que la propia función y (e) dará satisfacción a la ecuación (2)- de la cual diremos que si bien no es una operación explícita, sabemos que una función exponencial en general satisface una ecuación de este tipo. Por ello se supone, sujeto a verificación por-substitución directa, que en la ecuación (1):

$$e = A\,e^{st} \qquad (3)$$

en la cual A y S son constantes.

Derivando dos veces la ecuación (2) con R.P.T. y substituyendo en la ecuación (1) tenemos ...

$$\frac{de}{dt} = S\,e^{st} \qquad C\,A\,S^2 e^{st} + \frac{1}{R}\,A\,S\,e^{st} + \frac{1}{L}\,A\,e^{st} = 0$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} = S^2 e^{ST} \qquad A\,e^{st}\,(C\,S^2 + 1/R\;s + 1/L) = 0$$

$$C\,S^2 + \frac{S}{R} + \frac{1}{L} = 0 \qquad (4)$$

A esta ecuación se le llama ecuación auxiliar o ecuación característica. Como la ecuación (4) es una ecuación cuadrática, - hay dos soluciones, identificadas como S_1 y S_2

$$S_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

y

$$S_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

En función de "frecuencias" estas cantidades serán...

$$W_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A este término le llamaremos "frecuencia resonante" y a

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

le llamaremos frecuencia neperiana o coeficiente de amortigua---

miento exponencial (α).

Esta última expresión descriptiva se utiliza porque es una medida de la rápidez con que la respuesta natural decae o se amortigua hasta alcanzar su valor final permanente (cero generalmente), por último S1 y S2 recibirán el nombre del circuito RLC en paralelo, y de una manera concreta:

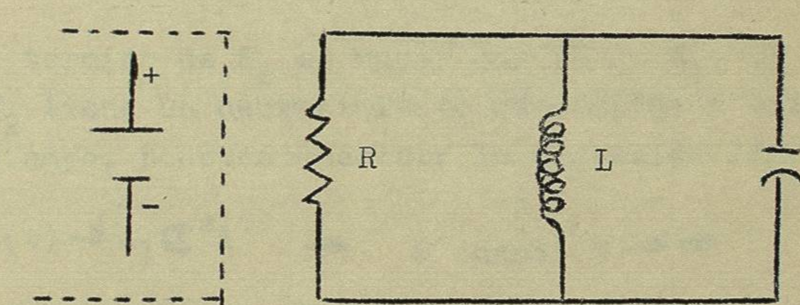
$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - W_o^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W_o^2}$$

Es claro que la naturaleza de las respuestas depende de las magnitudes relativas de α y W. El radical que aparece en las expresiones para S_1 y S_2 será real si α es mayor que W., imaginario si α es menor que Wo y cero si α y Wo son iguales.

CIRCUITO SOBRE AMORTIGUADO

Los valores anteriores S_1 y S_2 vienen a determinar la naturaleza o forma de transitorio, es decir, la manera como varía con el tiempo. La solución transitoria de un circuito RLC en paralelo y sin fuentes, tomando en cuenta las condiciones que caracterizan el caso "Sobreamortiguado", viene a ser tan solo una suma de una ecuación homogénea si las funciones de excitación son cero (ver figura).



CIRCUITO SIN FUENTE

las ecuaciones diferenciales que los describen se reducen a las-ecuaciones homogéneas, cuya solución es la respuesta natural del sistema.

$$e\ (t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Para nuestro caso en paralelo, A_1 y A_2 deben hallarse aplicando las condiciones iniciales dadas; las demas magnitudes son substi tuciones directas.

Un circuito RLC se dice que esta sobreamortiguado si,

$$LC > H \quad R^2 \quad C^2$$

$$\alpha > Wo$$

$$\alpha^2 > Wo^2$$

Entonces el radical de la ecuación característica antes menciona da es real, de modo que ambas raíces son reales, es decir, tanto S_1 como S_2 son números reales negativos; esto era de esperar, -- puesto que si ambas raíces fueran positivas los términos correspondientes de la ecuación...

$$e = A e^{st} \ . \ . \ . \ . \text{ crecerían exponencialmente.}$$

Este comportamiento no es posible en un circuito que no contiene fuente de energía.

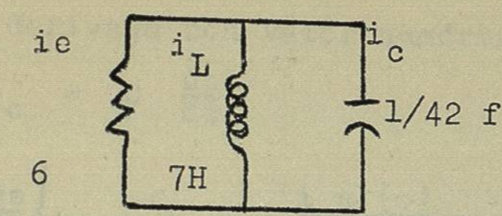
Como ya se ha dicho, la respuesta e (t) puede expresarse co mo la suma (algebráica) de dos términos exponenciales decrecien-- tes, aproximándose los dos a cero cuando el tiempo aumenta sin - límite.

Como el termino de S_2 es mayor que el de S_1, el término que contiene a S_2 tiene un decrecimiento más rápido y para valores - grandes el tiempo, podemos escribir la expresión límite como:

$$e\ (t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Supongamos que se va a discutir el método mediante el cual-se eligen las constantes arbitrarias A_1 y A_2 de la ecuación a (t) $= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ de modo que satisfagan las condiciones ini--

ciales y para mostrar un ejemplo de una curva, respuesta para el caso SOBRE AMORTIGUADO, desarrollaremos a continuación RLC en paralelo con valores numéricos.



R = 6

L = 7 Henry

C = 1/42 Faradios

Este circuito tiene una energía inicial almacenada de manera que la tensión inicial del circuito es e (o) = 0 y la corriente inicial en la bobina i (o) = 10 amperios.

Desarrollando:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}\,, \qquad W_o = 1/\sqrt{LC}$$

$$\alpha = 3.5\,, \qquad W_o = \sqrt{6}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - W_o^2}\,, \quad S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - W_o^2}$$

$$S_1 = -3.5 + \sqrt{3.5^2 - (\sqrt{6})^2}\,, \quad S_2 = -3.5\sqrt{3.5^2 - (\sqrt{6})^2}$$

$$S_1 = -1\,, \qquad S_2 = -6$$

$\therefore$ La respuesta natural en forma general es..... $e = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$e\,(t) = A_1 e^{-t} + A_2\, e^{-6t} \qquad (5)$$

Tenemos que e (o) = o

$$\therefore \quad \underline{0 = A_1 + A_2} \qquad (6)$$

Derivando la ecuación (5) con respecto a t:

$$\frac{de}{dt} = -\ A_1 E^{-t}\ - 6\ A_2\ E^{-6t}$$

y como la condición inicial es $i(o) = 10$, tendremos que:

cuando $t = o$, $dt\ (t = o) = o = A_1 - 6\ A_2$

Ahora la derivada con valor numérico es:

$$i_c = C\ \frac{de}{dt}$$

$$\therefore \quad \left.\frac{de}{dt}\right|_{(t\,=\,o)} = \frac{i\ c\ (o)}{C} = \frac{i\ (o) + i\ R\ (o)}{C} = \frac{i\ (0)}{C}$$

$$\frac{de}{dt} = 420 \text{ volts/seg}$$

Ya que una tensión cero a través de la resistencia exige que pase por ella una corriente cero se tendra que:

$$420 = -A_1 - 6A_2 \qquad (7)$$

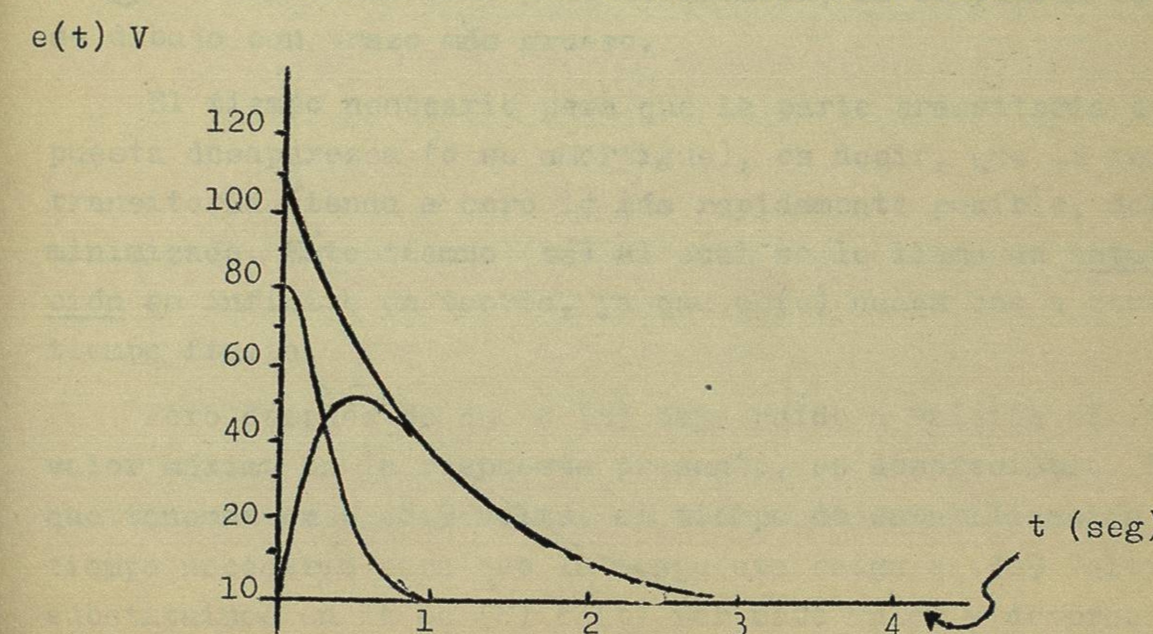
Según la ecuación (6) y (7) nos proporciona $A_1 = 84$ y

$A_2 = -84$

$\therefore$ la solución final para la respuesta natural es...

$$e\ (t) = 84\ (e^{-t} - e^{-6t}) \qquad (8)$$

Ahora haremos ciertos cálculos útiles para describir la gráfica de la respuesta natural e (t) antes mencionada.



Observamos que e (t) es cero cuando t = 0 en la ecuación -- (8), esto viene a comprobar la suposición original. Así también podemos interpretar el primer término exponencial como teniendo una constante de tiempo de 1 segundo y el otro exponencial, de - 1/6 segundo.

Los dos términos comienzan con una amplitur unitaria, pero el segundo decae con mayor rapidez; así pues, e (t) es positiva siempre. Cuando el tiempo tiende a infinito, cada término tiende a cero y la respuesta se desvanece, como debe suceder. Así, tenemos la curva respuesta que es cero para t = 0 y cero para $t = \infty$ Pero siempre positiva; se puede sacar un punto máximo al derivar

$$e\,(t) = 84 \quad (e^{-t} - e^{-6t})$$

$$\frac{de}{dt} = 84\,(-e^{-t} + 6\,e^{-6t})$$

$$0 = -\,e^{-tn} + 6\,e^{-6tn}$$

$$e^{5tn} = 6$$

$$tn = .358$$

$$\therefore \qquad e\,(tn) = 48.4 \text{ VOLTS}$$

En la gráfica se trazaron las dos exponenciales $84\,e^{-t}$ y -- $84\,e^{-6t}$ con trazo fino y su diferencia, la respuesta total e (t) se dibujo con trazo más grueso.

El tiempo necesario para que la parte transitoria de la respuesta desaparezca (o se amortigue), es decir, que la respuesta transitoria tienda a cero lo más rapidamente posible, deberá ser minimizado. Este tiempo (ts) al cual se le llama de <u>estabilización</u> es infinito en teoría, ya que e (t) nunca cae a cero en un tiempo finito.

Pero después de que e (t) haya caído a valores al 1% de su valor máximo en la respuesta presente, es despreciable. Puesto - que tenemos em = 48.9 volts, el tiempo de estabilización es el - tiempo necesario para que la respuesta caiga a .489 Voltios. Si substituimos en la ec (8) e (t) por este valor y despreciando el