

MATEMÁTICAS II

TEMA V

DERIVADAS

OBJETIVO:

Al terminar el tema, el alumno será capaz de interpretar geométricamente el concepto de derivada de una función y calcular la derivada de diferentes tipos de funciones.

ACTIVIDADES:

- 1.- Expresaré verbalmente el concepto de derivada
- 2.- Representaré gráficamente el concepto de derivada
- 3.- Calcularé la derivada de algunas funciones algebraicas por definición.
- 4.- Calcularé por los teoremas la derivada de funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- 5.- Definiré el concepto de derivada implícita
- 6.- Derivaré funciones en las que "y" implícitamente.
- 7.- Definiré el concepto de diferenciales
- 8.- Utilizaré las fórmulas de diferenciales
- 9.- Definiré la antiderivada de una función.
- 10.- Calcularé la antiderivada de una función usando las fórmulas
- 11.- Aplicaré los conceptos teóricos a las soluciones de problemas relacionados con la Biología y otras ramas

MATEMÁTICAS II

TEMA V Derivar las siguientes funciones aplicando los teoremas de derivadas

DERIVADAS

LABORATORIO

1.- Derivar las siguientes funciones aplicando la definición

1) $F(x) = 6x - 2x^2 + 1$

2) $F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

3) $F(x) = \frac{1}{x^2} + x$

4) $F(x) = \sqrt{5x^2 - x}$

5) $F(x) = \frac{4}{2-x}$

6) $F(x) = \sqrt{3-x^2}$

7) $F(x) = (7-x^2)^5$

8) $F(x) = 3x - x^3$

9) $F(x) = \frac{(7x^2 + x + 2)^3}{(x^3 - 1)^2}$

10) $F(x) = \sqrt[6]{(9x^2 - x^2 + x)^5}$

11) $F(x) = \frac{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+1}}$

12) $F(x) = (5x^5 - x^3 + 2x)^4 \cdot (x^2 + 2)^3$

13) $F(x) = (\sqrt{x^2 - 3x})^5 + 5x^2 - 8$

1.- Derivar las siguientes funciones aplicando la definición

1) $F(x) = x^2 - 2x + 1$

2) $F(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 5$

3) $F(x) = x + \frac{1}{x}$

4) $F(x) = \sqrt{2x^2 - x}$

5) $F(x) = \frac{1}{x-2}$

6) $F(x) = \sqrt{3-x^2}$

7) $F(x) = x - x^2$

8) $F(x) = 2x - x^2$

11.- Derivar las siguientes funciones aplicando los teoremas de derivadas

1) $F(x) = 5 - 2x + 8x^2 - 3x^3 + x^4 - 9x^5$

2) $F(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}$

3) $F(x) = \frac{4}{x^{1/2}} - \frac{6}{x^{2/3}} + \frac{1}{x^{1/6}} - \frac{4}{x^{3/4}}$

4) $F(x) = \sqrt[3]{5x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

5) $F(x) = (x^2 - 2x + 1)^3 (x^3 - x^2)$

6) $F(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2-x^3}}$

7) $F(x) = \left(\frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} \right)^5$

8) $F(x) = \frac{6x^4 - x^3 + 1}{(5x^2 + 2)^2}$

9) $F(x) = \frac{(7x^2 + x + 2)^3}{(x^3 - 1)^2}$

10) $F(x) = \sqrt[6]{(9x^3 - x^2 + x)^5}$

11) $F(x) = \frac{\sqrt{x+1} \sqrt{x-1}}{\sqrt{1-x} \sqrt{x+1}}$

12) $F(x) = (5x^5 - x^3 + 2x)^4 (x^2 + 2)^3$

13) $F(x) = (\sqrt{x^4 - 3x})^5 + 5x^2 - 8$

Derivar las siguientes funciones aplicando los teoremas de derivadas

$$F(x) = 2 - 2x + 8x^2 - 3x^3 + x^4 - 4x^5$$

$$F(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^5} - \frac{5}{x}$$

$$F(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4} - \frac{4}{x^5}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{2x^5}$$

$$F(x) = (x^2 - x^3)^2 (1 + x^2 - x^5)$$

$$F(x) = \frac{x^5}{\sqrt{5-x}}$$

$$F(x) = \left(\frac{x^2 + 5}{1 - x^5} \right)^2$$

$$F(x) = \frac{1 + e^{x^4} - 4x^2}{(2x^5 + 5)^5}$$

$$F(x) = \frac{(5x^5 + x + 5)^3}{(x^3 - 1)^5}$$

$$F(x) = \sqrt{(x^2 - x^3 + x)^2}$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{x+1} \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} \sqrt{x-1}}$$

$$F(x) = (2x^2 - x^3 + 5x)^4 (x^5 + 5)^3$$

$$F(x) = (\sqrt{x^4 - 2x^2} + 2x^5 - 8)^2$$

$$14) F(x) = (x+1) \cdot \sqrt[3]{2x^2 - 1}$$

$$15) F(x) = \frac{(8x^5 - x^4 + 6x - 1)^2}{3x^2 + 1}$$

$$2) F(x) = e^{x^2 + 2x} \cdot \cos(7x^2 + 2x)$$

$$3) F(x) = \frac{\ln(3x^3 - x + 1)}{e^{2x}}$$

$$4) F(x) = \sqrt[4]{\text{tg}(4x^2 - x^4 + 3x)}$$

$$5) F(x) = \frac{\text{Sen}(8x^2 + 2x)}{(8x^2 + 3x)^3}$$

$$6) F(x) = (1 + e^{6x^3})^5$$

$$7) F(x) = \text{Sen}^2(7x - x^2) + \text{Cos}^2(7x - x^2)$$

$$8) F(x) = \text{ctg}(3x^3 - x) + \ln(3x^3 - x)$$

$$9) F(x) = \ln \left(\frac{8x^4 - x^3 + 2}{3x^2 - x} \right)$$

$$10) F(x) = e^{\text{tg } 6x^3} \cdot \text{Csc } 6x^3$$

$$11) F(x) = \ln \sqrt{(7x^4 - x^2)(5x^3 + x + 1)}$$

$$12) F(x) = \frac{e^{3x^4 - 1}}{\sqrt{e^{3x^3} - 1}}$$

$$13) F(x) = \ln[\text{Sen}(2x^2)]$$

$$14) F(x) = \text{Sec}^3(x^2 - 4x) \cdot \ln(x^2 - 4x^2)$$

$$15) F(x) = e^{9x^2 + x} - \text{Sen}(9x^2 + x) + \text{tg}^2(9x^2 + x)$$

$$\sqrt{1-x^2} \cdot (1+x) = (x) \quad \text{F (1)}$$

$$\frac{(1-x)^2 + x^2 - 2x^2}{1+x^2} = (x) \quad \text{F (2)}$$

Derivar implícitamente las siguientes expresiones
III.- Derivar las siguientes funciones trigonometricas, exponenciales y logaritmos

1) $F(x) = \text{Sen}^4(3x^3 - x^2 + 1)$

2) $F(x) = e^{7x^2 + 2x} \cdot \text{Cos}(7x^2 + 2x)$

3) $F(x) = \frac{\ln(5x^4 - x + 2)}{e^{3x^2}}$

4) $F(x) = \sqrt[4]{\text{tg}(9x^5 - x^4 + 3x)}$

5) $F(x) = \frac{\text{Sen}(8x^2 + 3x)}{(8x^2 + 3x)^3}$

6) $F(x) = (1 + e^{5x^3})^5$

7) $F(x) = \text{Sen}^2(7x - x^2) + \text{Cos}^2(7x - x^2)$

8) $F(x) = \text{Ctg}(3x^3 - x) + \ln(3x^3 - x)$

9) $F(x) = \ln\left(\frac{8x^4 - x^3 + 2}{3x^2 - x}\right)$

10) $F(x) = e^{\text{tg } 6x^3} \cdot \text{Csc } 6x^3$

11) $F(x) = \ln \sqrt{(7x^4 - x^2)(9x^3 + x + 1)}$

12) $F(x) = \frac{e^{3x^4 - 1}}{\sqrt{e^{3x^4} - 1}}$

13) $F(x) = \ln[\text{Sen}(x^4 - 5x)]$

14) $F(x) = \text{Sec}^3(x^5 - 4x^2) \cdot \ln(x^5 - 4x^2)$

15) $F(x) = e^{9x^2 + x} - \text{Sen}(9x^2 + x) + \text{tg}^2(9x^2 + x)$

111.- Derivar las siguientes funciones: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

(1) $F(x) = \ln(2e^x - x^2 + 1)$

(2) $F(x) = e^{\cos(x^2 + 2x)}$

(3) $F(x) = \frac{\ln(x^2 - x + 2)}{3x^2}$

(4) $F(x) = \sqrt{3x^2 - x^3 + 2x}$

(5) $F(x) = \frac{\ln(8x^2 + 2x)}{e^{(8x^2 + 2x)}}$

(6) $F(x) = (1 + e^{2x})^2$

(7) $F(x) = \ln(\cos^2(x-x^2)) + \ln(\cos^2(x-x^2))$

(8) $F(x) = \ln(x - e^x) + \ln(x - e^x)$

(9) $F(x) = \ln\left(\frac{8x^2 - x^3 + 2}{3x^2 - x^3 + 2}\right)$

(10) $F(x) = e^{\cos(x^2)}$

(11) $F(x) = \ln\left(\sqrt{(7x^2 - x^3)(2x^2 + x + 1)}\right)$

(12) $F(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{x^2}}$

(13) $F(x) = \ln[\ln(\cos(x^2 - 2x))]$

(14) $F(x) = \ln(x^2 - 2x) \cdot \ln(x^2 - 2x)$

(15) $F(x) = e^{x^2 + 2x} + \ln(2x^2 + x)$

IV.- Derivar implícitamente las siguientes expresiones

1) $4x^2 - 8y^3 = y^2 + 3x$

2) $7x^2y^4 - 3x^2 + 9y = 8y^2$

3) $\text{Sen}(x^2 + 1) + 3y^5 = e^{y^2 + 1}$

4) $(3x^2 + y)^2 + (x + y)^2 = x$

5) $\text{tg}(x^2 + y) = 5 + \text{ctg} y$

6) $\sqrt[3]{8xy^2 - x^2 + y^2} = 3x^5$

7) $\frac{3x}{y^2 - 1} = 5$

8) $(x^2 + y^2)(5x^3) = 6y^2$

Una masa de proteína (masa "M" en gr.) se disgrega en aminoácidos según la fórmula:

$M = p + qt + r t^2$ (donde p, q y r son constantes)

1) Derivar implícitamente la masa "M" de proteína como función de tiempo t de acuerdo a la fórmula.

2.- Una masa de aire frío se enfría en una universidad. La temperatura es de "T" grados, Sen(x^2 + 1) + 3y^5 = e^{y^2 + 1} la temperatura es de "T" grados, y dicha variables están relacionadas mediante la siguiente ecuación.

4) $(3x^2 + y)^2 + (x + y)^2 = x$

Calcular la razón instantánea de cambio de "T" con respecto a t a las horas:

a) $\text{tg}(x^2 + y) = 5 + \text{ctg} y$

b) 5 horas

c) $\sqrt[3]{8xy^2 - x^2 + y^2} = 3x^5$

3.- Supongamos que una proteína (masa "M" en gr.) se disgrega en aminoácidos según la fórmula:

7) $\frac{3x}{y^2 - 1} = 5$

Donde el tiempo está medido en horas. Hallar la razón de cambio instantánea para un tiempo t = 1/2 h.

8) $(x^2 + y^2)(5x^3) = 6y^2$

4.- El gasto de energía de algunos pájaros al volar se puede medir. Para el periquito australiano (Melopittacus uduletus) al gasto de energía en Cal. g^-1 Km^-1 (caloría por gramo a la inversa y por kilogramos a la menos uno), se puede describir mediante la fórmula:

$E = \frac{1}{V} \{ 0.074 (V - 35)^2 + 22 \}$

donde la "V" es la velocidad del pájaro en Km. hr^-1 (la velocidad del viento no se considera).

5.- Se proyecta que dentro de "X" meses, la población de una cierta ciudad será:

$P(X) = 2x + 4x^{3/2} + 500$

¿A que ritmo estará cambiando la población dentro de 9 meses? (derivada = ritmo de cambio)

1.V. - Derivar implícitamente las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x^2 + y^2 &= 8 - x^2 & (1) \\
 (2) \quad 8y^2 &= p^2 + x^2 - p^2 x^2 & (2) \\
 (3) \quad 1 + y^2 &= 2y^2 + (1 + x^2) \ln 2 & (3) \\
 (4) \quad x &= \frac{y^2}{(1+x)} + \frac{y^2}{(1+x^2)} & (4) \\
 (5) \quad y^2 + x^2 &= (1+x^2) y^2 & (5) \\
 (6) \quad 2x^2 &= \sqrt{8x^2 - x^2 + y^2} & (6) \\
 (7) \quad z &= \frac{x^2}{1-y^2} & (7) \\
 (8) \quad y^2 &= (x^2)(y^2 + x^2) & (8)
 \end{aligned}$$

1.- Cuando se sintetizó una proteína en una célula, la masa "M" de proteína como función de tiempo aumentó de acuerdo a la fórmula.

$$M = p + qt + r t^2 \quad (\text{donde } p, q \text{ y } r \text{ son constantes})$$

Hallar la razón instantánea de reacción como función de "t", donde la reacción es la razón con que cambia la masa.

(utilizar la definición de derivada como razón de cambio instantánea)

2.- Una masa de aire frío se aproxima a una universidad. La temperatura es de "t" grados, "t" horas después de la media noche, y dicha variables están relacionadas mediante la siguiente función.

$$T = 0.1 (400 - 40 t + t^2) \quad 0 \leq t \leq 12$$

Calcular la razón instantánea de cambio de "T" con respecto a t en las horas:

- a) 0 horas
- b) 5 horas A.M.
- c) 12 horas P.M.

3.- Supongamos que una proteína (masa "M" en gr.) se disgrega en aminoácidos según la fórmula:

$$M = \frac{28}{t} + 2$$

Donde el tiempo está medido en horas. Hallar la razón de cambio instantánea para un tiempo . $t = \frac{1}{2}$ h.

4.- El gasto de energía de algunos pájaros al volar se puede medir. Para el periquito australiano (Melopittacus udulatus) al gasto de energía en Cal. $g^{-1} Km^{-1}$ (caloría por gramo a la inversa y por kilogramos a la menos uno), se puede describir mediante la fórmula:

$$E = \frac{1}{V} \left\{ 0.074 (V - 35)^2 + 22 \right\}$$

donde la "V" es la velocidad del pájaro en Km. hr.⁻¹ (la velocidad del viento no se considera).

5.- Se proyecta que dentro de "X" meses, la población de una cierta ciudad será:

$$P(X) = 2x + 4x^{3/2} + 500$$

¿ A que ritmo estará cambiando la población dentro de 9 meses? (derivada = ritmo de cambio)

6.- El tamaño de un cultivo de bacterias que cruce lentamente está dado aproximadamente por:

APLICACIONES DE LA DN = No + 52t + 2 t² (tiempo de horas)

Hallar la razón instantanea de crecimiento en:

OBJETIVO:

Al terminar el tema, el alumno será capaz de aplicar la derivada de una función, para obtener los máximos y mínimos y puntos de inflexión de una función.

ACTIVIDADES:

- 1.- Definir el concepto de máximos y mínimos relativo a una función.
- 2.- Definir el concepto de máximo y mínimo absoluto a una función.
- 3.- Definir el concepto de punto crítico
- 4.- Enunciará el criterio de la primera derivada
- 5.- Calculará máximos y mínimos de una función usando el criterio de la primera derivada.
- 6.- Enunciará el criterio de la segunda derivada
- 7.- Calculará máximos y mínimos de una función usando el criterio de la segunda derivada
- 8.- Aplicará los conceptos teóricos a la solución de problemas aplicados con la Biología y otras ramas.

1.- Cuando se sintetizó una proteína en una célula, la masa "M" de proteína como función de tiempo aumentó de acuerdo a la fórmula.

M = p + dt + r t² (donde p, d y r son constantes)

Hallar la razón instantanea de reacción como función de "t", donde la reacción es la razón con que cambia la masa. (utilizar la definición de derivada como razón de cambio instantanea)

2.- Una masa de aire frío se aproxima a una universidad. La temperatura es de "t" grados, "t" horas después de la medianoche, y dichas variables están relacionadas mediante la siguiente función.

T = 0.1 (400 - 40 t + t²) 0 ≤ t ≤ 12

Calcular la razón instantanea de cambio de "T" con respecto a "t" en las horas:

- a) 0 horas
- b) 2 horas A.M.
- c) 12 horas P.M.

3.- Supongamos que una proteína (masa "M" en gr.) se desgrasa en aminoácidos según la fórmula:

M = 28/t + 2

Donde el tiempo está medido en horas. Hallar la razón de cambio instantanea para un tiempo t = 1/2 h.

4.- El gasto de energía de algunos pájaros al volar se puede medir. Para el perrito australiano (Melopitacus uulatus) el gasto de energía en Cal. g⁻¹ Km⁻¹ (caloría por gramo a la inversa y por kilogramos a la menos uno), se puede describir mediante la fórmula:

E = 1/V { 0.074 (V - 32)² + 22 }

donde la "V" es la velocidad del pájaro en Km. hr.⁻¹ (la velocidad del viento no se considera).

2.- Se proyecta que dentro de "X" meses, la población de una cierta ciudad será:

P (X) = 2x + 4x^{3/2} + 200

¿ A que ritmo estará cambiando la población dentro de 9 meses? (derivada = ritmo de cambio)