

INTRODUCCION.

En este capítulo se analizan las redes de dos pares de terminales; la descripción de las redes de dos pares de terminales incluye más de una relación de excitación y de respuesta; si se excita uno de los pares de terminales obviamente producimos una respuesta en el segundo par de terminales. Ahora bien, si se excita el segundo par de terminales también obtendremos una señal en el otro par de terminales.

Cuando la red es resistiva la relación excitación y respuesta es de resistencias equivalentes simples, entonces una red resistiva de dos pares de terminales se puede reducir a tres resistencias equivalentes.

TEOREMA DE RECIPROCIDAD.

El teorema de reciprocidad trata de la relación de excitación y de respuesta de un sistema de dos pares de terminales, como el que se muestra en la figura 5.1

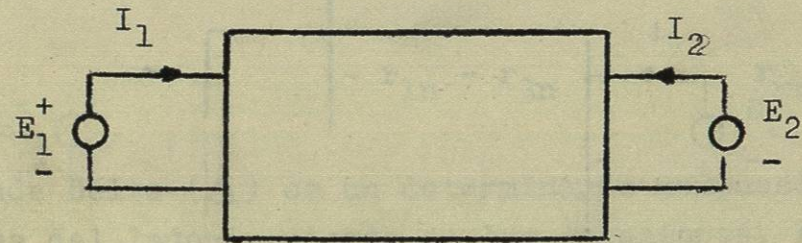


FIGURA 5.1

Supóngase que la red esta excitada por una fuente de voltaje E_1 o por una fuente de voltaje E_2 , entonces se puede escribir una serie de ecuaciones de malla que describen el sistema como sigue:

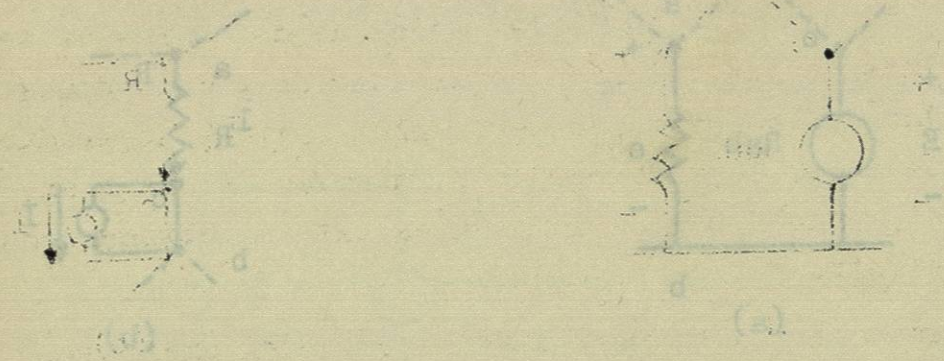


FIGURA 5.1

Una fuente de voltaje se conecta en el punto p al voltaje E_1 a través de V_1 es el mismo que el voltaje E_2 en el punto q y a estar en el mismo potencial.

El correspondiente a estos dos puntos, la resistencia R_{pq} es la misma en paralelo con que fuente de voltaje E_1 .

El resultado de esto es el cambio de la resistencia por una fuente de voltaje con el mismo voltaje E_1 a través de V_1 .

Un argumento similar puede seguirse para la fuente de voltaje E_2 en el punto q (véase figura 5.1 (b)). Supóngase que una corriente I_2 es inyectada en el punto q y el punto p es el punto de salida. La fuente de corriente puede ser colocada en paralelo con E_1 como se muestra en la figura 5.1 (b) y el mismo valor de la corriente I_1 se obtiene de corriente en la conexión p y q cuando se cambia la resistencia R_{pq} está en serie con la fuente de corriente I_2 y por lo tanto el voltaje E_1 es el mismo que el voltaje E_2 en el punto p y q cuando se cambia la resistencia R_{pq} .

El resultado de esto es que la resistencia R_{pq} puede ser reemplazada por una fuente de corriente I_2 con el mismo valor de corriente I_1 que se inyecta en el punto q .

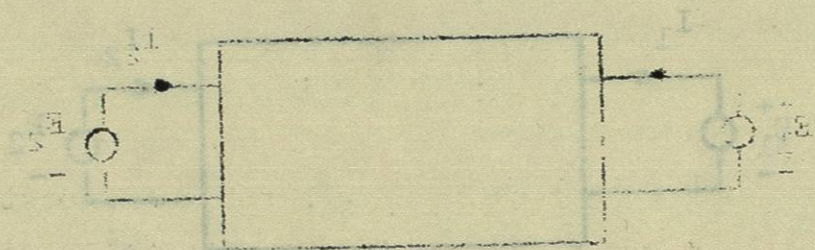
$$\begin{aligned}
 i_1 r_{11} - i_2 r_{12} - i_3 r_{13} \dots - i_n r_{1n} &= E_1 \\
 - i_1 r_{12} + i_2 r_{22} - i_3 r_{23} \dots - i_n r_{2n} &= E_2 \\
 - i_1 r_{13} - i_2 r_{23} + i_3 r_{33} \dots - i_n r_{3n} &= 0 \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 i_1 r_{1n} - i_2 r_{2n} - i_3 r_{3n} \dots + i_n r_{nn} &= 0
 \end{aligned}$$

La solución de la red se lograría una vez resultado este conjunto de ecuaciones generales. Primero se puede hacer $E_2 = 0$ o sea cortocircuitar E_2 y calcular la corriente I_2 que fluiría en corto circuito, la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$I_2 = \frac{-E_1}{\Delta} \begin{vmatrix} -r_{12} & -r_{23} & \dots & -r_{2n} \\ -r_{13} & r_{33} & \dots & -r_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -r_{1n} & -r_{3n} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} \quad (5-1)$$

En donde Delta (Δ) es un determinante compuesto por los coeficientes del lado izquierdo de las ecuaciones. Ahora si hacemos $E_1 = 0$ y calculamos la corriente I_1 que fluye debido al voltaje E_2 , quedará expresada:

$$I_1 = \frac{-E_2}{\Delta} \begin{vmatrix} -r_{12} & -r_{13} & \dots & -r_{1n} \\ -r_{23} & r_{33} & \dots & -r_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -r_{2n} & -r_{3n} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} \quad (5-2)$$



El determinante de las ecuaciones 5-1 y 5-2 es el mismo -- excepto por un intercambio del primer renglón en la primera columna, es fácil determinar que este intercambio no cambia el valor del determinante y entonces que los dos determinantes son iguales; una condición necesaria para esta igualdad es la simetría del determinante original de los coeficientes.

Cuando los dos determinantes son iguales, se tiene que la corriente producida I_2 por el voltaje E_1 es la misma que la corriente I_1 producida por el voltaje E_2 .

Un enunciado alternativo del Teorema de Reciprocidad es:

"Una fuente de voltaje ideal y un amperímetro ideal en cualquiera de las dos ramas de la red pasiva que es lineal y bilateral, puede ser cambiado sin cambiar el valor leído en cualquiera de ellas". Un análisis análogo puede hacerse con fuentes de corriente que ahora excitarán la red y los voltajes obtenidos en la respuesta lo cual hace que se llegue a la conclusión siguiente:

"Una fuente de corriente y un voltímetro a través de cualquier par de nodos en una red pasiva que es lineal y bilateral, puede ser intercambiados sin cambiar los valores leídos en cualquiera de ellos".

Estas dos conclusiones constituyen el Teorema de Reciprocidad: Es fácil recordar que los elementos que pueden tener la misma impedancia interna. La fuente de voltaje y el amperímetro tienen resistencia 0, las fuentes de corriente y el voltímetro tienen resistencia infinita.

Parámetros "R"

Nuestro objetivo es encontrar el circuito equivalente de una red de dos pares de terminales como la mostrada en la figura 5-2.

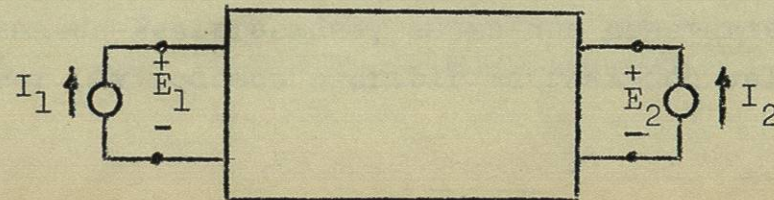


FIGURA 5.2

Si consideramos las dos fuentes de corriente como las excitaciones y los dos voltajes como las respuestas, podemos escribir por medio del Teorema de Superposición:

$$E_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2 \quad (5-3 a)$$

$$E_2 = R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \quad (5-4 b)$$

Donde los parámetros "r" son constantes de proporcionalidad obtenidos calculando la respuesta, debido al valor unitario de cada fuente cuando la otra fuente se hace 0. Entonces de la ecuación (5-3 a) cuando $I_2 = 0$ tenemos:

$$r_{11} = \frac{E_1}{I_1} \text{ cuando } I_2 = 0 \quad (5-5 a)$$

De la misma ecuación cuando $I_1 = 0$ tenemos:

$$r_{12} = \frac{E_1}{I_2} \text{ cuando } I_1 = 0 \quad (5-5 b)$$

De la ecuación (5-4) cuando $I_2 = 0$ tenemos:

$$r_{21} = \frac{E_2}{I_1} \text{ cuando } I_2 = 0 \quad (5-5 c)$$

De la misma ecuación cuando $I_1 = 0$ tenemos:

$$r_{22} = \frac{E_2}{I_2} \text{ cuando } I_1 = 0 \quad (5-5 d)$$

Ya que una fuente de corriente cero es simplemente un circuito abierto, la resistencia r_{11} es la resistencia en las terminales de entrada de la red con las terminales de salida en circuito abierto. La resistencia r_{22} es la resistencia vista desde las terminales de salida de la red con las terminales de entrada en circuito abierto. La constante r_{12} es el voltaje E_1 producido en las terminales de entrada, en el circuito abierto por amper de corriente I_2 de las terminales de salida y la constante r_{21} es el voltaje E_2 producido en las terminales de salida en circuito abierto por amper de entrada de la corriente I_1 . Por el Teorema de Reciprocidad, estas dos constantes son iguales o: $r_{12} = r_{21}$ y podemos escribir la relación volt-ampere por