CAPITULO VI

DIFERENCIACION DE FUNCIONES

. como la diferenciación es menos difícil que la integración, daremos primeramente una breve explicación de ésta.

El concepto funcional y operacional de diferenciación está ilustrado en la figura (6-1).

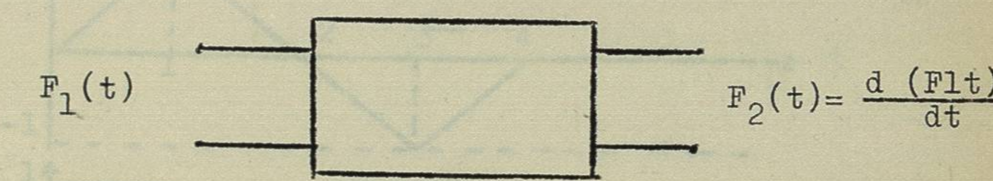

FIGURA 6.1

La entrada en la "caja negra" es la función f_1 (t) y la salida es la función $f_2(t)$. La diferenciación está representada por la "caja negra" que opera en la entrada tal como:

$$F_2(t) = \frac{d}{dt} (f_1 t) = F_1(t) \qquad (6-1)$$

La ecuación (6-1) muestra que la función de salida $f_2(t)$ es en cada instante de tiempo igual a la pendiente, o la derivada de la función de entrada $f_1(t)$. Si $f_1(t)$, es una línea recta la pendiente es una constante. Si $f_1(t)$ es una vurva más general, la pendiente en cualquier instante es la pendiente de la tangente dibujada en la curva. Note que la derivada de un punto no está definida. La naturaleza de la curva sobre cualquier lado del punto determina la derivada; la curva puede ser conocida antes que la derivada del punto pueda obtenerse.

Diferenciación Gráfica. Una curva típica y su derivada se muestran en la figura (6-2).

A la izquierda del origen, la curva original f (t) y su derivada f' (t) son 0. Entra t = 0 = 1 la curva original sube con una pendiente constante de (= 1). La derivada de la curva tiene por lo tanto un valor constante de (+ 1). Entre t = 1 y t = 3 la curva original cae con una pendiente de (- 1) y por la parte correspondiente de la derivada de la curva tiene también un valor de (- 1). Del punto t = 3 a t = 4 la curva original nuevamente -

tiene una pendiente de (+ 1) y enconces la derivada de la curva-tiene nuevamente un valor de (+ 1). Hacia la derecha de t = 4 la curva original y su derivada son 0.

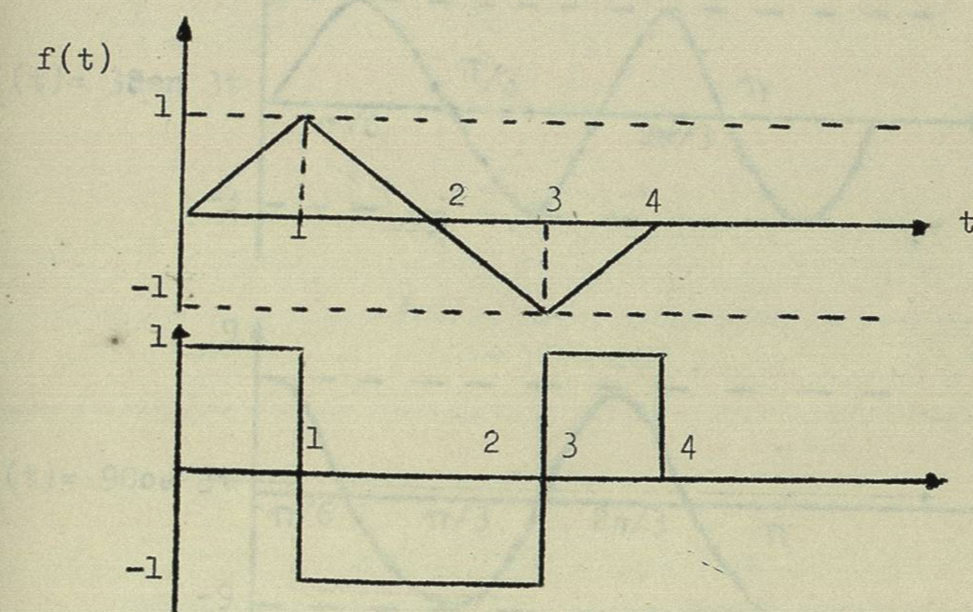

FIGURA 6.2

NOTE que una función puede ser 0 en un punto y no obstante tener una derivada. Por ejemplo en el punto t = 2 en la figura 6-2 la-curva f (t) es 0, pero su derivada tiene un valor de (-1).

Diferenciación Analítica. Si una función original puede ser ex--presada como una expresión matemática simple, la función deriva-da puede ser generalmente encontrada en tablas comunes de deriva<u>das</u>. Un ejemplo es la función:

$$f_1\,(t) = 3 \text{ sen } (3t)$$

Las tablas de derivadas muestran que:

$$d\,(\text{sen } x) = \text{Cos } x\; dx$$

Aplicando esta fórmula a la función del ejemplo, la derivada vie ne dada por:

$$f_2\,(t) = \frac{f_1\,(t)}{dt} = 9 \text{ Cos } 3\; t \qquad (6\text{-}1)$$

Las funciones f_1 (t) y f_2 (t) se muestran en la figura (6-3)

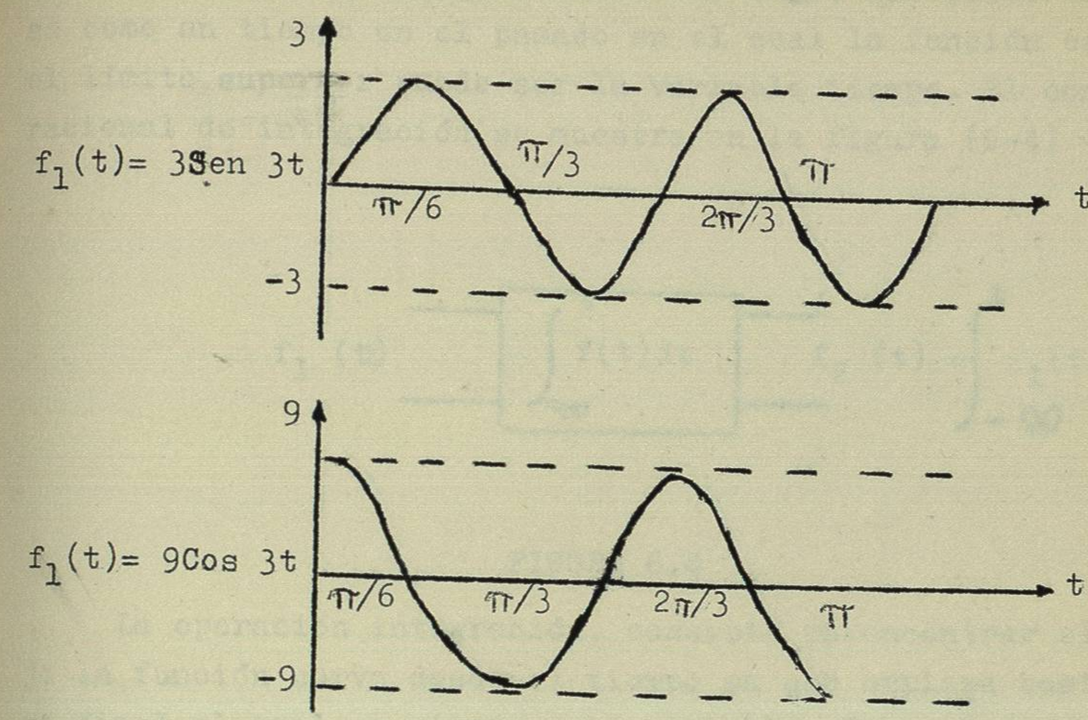

FIGURA 6.3

De t = 0 a t = (∞) la derivada de la curva puede también - ser obtenida dibujando una tangente a cada punto sobre la curva-original y entonces dibujar las pendientes de las tangentes. Entonces en t = (π)/6 la pendiente de la tangente es 0 y el valor-correspondiente de la derivada de la curva es 0, en t = (π)/4 la pendiente de la tangente es negativa y tiene un valor de aproximadamente (-6.3). La ecuación (6-1) muestra un valor más exacto.

$$f2\ (t = \pi/4) = 9\ \text{Cos}\ \frac{3\pi}{4} = -\ 9\ (.707) = -\ 6.36$$

En general puede decirse que en la operación de encontrar - una derivada, es mejor pensar en el procedimiento gráfico como - el método básico y considerar el procedimiento analítico, como - un método complementario, aunque puede hacerse de cualquiera de-las dos maneras.

<u>Integración de una Función.</u>

En este punto nos referimos únicamente a las integrales definidas. Esta integral representa el área bajo la curva, entre -

dos límites especificados por el integral. Generalmente el límite inferior de la integral suele ser ($-\infty$), que puede interpretarse como un tiempo en el pasado en el cual la función es 0 cero; el límite superior puede ser la variable tiempo. El concepto operacional de integración se muestra en la figura (6-4)

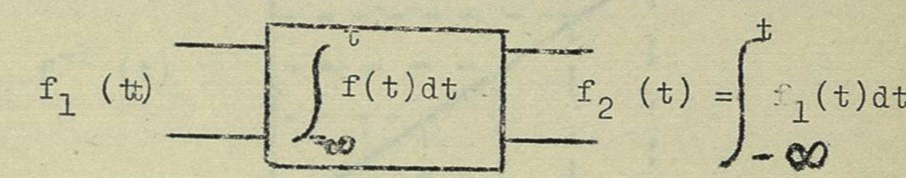

FIGURA 6.4

La operación integración, consiste en encontrar el área bajo la función curva desde el tiempo en que empieza hasta el tiempo final el cual es siempre una variable. Como el tiempo cambia el área cambia, en cualquier instante dado el valor de la área es la función de salida f2 (t). Expresada matemáticamente la integral definida de una función es:

$$f_2\ (t) = \int_{-\infty}^{t} f_1\ (t)\ dt \qquad (6\text{-}2)$$

La ecuación (6-2) muestra que el valor de la función $f_2(t)$ en algún tiempo (t) es el área bajo la curva $f_1(t)$ desde el comienzo de tiempo hasta el tiempo presente t.

En cualquier problema actual es posible encontrar un tiempo antes que la función $f_1(t)$ sea cero. Frecuentemente este punto es $t = 0$, pero lo hermos más general refiriéndonos a $t = -\infty$, entonces.

$$f_2\ (t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(t)\ dt \qquad (6\text{-}2)$$

Integración Gráfica.

Un ejemplo de una función que puede ser integrada fácilmente se muestra en la figura (6-5).

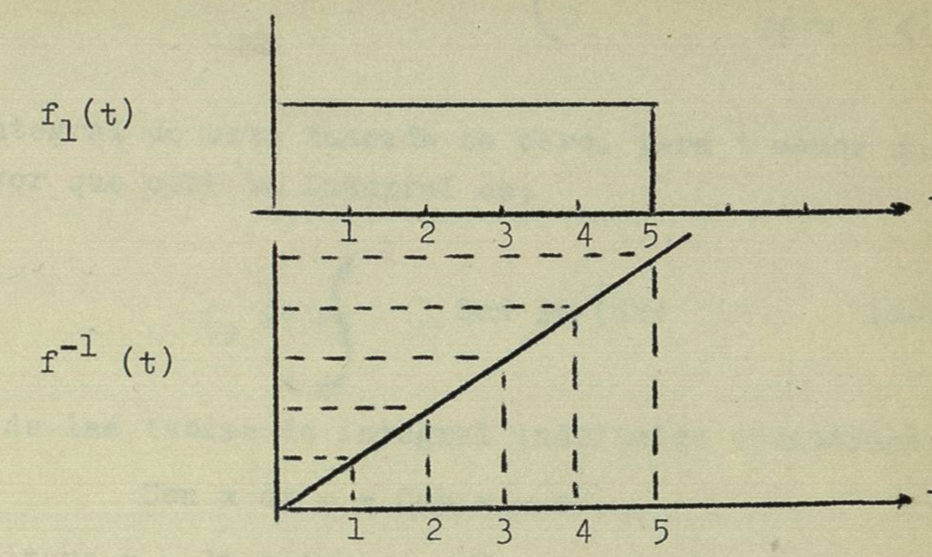

FIGURA 6.5

La función es cero hasta t = 0, el área acumulada a la izquiera de t = 0 es cero. Por lo cual la integral es cero. En t = 1 se acumula un área de la unidad, entonces el valor de la integral de la curva en este punto es 1. En t = 2 el área total acumulada es 2, por lo tanto el valor de la integral es 2. En t = 3 la integral es igual a 3; en t = 4 la integral es igual a 4 y así sucesivamente. A la derecha de t = 5 la integral mantiene un valor de 5.

Si la curva que se va a integrar es arbitraria, esto puede hacerse aproximadamente por una serie de rectángulos de diferentes tamaños, la integral puede obtenerse sumando las áreas de los rectángulos.

Integración Analítica.

Si la forma analítica de la función original es conocida, la integral de una función puede ser obtenida usando las tablas de integración.

El uso de las tablas de integrales implica usualmente integrales indefinidas. Una integral indefinida es idéntica a la ecuación (6-2) excepto en que se le suma una constante arbitraria

El valor o área bajo una curva es simplemente el valor de la integral indefinida del límite superior menos el valor del límite inferior. Como un ejemplo, consideremos la función: