segundo término exponencial, se encuentra el tiempo de estabilización, el cual resulta muy grande.

$$e(t) = 84\,(e^{-t} - e^{-6t})$$

$$ts = 5.15 \text{ segundos}$$

AMORTIGUAMIENTO CRITICO

Al estudiar la naturaleza de la solución en función del valor de R de la Ec (2), la cual discutimos anteriormente,

$$C\,\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{1}{R}\,\frac{d\,e}{dt} + \frac{1}{L}\,e = 0,$$

notamos que si se aumenta R a un valor tal que haga que $S_1 = S_2$, el circuito se dice que posee "AMORTIGUAMIENTO CRITICO", este caso es de importancia práctica especialmente en numerosos sistemas mecánicos análogos, como por ejemplo los instrumentos indicadores. Los resultados para este caso se obtienen inmediatamente como límite de cualquiera de los otros dos casos.

Resumiendo diremos que hemos ajustados los valores de los elementos de modo que α y Wo sean iguales, así pues logramos este caso de amortiguamiento crítico según las siguientes condiciones.

$$\alpha = Wo$$

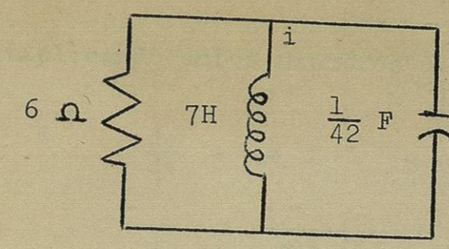
$$24 = 4\,R^2\,C^2$$

o

$$L = 4R^2\,C$$

Usando los valores numéricos del caso anterior desarrollaremos esta variante pues sabemos que incrementando el valor de R se conseguirá el Amortiguamiento crítico.

Si construímos la respuesta sumando dos exponenciales tendremos una respuesta que contiene una sola constante arbitraria, en vez de las dos necesarias, lo cual es inconveniente, por lo cual concluímos en usar un procedimiento diferente del exponencial. Así también debemos tener presente que lo que nos interesa es la forma funcional final de la respuesta.



L = 7H
C = 1/42F
R = ?

Tal valor es $7\sqrt{\frac{6}{2}}$ ohmios;

$\alpha = Wo = \sqrt{6}$

$S_1 = S_2 = \sqrt{6}$

De acuerdo a lo anterior desarrollamos la ecuación diferencial original (2).

$$C \frac{d^2e}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} \quad e = o$$

en función de α Wo: $\frac{d^2e}{dt^2} + 2\alpha \frac{de}{dt} + Wo^2 \quad e = 0$

lo cual para el Amortiguamiento crítico, se convierte en

$$\frac{d^2e}{dt^2} + 2\alpha \frac{de}{dt} + \alpha^2 e = o$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \alpha \frac{de}{dt} + \alpha \frac{de}{dt} + \alpha^2 \quad e = 0$$

y finalmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{de}{dt} + \alpha e \right) + \alpha \left(\frac{de}{dt} + \alpha e \right) = 0$$

Si ahora hacemos

$$Y = \frac{de}{dt} + \alpha e$$

entonces $\frac{dy}{dt} + a y = 0$

su solución será $Y = A_1 E^{-t}$

$$\therefore \quad \frac{de}{dt} + e = A_1 E^{-t}$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por $E^{+}\ t$

$$E^{\alpha t} \frac{de}{dt} + \alpha E^{t} e = A_1$$

$$\frac{d}{dt} (e\, E^{\alpha t}) = A_1$$

Integrando cada miembro $e\, E^{\alpha t} = A_1 t + A_2$

$$\therefore\ e = E^{-\alpha t} (A_1 t + A_2) \qquad (1)$$

Así tenemos la respuesta deseada

Substituyendo el valor de (α) en esta ecuación $e = A_1 t\, E^{-\sqrt{6t}} + A_2\, E^{-\sqrt{6t}}$ (2)

Para encontrar los valores de A_1 y A_2 tenemos que la condición para e (t) es e (o) = o, por lo tanto, $A_2 = 0$; este resultado se debe a que el valor principal debe ser aplicada a la derivada de/dt, derivando la ecuación (2) y recordando que $A_2 = 0$.

$$\frac{de}{dt} = A_1 t\ (-\sqrt{6})\ E^{-\sqrt{6t}} + A_1 E^{-\sqrt{6t}}$$

Si t = 0

$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} = A_1$$

expresando la derivada en función de la corriente inicial del condensador,

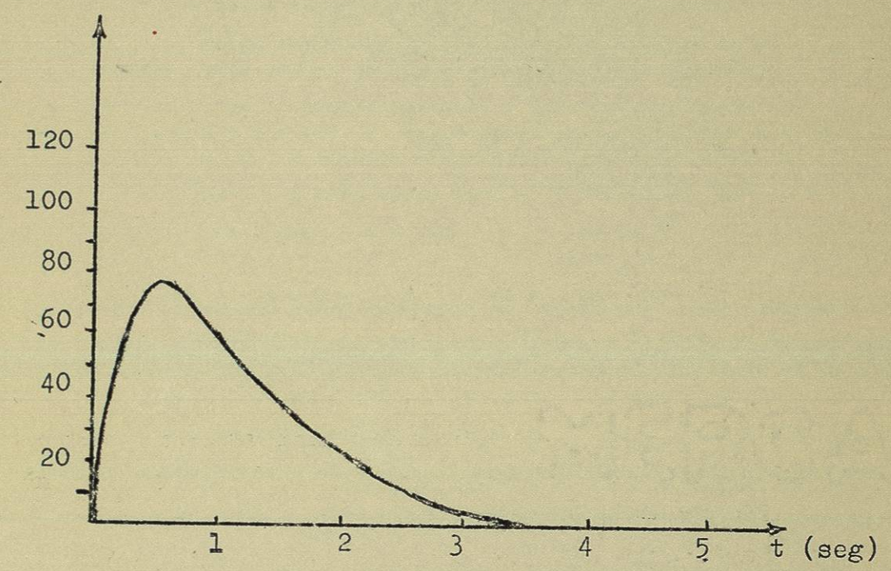
$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=0} = \frac{i_c\ (o)}{} = \frac{i\ R\ (o)}{C} + \frac{i\ (o)}{C}$$

$$\therefore\ A_1 = 420$$

Así que la respuesta es

$$e\,(t) = 420 \quad t\,E^{-\,2.45\,t} \qquad (3)$$

La curva respuesta para amortiguamiento crítico se ha dibujado en la siguente figura:



Para describir esta gráfica de una manera detallada diremos que: el valor inicial especificado es cero. Razonamos inmediatamente que la respuesta tiende a cero cuando t tiende a infinito, ya que el término $t\,E^{-45t}$ es una forma indeterminada.

Usando la regla de L' H opital se tiene

$$\lim_{t\to\infty} e\,(t) = 420 \lim_{t\to\infty} \frac{+}{E^{2.45t}} = 420$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2.45} \quad E^{2.45t} \quad = 0$$

Vemos que tenemos una respuesta que empieza y termina en cero, con valores positivos para todos los demás tiempos. Aparece un valor máximo para un tiempo tm; en nuestro caso

tm = .408 seg. y em = 63.1 VOLTIOS

También se puede determinar el tiempo de estabilización resol--- viendo

$$\frac{em}{100} = 420 \quad ts \quad E^{-2.45\ ts}$$

para ts (POR EL METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS) de donde

ts = 3.12 segs.