Fuentes equivalentes para energía inicial almacenada.

El elemento inductancia está completamente descrito por la- ecuación Volt-Ampere (7-4)

$$I_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} e\ d\ t = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0+} edt + \frac{1}{L}\int_{0+}^{t} edt \qquad (7\text{-}4)$$

Esta integral dividida entre la inductancia, es la corriente inicial en la inductancia.

La ecuación muestra que una inductancia con una corriente - inicial puede ser reemplazada por una inductancia sin corriente- inicial, en paralelo con una fuente de corriente, con un valor - igual a la corriente inicial en la inductancia. Una inductancia- con una corriente inicial se muestra en la figura (7-2).

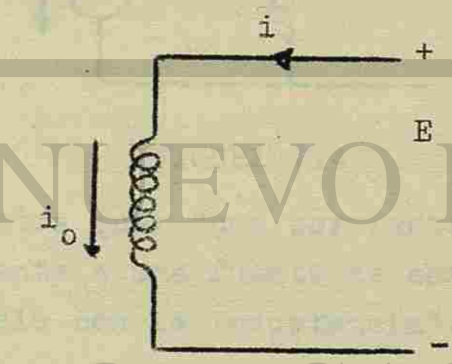


FIGURA 7.2

y su circuito equivalente con la misma relación Volt-Ampere para t = 0 es:

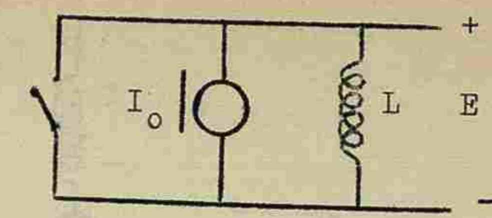


FIGURA 7.3

El switch está cerrado antes de $t = 0$ y abierto en $t = 0$, antes de $t = 0$ el voltaje e es 0 (cero) y la corriente no puede formarse en la bobina. Cuando el switch está abierto la corriente en terminales es:

$$i = \frac{1}{L} \int_{0+}^{t} e \, d t + Io \qquad (7\text{-}5)$$

Entonces esta ecuación es idéntica a la ecuación anterior por lo cual queda verificada la identidad entre los dos circuitos de las figuras (7-2) y (7-3).

La corriente constante y el switch de la figura (7-3) son equivalentes a la fuente de corriente escalón mostrada en la figura (7-4).

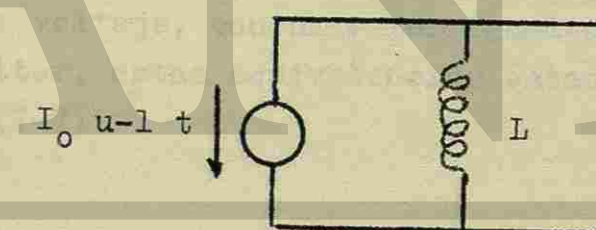


FIGURA 7.4

Entonces se demuestra que: "una corriente inicial en una inductancia es equivalente a una fuente de corriente escalón del mismo valor en paralelo con la inductancia".

Un circuito equivalente final para la corriente inicial en la inductancia se muestra en la figura (7-5)

Este circuito se obtiene por la aplicación de Thevenin al circuito de la figura (7-4).

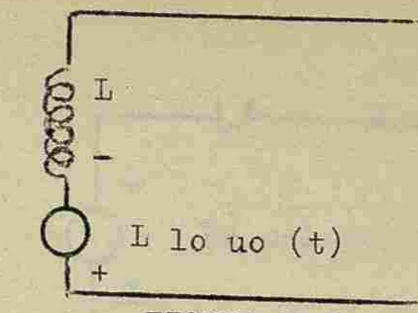


FIGURA 7.5

Por último para el elemento capacitancia la ecuación volt - ampere que la describe completamente es:

$$e_c = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{0+} i\,dt + \frac{1}{c}\int_{0+}^{t} i\,dt \qquad (7\text{-}6)$$

Esta integral dividida por C es el voltaje sobre el capacitor en T = 0.

La integral desde 0+ hasta t representa la ecuación volt- - ampere de un capacitor que es descargado en t = 0.

La ecuación (7-6) muestra que un capacitor con un voltaje inicial puede ser reemplazado por una capacitancia en serie con una - fuente de voltaje, con un valor igual al voltaje inicial sobre - el capacitor, estas equivalencias estan mostradas en la figura - (7-6) y (7-7).

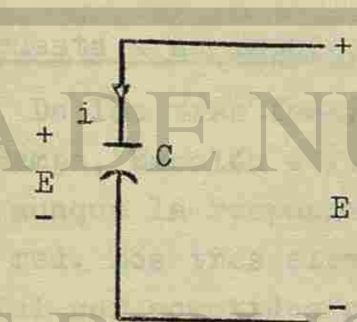


FIGURA 7.6

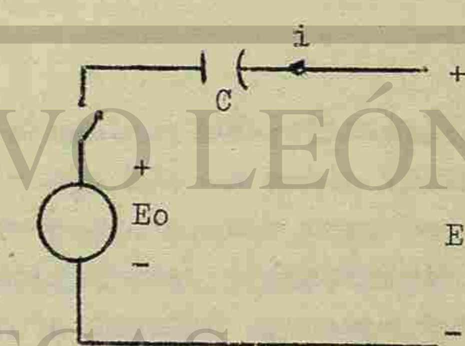


FIGURA 7.7

La fuente de voltaje constante y el switch de la figura --- (7-7) son equivalentes a una fuente de voltaje escalón como la - mostrada en la figura (7-8).

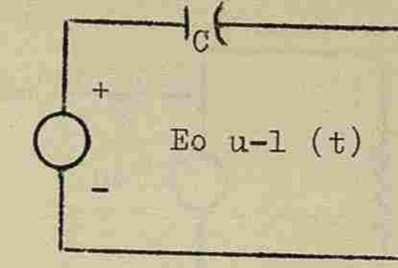


FIGURA 7.8

De los cuales tenemos que: "un voltaje inicial sobre un capacitor es equivalente a una fuente de voltaje escalón del mismo valor en serie con el capacitor descargado".

Un último circuito equivalente para el voltaje inicial en un capacitor está mostrado en la figura (7-9).

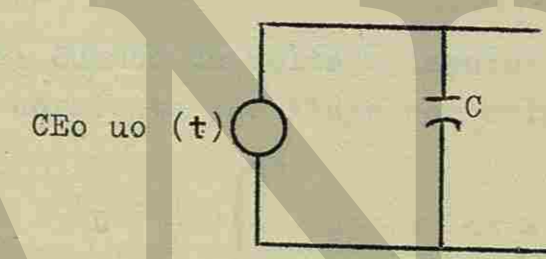


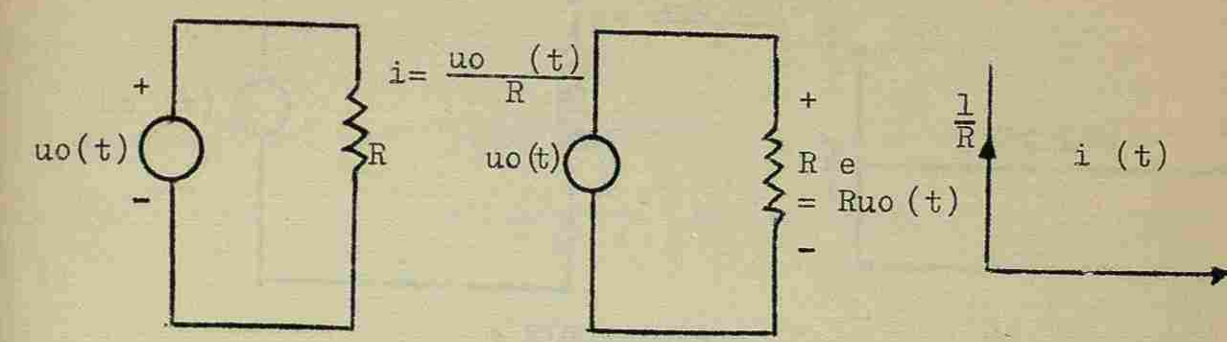
FIGURA 7.9

Este se obtiene por la aplicación del teorema de Norton al circuito de la figura (7-8).

<u>Respuesta a un impulso</u>.

De las tres funciones de singularidad principales que son la Rampa, Escalón e impulso, la que más es usada es la del impulso, aunque la respuesta escalón puede usarse para caracterizar una red. Los tres elementos Resistencia, Capacitancia e Inductancia al ser sometidos a una fuente impulso se comportan de la siguiente manera:

Resistencia: Es importante recordar que la corriente impulso es una carga (Q) que fluye durante un tiempo corto y un voltaje impulso es un flujo escalonado (λ) que se agrega asimismo en un circuito en un tiempo corto. La resistencia es un elemento que al aplicarle una corriente impulso la cambia a un voltaje impulso y viceversa, pero sin cambiar la función tiempo, por ejemplo:



Las dos figuras anteriores muestran que si se aplica un estímulo de corriente impulso e (t) = Qu_o (t) la respuesta es el -voltaje $e_R(t) = QRu_o(t)$; ahora bien, si el estímulo aplicado es el voltaje impulso e (t) = $(\lambda)u_o(t)$ la respuesta es la corriente i_R (t) = $\frac{\lambda}{R} u_o$ (t).

Inductancia; Cuando un voltaje impulso es aplicado a una induc--tancia, la corriente que fluye por ella esta expresada por:

$$I_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_o\,(t)\;dt = \frac{\lambda}{L}\;u\text{-}1\;(t)$$

Esta I_L es, para un valor de voltaje impulso, igual a:

$$e\;(t) = \lambda\,u_o\;(t)$$

Si a la inductancia se le aplica una corriente impulso de -un valor igual a:

$$i\;(t) = Q\;u_o\;(t)$$

La respuesta en voltaje será:

$$e(t) = L\,\frac{[d\;Q\;uo\;(t)]}{dt} = L\;Q\;ul\;(t)$$

Lo anterior nos indica que al aplicar un voltaje impulso a una -inductancia ésta nos dará una respuesta "escalón" como se mues--tra en la figura (7-10)

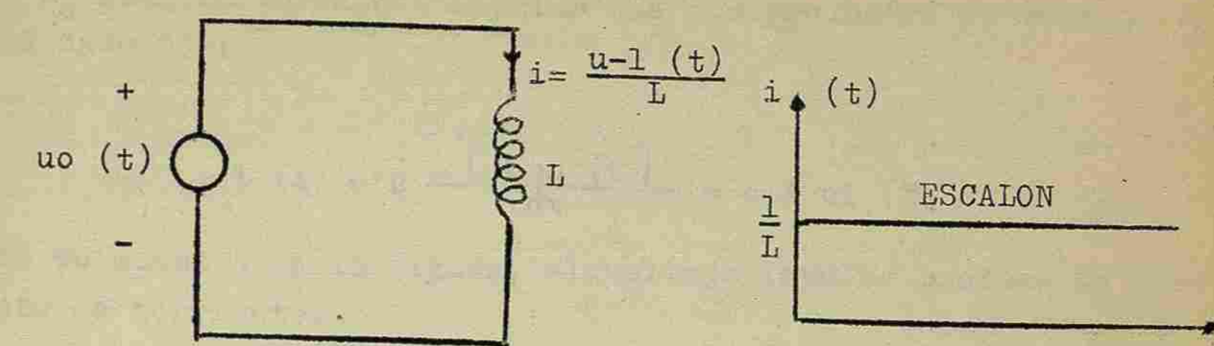


FIGURA 7.10

Igualmente si se le aplica una corriente impulso a la inductancia ésta nos producirá una respuesta "doblete" de voltaje como se muestra en la figura (7-11).

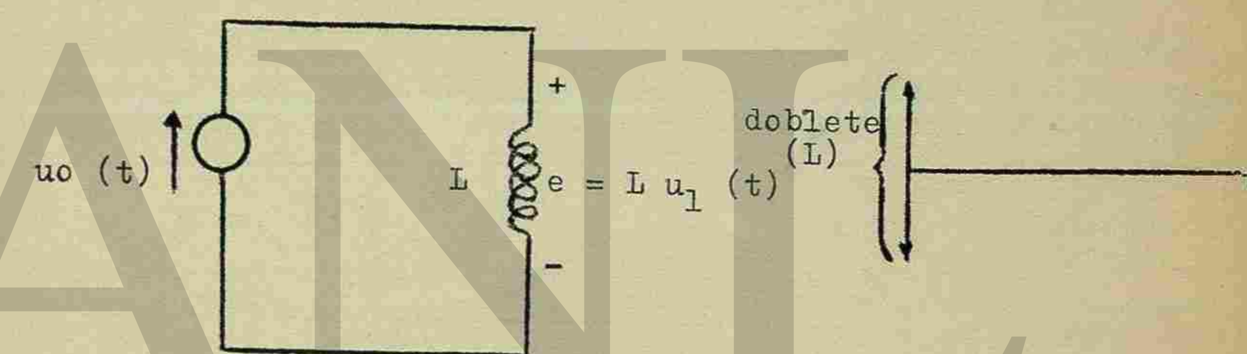


FIGURA 7.11

Capacitancia: Cuando una corriente impulso $e(t) = Qu_0(t)$ es --- aplicada a un capacitor el valor de la respuesta obtenida en forma de voltaje será igual a:

$$e(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} Quo(t)\,dt = \frac{Q}{c}\,u\text{-}1(t)$$

Como se muestra en la figura (7-12).

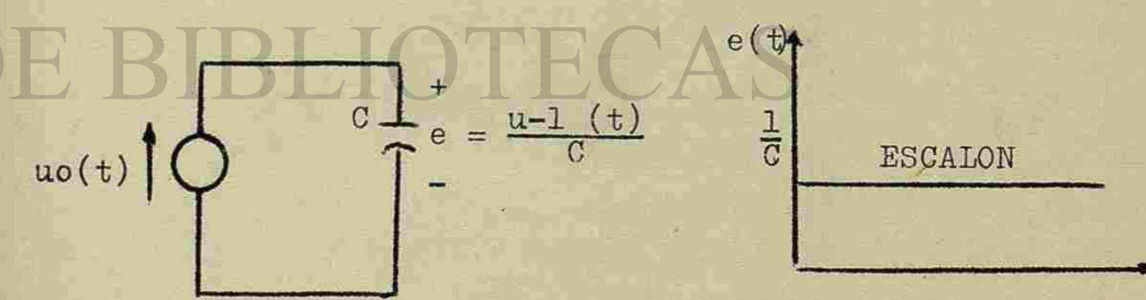


FIGURA 7.12

Cuando es aplicado a un capacitor un voltaje impulso $e(t) = (\lambda)\, u_0(t)$, la corriente impulso que nos producirá el voltaje -- está dado por:

$$i(t) = c\,\frac{d\left[\lambda u_0(t)\right]}{dt} = c\,\lambda\, u_1(t)$$

Como se muestra en la figura, el voltaje impulso produce un do-- blete de corriente.

CAPITULO VIII

RESPUESTA DE LOS CIRCUITOS RL-RC

INTRODUCCION.

Los circuitos eléctricos son descritos por ecuaciones diferenciales lineales: por esta razón, pueden usarse los conceptos de Estímulo y Respuesta.

Como ya se sabe, para excitar y producir una respuesta en un circuito se necesita una fuente de energía, esta fuente puede ser externa, como por ejemplo una batería que suministre energía a un circuito eléctrico; o bien puede ser interna, lográndose esto por medio de elementos que son capaces de almacenar energía como los condensadores y las inductancias en los circuitos eléctricos.

Siempre que la energía almacenada en un circuito es liberada, ésta responde de una forma tal que depende de la configuración y de los parámetros del circuito. Debido a que la respuesta a la energía almacenada es una característica propia, se denomina "Respuesta Natural" del circuito. Para liberar la energía almacenada en los elementos del circuito se utiliza un interruptor este interruptor puede también conectar fuentes externas de energía al circuito. Estas fuentes exteriores determinan también una respuesta en el circuito; cuando ha transcurrido tiempo suficiente, a partir del cierre del interruptor, para que la energía inicialmente almacenada se disipe en la resistencia del circuito, la respuesta posterior depende enteramente de la energía exterior que esté siendo suministrada. Esta respuesta, debido a la función de excitación, se denomina "Respuesta de Régimen Permanente".

De acuerdo con el principio de superposición, la respuesta total será la suma de ambas respuestas. Esta respuesta total se denomina "Respuesta Transitoria".

Ecuación Diferencial de Primer Orden.

Nuestro estudio está basado en un circuito al cual se excita por medio de una fuente solamente para entregar energía a los elementos que son capaces de almacenarla, en este caso es el elemento inductancia el que puede almacenar tal energía e inmediata mente después de haberse cargado dicho elemento se retira la --- fuente del circuito por medio de un interruptor, como se muestra en la figura (8-1):

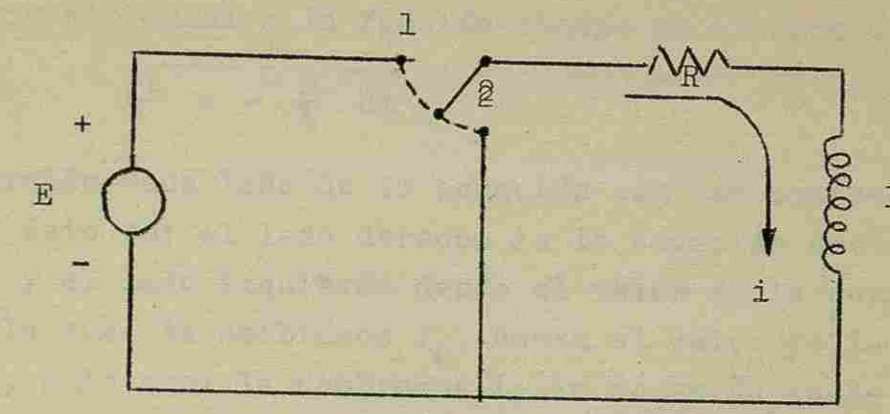


FIGURA 8.1

El propósito es calcular la corriente en función del tiempo a partir del instante $t = 0$ en que se produce la conmutación del interruptor. Los pasos a seguir para obtener la solución completa, los podemos enumerar como sigue:

1o.- Calcular la solución permanente.

2o.- Plantear y resolver la ecuación diferencial del circuito para obtener la respuesta natural.

3o.- Sumar las respuestas permanentes y natural y determinar las constantes arbritarias a partir de las condiciones iniciales.

Estos tres pasos se siguen a continuación para la resolución del circuito de la figura (8-1).

La ecuación diferencial puede plantearse utilizando las leyes de Kirchhoff.

$$L \frac{di}{dt} + R\,i = 0 \qquad (8\text{-}1)$$

Hay que notar que la batería, que es la fuente de energía eléctrica del circuito, ha quedado desconectada de éste por la acción de un interruptor, quedando en la inductancia L energía almacenada la cual quedará ahora en calidad de fuente de energía eléctrica del circuito, una vez que ha pasado el interruptor a la posición 2.

Por separación de variables la ecuación (8-1) queda como se-muestra en la ecuación (8-2).

La función corriente en el lado izquierdo de la ecuación es exactamente igual a la función tiempo en el lado derecho.

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \qquad (8\text{-}2)$$

Integrando cada lado de la ecuación con sus correspondientes límites ésto es, el lado derecho de la ecuación desde t = 0 hasta-t = t y el lado izquierdo desde el valor de la corriente en t =-0, a la cual la nombramos i_o, hasta el valor de la corriente --- t = t, a la cual la nombramos i, la ecuación queda como sigue:

$$\int_{io}^{i} \frac{di}{i} = \int_{o}^{t} -\frac{R}{L}\,d\,t \qquad (8\text{-}3)$$

y resolviendo la integral:

$$\ln i - \ln io = -\frac{R}{L}\,t$$

de donde:

$$i = io\;e^{-R/L\;t} \qquad (8\text{-}4)$$

Esta ecuación (8-4) es una solución de la ecuación diferencial -para todos los valores i_o. En donde el valor de i_o dependerá de-las restricciones del problema.

En t = L/R el valor de la corriente es:

$$i = io\;e^{-1} = \frac{io}{e}$$

El tiempo L/R es llamado constante del tiempo del circuito.

Circuito R-C.- El circuito R-C mostrado en la figura (8-2):

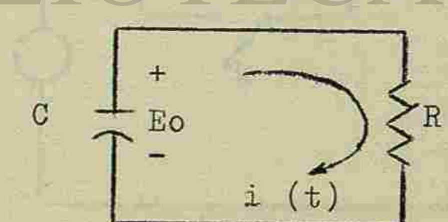


FIGURA (8-2)

Este circuito está representado también por una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$R\, i + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t} i\, d\, t = 0$$

0;

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = 0$$

Esta ecuación puede ser resuelta de la misma manera que la ecuación (8-1).

La solución será:

$$i = Io \quad e^{-\frac{1}{RC} t}$$

Esta ecuación será igual a:

$$i = Io\ e^{-t/T}$$

En donde I_o es el valor inicial de la corriente y T = RC -- (Constante de tiempo). El valor inicial de la corriente se calcula de acuerdo al estado del circuito en t = 0, en este instante el voltaje en el capacitor es E_o, este voltaje aparecerá a través de la resistencia, por lo cual la corriente inicial será --- igual a E_o/R afectado por una función del tiempo, esto es la corriente i será igual a:

$$i = \frac{Eo}{R} \quad e^{-t/T}$$

Como un ejemplo de lo anterior resolvemos el circuito de la figura (8-3)

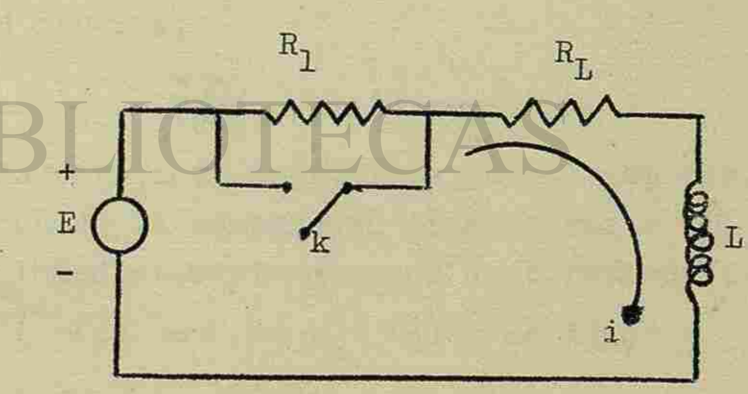


FIGURA (8-3)

Supongamos que el circuito anterior representa el circuito de campo de un generador de corriente contínua a la cual se le está aplicando una fuente de 250 Volts., que el valor de la inductancia es de 55 Henrios y el valor de R_L es de 12.6 Ohms.

Suponiendo que está abierto K y ajustando R_1 de manera que la corriente sea 0.40 Amperes. ¿ cuál será la variación de inmediatamente después de cerrarse K?.

También se nos pregunta que tiempo se necesita para que la corriente alcance el valor de 14 amperes después de cerrarse k.

Solución:

Para resolver este problema se hace las concideraciones siguientes:

Una vez que se ha cerrado K, la corriente permanece momentáneamente invariable en 5.4 amperes, debido a ésto se produce una caída de tensión en R_L de:

$$e_{RL} = R\,i = 12.6 \times 5.4 = 68 \text{ volts.}$$

Lo cual quiere decir que:

$$L\,\frac{di}{dt} = 182 \text{ volts.}$$

o sea que la variación de la corriente con respecto al tiempo estará dado por:

$$\frac{di}{dt} = \frac{182}{55} = 3.31 \text{ Amp/Seg.}$$

Ahora bien, cuando K está cerrado, la corriente que fluye por el circuito será igual a:

$$i = \frac{V}{R} = \frac{250}{12.6} = 19.84 \text{ Amp.}$$

Sabemos que la corriente inicial es de 5.4 amperes, por lo que la corriente es de la componente transitoria i (t) y deberá tener un valor inmediatamente después de cerrarse K, tal que:

$$i\ (o) = 1 + i_t\ (o) \quad \text{de donde}$$

$$5.40 = 19.84 + i_t\ (o)$$

$$i_t\ (o) = 5.40 - 19.48 = -14.44 \text{ Amp.}$$

Sabemos también que la fórmula de la corriente transitoria es -- igual a:

$$i_t = i_o e^{-R/L\ t}$$

De donde se sabe que:

$$i_o = -\ 14.4 \text{ Amps.}$$

Y que:

$$R/L = \frac{12.56}{55} = 0.229 \text{ sec}^{-1}$$

Por lo tanto sustituyendo estos valores para encontrar el tiempo tenemos que:

$$i\ (t) = i + i_t\ (t) = 19.84 - 14.44\ \ e^{-0.229\ t}$$

Como la corriente i (t) vale 14 amperes y se pide en cuánto tiempo alcanza ese valor, el tiempo será:

$$i\ (t) - 14 = 19.84 - 14.44\ e^{-0.229t}$$

$$e^{-0.229t} = \frac{19.84 - 14}{14.44} = 0.404$$

$$0.229t = \ln \frac{1}{0.404} = \ln 2.48$$

$$0.229t = \ln\ 2.48$$

$$0.229t = 0.906$$

$$t = \frac{0.906}{0.229} = 3.96 \text{ Seg.}$$

$$t = 3.96 \text{ Seg.}$$

Respuesta a los Circuitos R-L a las Funciones de Escalón y de impulso:

La entrada en escalón que es la entrada obtenida cuando se- conecta al circuito una fuente de tensión el circuito R-L se --- muestra en la figura (8-4).

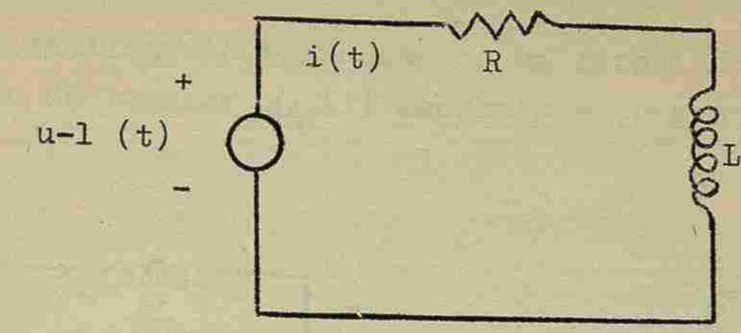


FIGURA (8-4)

En un tiempo $t = 0^+$ la inductancia es un circuito abierto y la corriente es:

$$i\ (0+) = 0$$

En un tiempo $t = (\infty)$ la inductancia es un corto circuito y la corriente es igual a:

$$i\ (\infty) = \frac{1}{R}$$

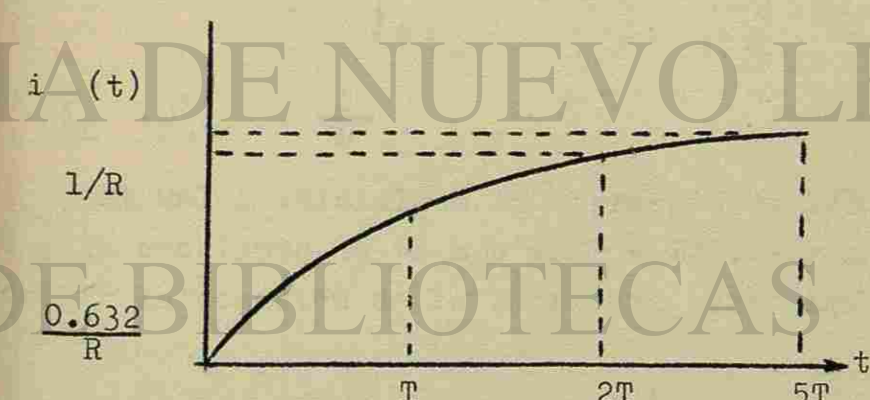
Y la constante de tiempo es igual a:

$$T = \frac{L}{R}$$

Dado lo anterior la expresión de corriente puede escribirse como

$$i\ (t) = \frac{1}{R}\ \left(1 - e^{-R/L\, t} \right)\ \mu_{-1}\ (t)$$

Un diagrama de esta ecuación se muestra en la figura siguiente:



FUNCION RESPUESTA DEL CIRCUITO

Respuesta impulso.

Para analizar la respuesta de un circuito R-L excitado por una fuente de impulso $\mu_0(t)$ usaremos el circuito de la figura (8-5).

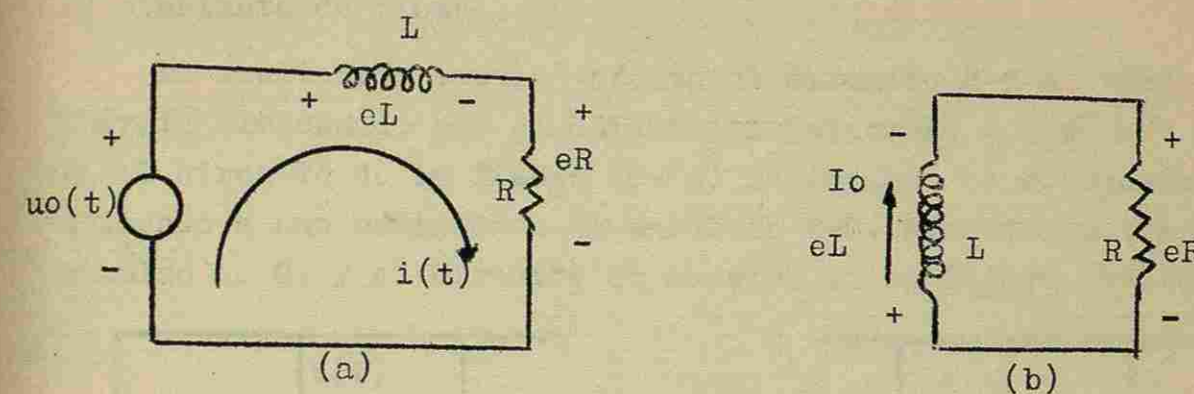


FIGURA (8-5)

Ahora se encontrará la corriente y el voltaje en el circuito analizándolo de la siguiente manera:

El circuito para t mayor que 0 está mostrado en la figura (8-5a), el impulso afecta al circuito para t mayor que 0, es decir, para valores de corriente que oscilan entre el tiempo 0^- y 0^+ en la inductancia. Durante este intervalo la inductancia en un circuito abierto y el voltaje impulso aparece a través de él.

La corriente en la inductancia será igual a:

$$i_L(0+) = \frac{1}{L}\int_{0-}^{0+} e\,dt = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} \mu_0(t)\,dt$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L}$$

El valor inicial de la corriente es 1/L, su valor final es 0 y la constante de tiempo es T = L/R. Por análisis se puede escribir la ecuación de la corriente como sigue:

$$i_L = \frac{1}{L}\,e^{-R/L\,t} \qquad t > 0$$

Respuesta a los circuitos R-C a un impulso y a un escalón.

Las funciones respuesta que existen en los circuitos R-C --

son esencialmente las mismas que existen en los circuitos R-L. - la diferencia principal es ahora T = RC.

Para escribir una respuesta por inspección, es necesario -- calcular por orden solamente el valor inicial, el valor final y- la constante de tiempo.

La excitación impulso afecta al circuito R-C a través de la energía almacenada por él durante el intervalo $t = o^-$ y $t = 0^+$. En el circuito de la figura (8-6a) un impulso de corriente es -- aplicado a una cominación en paralelo R-C. Después de t = 0 el - impulso es 0, y el circuito se muestra en la figura (8-6b).

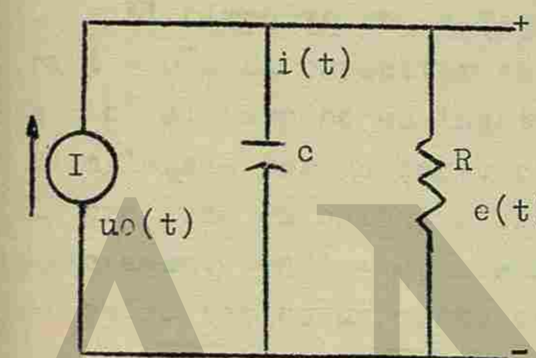


FIGURA (8-6a)

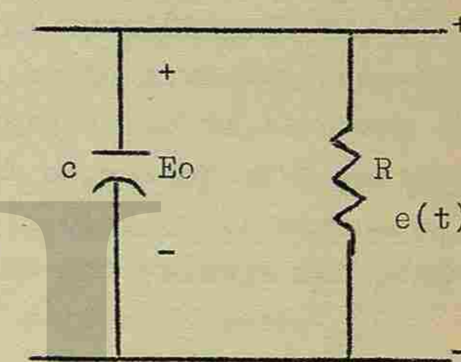


FIGURA (8-6b)

El problema principal es el cálculo del voltaje inicial en- el capacitor. En $t = 0^-$ el circuito está en receso, en t = 0 el- impulso actúa y el capacitor actúa, como un corto circuito. Du-- rante el intervalo $t = 0^-$ y $t = 0^+$ la corriente fluye en el capa citor y produce el voltaje:

$$e\ (0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} \mu_o(t)\, dt = \frac{1}{C}$$

El valor final del voltaje es:

$$e\ (\infty) = 0$$

La constante de tiempo es:

$$T = R/C$$

el voltaje será:

$$i\ (t) = \mu_o\ (t) - \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}\ \mu_{-1}\ (t)$$

Un circuito RC en serie excitado por un impulso de muestra- en la figura (8-7).

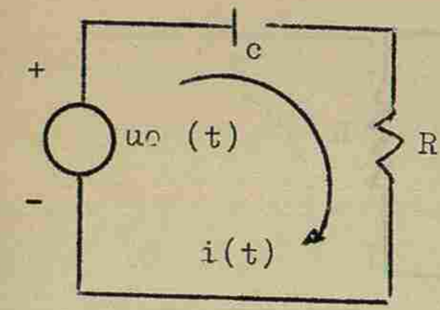


FIGURA (8-7a)

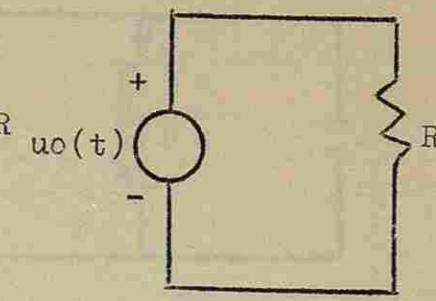


FIGURA (8-7b)

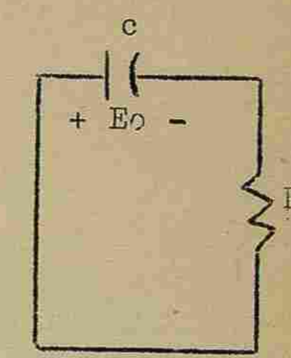


FIGURA (8-7c)

El circuito en la figura (8-7a) se muestra para $t = 0^-$ y para $t = 0^+$. El capacitor actúa como un corto circuito, después de $t = o^+$ el impulso es inactivo, la fuente de voltaje muerta es -- reemplazada por un corto circuito y el capacitor será cargado. - El problema es calcular la corriente inicial en el circuito, --- exactamente en $t = 0$, cuando el impulso del voltaje funciona y - el capacitor es un corto circuito, la corriente sera:

$$i\ (0) = \frac{1}{R}\ \mu_0\ (t)$$

Esta corriente pasa a través del capacitor y produce un voltaje:

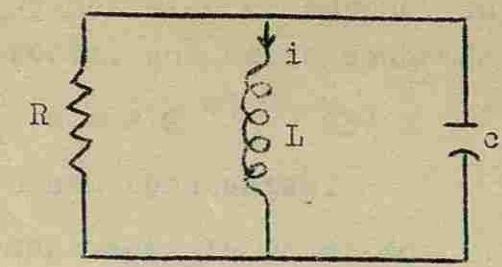
$$e_C = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} \frac{1}{R}\ \mu_0\ (t)\ dt = \frac{1}{RC}$$

Como complemento en lo que respecta a transitorios, analizaremos el tiempo de circuitos que están caracterizados por ecua-- ciones lineales de segundo orden.

Para nuestro propósito es conveniente considerar el circuito formado por elementos simples que son R, L y C sin fuentes, - lo cual nos facilita dicho análisis.

Sabemos la importancia general de esta combinación particular de elementos ideales que es un modelo adecuado para discutir sistemas eléctricos de comunicación, sistemas mecánicos, etc. --

Considerando un circuito R L C en paralelo, sin fuentes:



Para estudiar este circuito RLC en paralelo supondremos que puede haber energía almacenada inicialmente tanto en la bobina como en el condensador y por consecuencia hay inicialmente presentes valores para la corriente de la bobina y la tensión del condensador, desarrollando el circuito por la ley de los voltajes de Kirchhoff $\sum e = 0$.

$$e/R + \frac{1}{L}\int_{to}^{t} edt - i\ (to) + C\ \frac{de}{dt} = 0 \quad (1)$$

De acuerdo a las siguientes condiciones iniciales, resolvemos esta ecuación,

$$i\ (0^+) = Io$$

$$e\ (0^+) = Eo$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (1) se tiene la siguiente ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden

$$c\ \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1}{R}\ \frac{de}{dt} + \frac{1}{L}\ e = 0 \quad (2)$$

Cuya solución e (t) es la respuesta natural deseada.

Para resolver la ecuación (2) usaremos la forma exponencial ya que en esta ecuación se suman tres términos: la segunda derivada, la primera derivada y la misma función, multiplicando cada una de ellas por un factor constante e igualando la suma a cero.

Esta es una función cuyas derivadas tienen la misma forma -

que la propia función y (e) dará satisfacción a la ecuación (2)- de la cual diremos que si bien no es una operación explícita, sabemos que una función exponencial en general satisface una ecuación de este tipo.Por ello se supone, sujeto a verificación por-substitución directa, que en la ecuación (1):

$$e = A e^{st} \qquad (3)$$

en la cual A y S son constantes.

Derivando dos veces la ecuación (2) con R.P.T. y substitu-yendo en la ecuación (1) tenemos ...

$$\frac{de}{dt} = S e^{st} \qquad C\,A\,S^2 e^{st} + \frac{1}{R}\,A\,S e^{st} + \frac{1}{L}\,A e^{st} = 0$$

$$\frac{d^2e}{dt} = S^2 e^{ST} \qquad A e^{st}\,(C\,S^2 + 1/R\,s + 1/L) = 0$$

$$C\,S^2 + \frac{S}{R} + \frac{1}{L} = 0 \qquad (4)$$

A esta ecuación se le llama ecuación auxiliar o ecuación característica. Como la ecuación (4) es una ecuación cuadrática, - hay dos soluciones, identificadas como S_1 y S_2

$$S_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

y

$$S_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

En función de "frecuencias" estas cantidades serán...

$$Wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A este término le llamaremos "frecuencia resonante" y a

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

le llamaremos frecuencia neperiana o coeficiente de amortigua---

miento exponencial (α).

Esta última expresión descriptiva se utiliza porque es una medida de la rápidez con que la respuesta natural decae o se amortigua hasta alcanzar su valor final permanente (cero generalmente), por último S1 y S2 recibirán el nombre del circuito RLC en paralelo, y de una manera concreta:

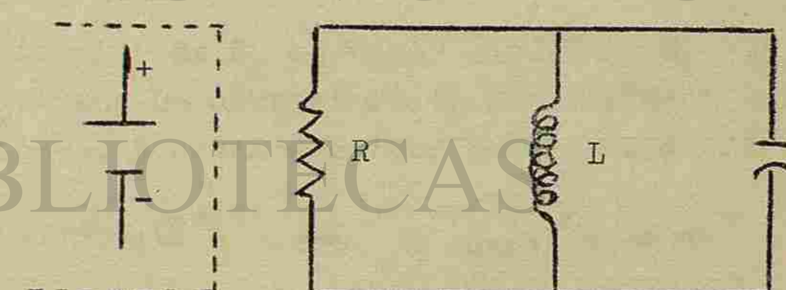
$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - W.^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W.^2}$$

Es claro que la naturaleza de las respuestas depende de las magnitudes relativas de α y W. El radical que aparece en las expresiones para S_1 y S_2 será real si α es mayor que W., imaginario si α es menor que Wo y cero si α y Wo son iguales.

CIRCUITO SOBRE AMORTIGUADO

Los valores anteriores S_1 y S_2 vienen a determinar la naturaleza o forma de transitorio, es decir, la manera como varía con el tiempo. La solución transitoria de un circuito RLC en paralelo y sin fuentes, tomando en cuenta las condiciones que caracterizan el caso "Sobreamortiguado", viene a ser tan solo una suma de una ecuación homogénea si las funciones de excitación son cero (ver figura).



CIRCUITO SIN FUENTE

las ecuaciones diferenciales que los describen se reducen a las-ecuaciones homogéneas, cuya solución es la respuesta natural del sistema.

$$e\ (t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Para nuestro caso en paralelo, A_1 y A_2 deben hallarse aplicando las condiciones iniciales dadas; las demas magnitudes son substituciones directas.

Un circuito RLC se dice que esta sobreamortiguado si,

$$LC > H\ R^2\ C^2$$

$$\alpha > Wo$$

$$\alpha^2 > Wo^2$$

Entonces el radical de la ecuación característica antes mencionada es real, de modo que ambas raíces son reales, es decir, tanto S_1 como S_2 son números reales negativos; esto era de esperar, -- puesto que si ambas raíces fueran positivas los términos correspondientes de la ecuación...

$e = A e^{st}$ . . . . crecerían exponencialmente.

Este comportamiento no es posible en un circuito que no contiene fuente de energía.

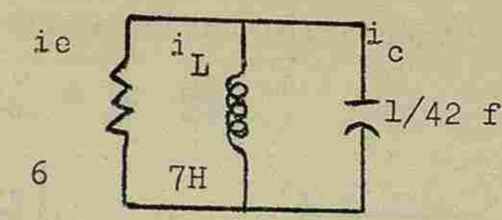
Como ya se ha dicho, la respuesta e (t) puede expresarse como la suma (algebráica) de dos términos exponenciales decrecien-- tes, aproximándose los dos a cero cuando el tiempo aumenta sin - límite.

Como el termino de S_2 es mayor que el de S_1, el término que contiene a S_2 tiene un decrecimiento más rápido y para valores - grandes el tiempo, podemos escribir la expresión límite como:

$$e\ (t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Supongamos que se va a discutir el método mediante el cual-se eligen las constantes arbitrarias A_1 y A_2 de la ecuación a (t) $= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ de modo que satisfagan las condiciones ini--

ciales y para mostrar un ejemplo de una curva, respuesta para el caso SOBRE AMORTIGUADO, desarrollaremos a continuación RLC en paralelo con valores numéricos.



R = 6

L = 7 Henry

C = 1/42 Faradios

Este circuito tiene una energía inicial almacenada de manera que la tensión inicial del circuito es e (o) = 0 y la corriente inicial en la bobina i (o) = 10 amperios.

Desarrollando:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \qquad Wo = 1/\sqrt{LC}$$

$$\alpha = 3.5 \quad , \qquad Wo = \sqrt{6}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - Wo^2}\ , \quad S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W_o^2}$$

$$S_1 = -3.5 + \sqrt{3.5^2 - (\sqrt{6})^2}\ , \quad S_2 = -3.5\ \sqrt{3.5^2 - (\sqrt{6})^2}$$

$$S_1 = -1\ , \qquad S_2 = -6$$

$\therefore$ La respuesta natural en forma general es..... $\quad e = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$e\ (t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \qquad (5)$$

Tenemos que e (o) = o

$$\therefore \qquad \underline{0 = A_1 + A_2} \qquad (6)$$

Derivando la ecuación (5) con respecto a t:

$$\frac{de}{dt} = -\ A_1 E^{-t}\ -6\ A_2\ E^{-6t}$$

y como la condición inicial es $i(o) = 10$, tendremos que:

cuando $t = o$, $dt\ (t = o) = o = A_1 - 6\ A_2$

Ahora la derivada con valor numérico es:

$$i_c = C\ \frac{de}{dt}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{de}{dt}\right|_{(t = o)} = \frac{i\ c\ (o)}{C} = \frac{i\ (o) + i\ R\ (o)}{C} = \frac{i\ (0)}{C}$$

$$\frac{de}{dt} = 420 \text{ volts/seg}$$

Ya que una tensión cero a través de la resistencia exige que pase por ella una corriente cero se tendra que:

$$420 = -\ A_1 - 6A_2 \qquad (7)$$

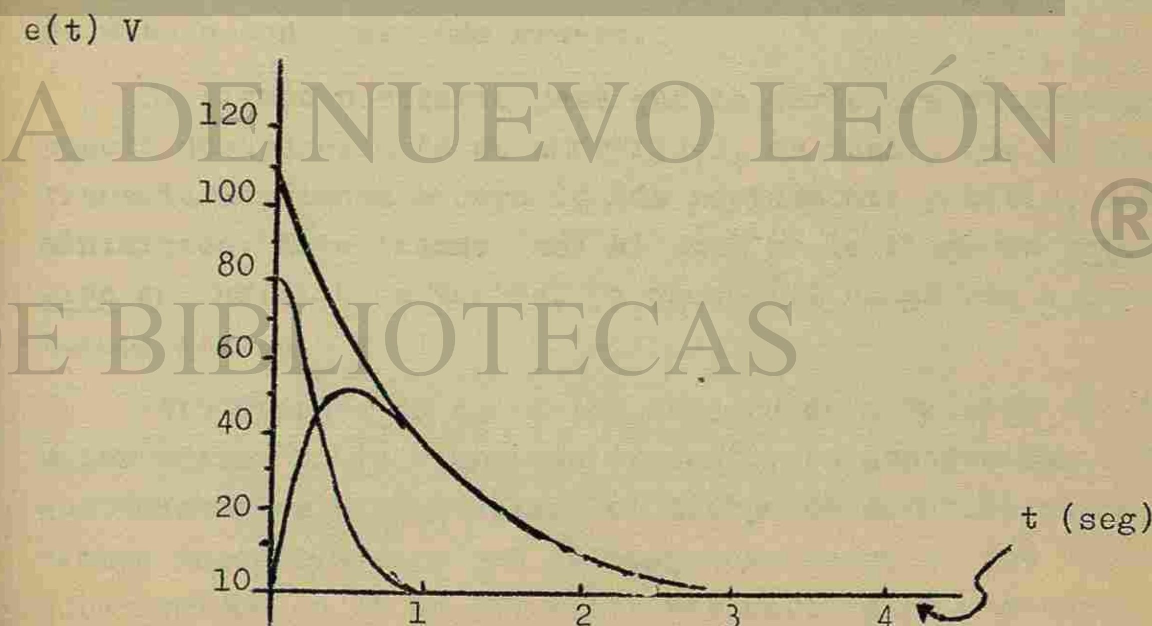
Según la ecuación (6) y (7) nos proporciona $A_1 = 84$ y

$A_2 = -\ 84$

$\therefore$ la solución final para la respuesta natural es...

$$e\ (t) = 84\ (e^{-t} - e^{-6t}) \qquad (8)$$

Ahora haremos ciertos cálculos útiles para describir la gráfica de la respuesta natural e (t) antes mencionada.



Observamos que e (t) es cero cuando t = 0 en la ecuación -- (8), esto viene a comprobar la suposición original. Así también- podemos interpretar el primer término exponencial como teniendo- una constante de tiempo de 1 segundo y el otro exponencial, de - 1/6 segundo.

Los dos términos comienzan con una amplitur unitaria, pero- el segundo decae con mayor rapidez; así pues, e (t) es positiva- siempre. Cuando el tiempo tiende a infinito, cada término tiende a cero y la respuesta se desvanece, como debe suceder. Así, tenemos la curva respuesta que es cero para t = 0 y cero para $t = \infty$ Pero siempre positiva; se puede sacar un punto máximo al derivar

$$e(t) = 84 \quad (e^{-t} - e^{-6t})$$

$$\frac{de}{dt} = 84\,(-e^{-t} + 6\,e^{-6t})$$

$$0 = -e^{-tn} + 6\,e^{-6tn}$$

$$e^{5tn} = 6$$

$$tn = .358$$

$$\therefore \quad e\,(tn) = 48.4 \text{ VOLTS}$$

En la gráfica se trazaron las dos exponenciales $84\,e^{-t}$ y -- $84\,e^{-6t}$ con trazo fino y su diferencia, la respuesta total e (t) se dibujo con trazo más grueso.

El tiempo necesario para que la parte transitoria de la respuesta desaparezca (o se amortigue), es decir, que la respuesta- transitoria tienda a cero lo más rapidamente posible, deberá ser minimizado. Este tiempo (ts) al cual se le llama de estabilización es infinito en teoría, ya que e (t) nunca cae a cero en un- tiempo finito.

Pero después de que e (t) haya caído a valores al 1% de su- valor máximo en la respuesta presente, es despreciable. Puesto - que tenemos em = 48.9 volts, el tiempo de estabilización es el - tiempo necesario para que la respuesta caiga a .489 Voltios. Si- substituimos en la ec (8) e (t) por este valor y despreciando el segundo término exponencial, se encuentra el tiempo de estabilización, el cual resulta muy grande.

$$e\ (t) = 84\ (\epsilon^{-t} - \epsilon^{-6t})$$

$$ts = 5.15 \text{ segundos}$$

AMORTIGUAMIENTO CRITICO

Al estudiar la naturaleza de la solución en función del valor de R de la Ec (2), la cual discutimos anteriormente,

$$C\ \frac{d^2e}{dt^2} + \frac{1}{R}\ \frac{d\,e}{dt} + \frac{1}{L}\ e = 0,$$

notamos que si se aumenta R a un valor tal que haga que $S_1 = S_2$, el circuito se dice que posee "AMORTIGUAMIENTO CRITICO", este caso es de importancia práctica especialmente en numerosos sistemas mecánicos análogos, como por ejemplo los instrumentos indicadores. Los resultados para este caso se obtienen inmediatamente como límite de cualquiera de los otros dos casos.

Resumiendo diremos que hemos ajustados los valores de los elementos de modo que α y Wo sean iguales, así pues logramos este caso de amortiguamiento crítico según las siguientes condiciones.

$$\alpha = Wo$$

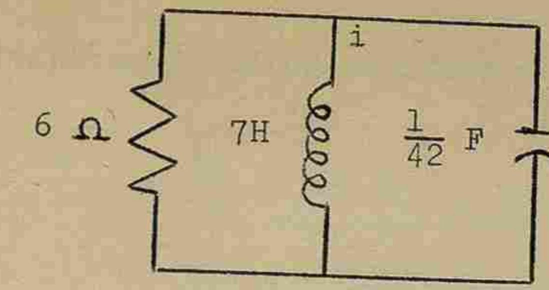
$$24 = 4\ R^2\ C^2$$

o

$$L = 4R^2\ C$$

Usando los valores numéricos del caso anterior desarrollaremos esta variante pues sabemos que incrementando el valor de R se conseguirá el Amortiguamiento crítico.

Si construímos la respuesta sumando dos exponenciales tendremos una respuesta que contiene una sola constante arbitraria, en vez de las dos necesarias, lo cual es inconveniente, por lo cual concluímos en usar un procedimiento diferente del exponencial. Así también debemos tener presente que lo que nos interesa es la forma funcional final de la respuesta.



L = 7H
C = 1/42F
R = ?

Tal valor es $7\sqrt{\frac{6}{2}}$ ohmios;

$$\alpha = W_o = \sqrt{6}$$

$$S_1 = S_2 = \sqrt{6}$$

De acuerdo a lo anterior desarrollamos la ecuación diferencial original (2).

$$C\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{de}{dt} + \frac{1}{L} e = o$$

en función de α Wo: $\frac{d^2e}{dt^2} + 2\alpha\frac{de}{dt} + W_o^2 e = 0$

lo cual para el Amortiguamiento crítico, se convierte en

$$\frac{d^2e}{dt^2} + 2\alpha\frac{de}{dt} + \alpha^2 e = o$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \alpha\frac{de}{dt} + \alpha\frac{de}{dt} + \alpha^2 e = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{de}{dt} + \alpha e\right) + \alpha\left(\frac{de}{dt} + \alpha e\right) = 0$$

Si ahora hacemos

$$Y = \frac{de}{dt} + \alpha e$$

entonces $\frac{dy}{dt} + a y = 0$

su solución será $Y = A_1 E^{-t}$

$$\therefore \quad \frac{de}{dt} + e = A_1 E^{-t}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por $E^{+\ t}$

$$E^{\alpha t}\frac{de}{dt} + \alpha E^{t} e = A_1$$

$$\frac{d}{dt}(e\,E^{\alpha t}) = A_1$$

Integrando cada miembro $e\,E^{\alpha t} = A_1 t + A_2$

$$\therefore e = E^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \qquad (1)$$

Así tenemos la respuesta deseada

Substituyendo el valor de (α) en esta ecuación $e = A_1 t\, E^{-\sqrt{6t}} + A_2\, E^{-\sqrt{6t}}$ (2)

Para encontrar los valores de A_1 y A_2 tenemos que la condición para e (t) es e (o) = o, por lo tanto, $A_2 = 0$; este resultado se debe a que el valor principal debe ser aplicada a la derivada de/dt, derivando la ecuación (2) y recordando que $A_2 = 0$.

$$\frac{de}{dt} = A_1 t\,(-\sqrt{6})\,E^{-\sqrt{6t}} + A_1 E^{-\sqrt{6t}}$$

Si t = 0

$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

expresando la derivada en función de la corriente inicial del condensador,

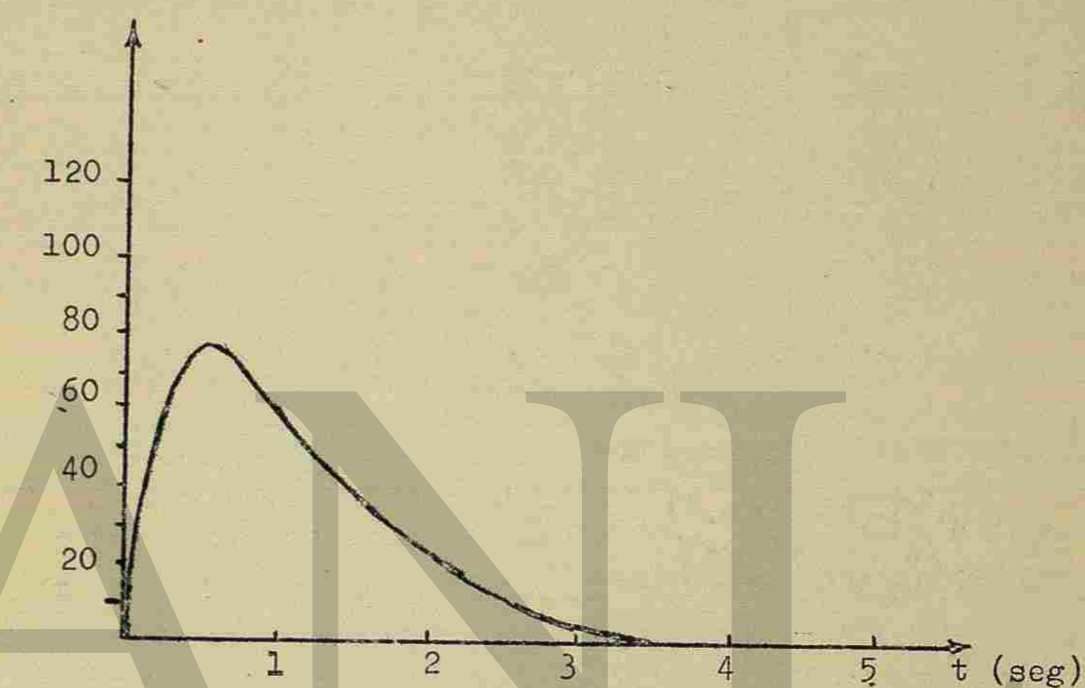
$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} = \underline{i_c\,(o)} = \frac{i\ R\ (o)}{C} + \frac{i\ \ (o)}{C}$$

$$\therefore A_1 = 420$$

Así que la respuesta es

$$e\ (t) \ = 420 \quad t\ E^{-\ 2.45\ t} \qquad (3)$$

La curva respuesta para amortiguamiento crítico se ha dibujado en la siguente figura:



Para describir esta gráfica de una manera detallada diremos que: el valor inicial especificado es cero. Razonamos inmediatamente que la respuesta tiende a cero cuando t tiende a infinito, ya que el término t E^{-45t} es una forma indeterminada.

Usando la regla de L' H opital se tiene

$$\lim_{t \to \infty} e\ (t) = 420 \lim_{t \to \infty} \frac{t}{E^{2.45t}} = 420$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{2.45} \quad E^{2.45t} \quad = 0$$

Vemos que tenemos una respuesta que empieza y termina en cero, - con valores positivos para todos los demás tiempos. Aparece un - valor máximo para un tiempo tm; en nuestro caso

tm = .408 seg. y em = 63.1 VOLTIOS

También se puede determinar el tiempo de estabilización resol---
viendo

$$\frac{em}{100} = 420 \ ts \ \ E^{-2.45 \ ts}$$

para ts (POR EL METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS) de donde

ts = 3.12 segs.