

Tabla 14. Modelos viscoelásticos con sus correspondientes ecuaciones diferenciales, Creep Compliance y módulos de relajación y compliance compleja (17).

Model	Name	Differential equation	Creep compliance $J(t)$	Relaxation modulus $Y(t)$	Complex compliance	
		Inequalities			Real part $J'(w)$ ( $w$ )	Imaginary part $J''(w)$ ( $w$ )
	Elastic solid	$\sigma = q_0 \dot{\epsilon}$	$1/q_0$	$q_0$	$1/q_0$	0
	Viscous fluid	$\sigma = q_1 \dot{\epsilon}$	$1/q_1$	$q_1(t)$	0	$-1/q_1$
	Maxwell fluid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon}$	$(p_1 + 1)/q_1$	$q_0 + q_1/(1)$	$q_0$	$-1/q_1$
	Kelvin solid	$\sigma = q_0 \dot{\epsilon} + q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_0} (1 - e^{-t/\tau})$ , $\tau = \frac{p_1}{q_1}$	$q_0 + q_1 e^{-t/\tau}$	$\frac{q_0}{q_0 + q_1}$	$-\frac{q_1}{q_0 + q_1}$
	3-parameter solid	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \dot{\epsilon} + q_1 \dot{\epsilon}$	$\frac{p_1}{q_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{q_0} (1 - e^{-t/\tau_1})$ , $\tau_1 = q_0/p_1$	$q_0 + \frac{q_1}{p_1} (1 - e^{-t/\tau_1})$	$\frac{q_0 + q_1}{q_0 + q_1}$	$-\frac{q_1}{q_0 + q_1}$
	3-parameter fluid	$p_1 \dot{\sigma} + \sigma = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_1} (1 - e^{-t/\tau_1}) + \frac{1}{q_2} (1 - e^{-t/\tau_2})$ , $\tau_1 = q_1/p_1$ , $\tau_2 = q_2/p_1$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{q_2}{p_1} e^{-t/\tau_2} + \frac{q_1 + q_2}{p_1}$	$\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2}$	$-\frac{q_1}{q_1 + q_2}$
	4-parameter fluid	$p_1 \dot{\sigma} + \sigma = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_1} (1 - e^{-t/\tau_1}) + \frac{1}{q_2} (1 - e^{-t/\tau_2}) + \frac{1}{q_3}$ , where $\tau_1 = q_1/p_1$ , $\tau_2 = q_2/p_1$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{q_2}{p_1} e^{-t/\tau_2} + \frac{q_1 + q_2}{p_1} + q_3$	$\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2}$	$-\frac{q_1}{q_1 + q_2}$
	4-parameter solid	$p_1 \dot{\sigma} + \sigma = q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \dot{\epsilon}$	$\frac{1}{q_1} (1 - e^{-t/\tau_1}) + \frac{1}{q_2} (1 - e^{-t/\tau_2}) + \frac{1}{q_3}$ , where $\tau_1 = q_1/p_1$ , $\tau_2 = q_2/p_1$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{q_2}{p_1} e^{-t/\tau_2} + \frac{q_1 + q_2}{p_1} + q_3$	$\frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2}$	$-\frac{q_1}{q_1 + q_2}$

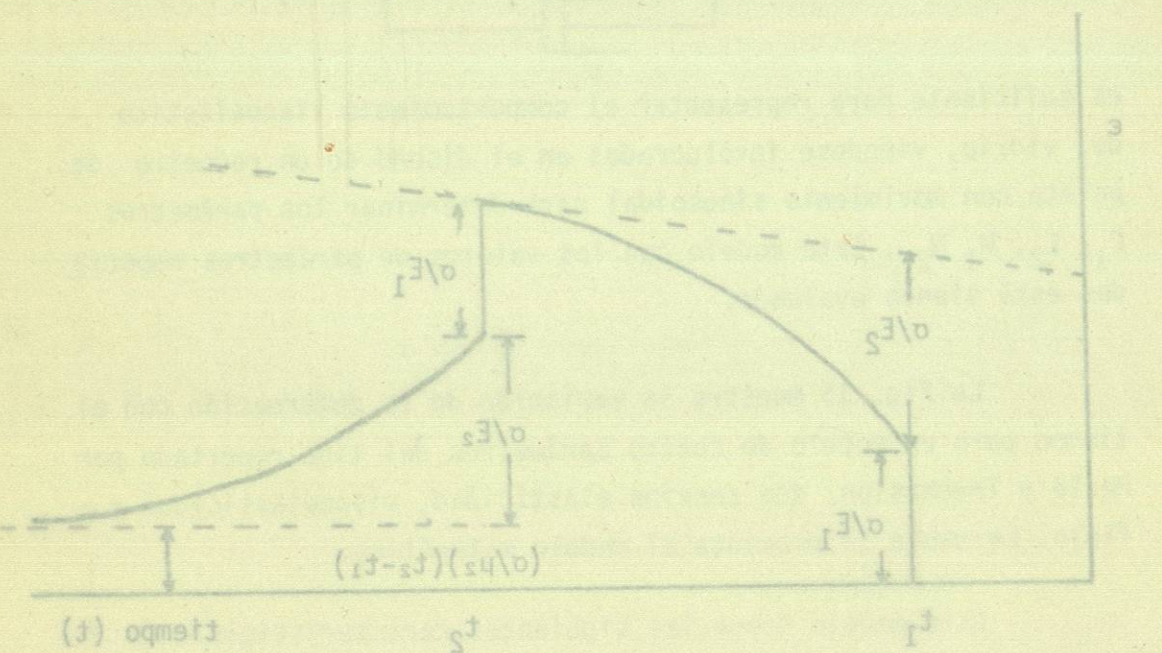


Fig. 15 Relación técnica, deformación - tiempo para un modelo mecánico de cuatro parámetros del tipo propuesto por Merle y Truchasson. A  $t_1$  se expone el modelo a un  $\sigma = cte$  y en  $t_2$  se elimina el esfuerzo (16).

Las ecuaciones diferenciales, Creep Compliance  $J(t)$  y módulos de relajación  $Y(t)$ , de los anteriores y otros modelos se presentan en la tabla 14.

3.- El flujo viscoso no se recupera.

4.- El elemento viscoelástico se relaja lentamente.

5.- Al suprimir el esfuerzo constante a un tiempo  $t_2$ , el elemento elástico se relaja inmediatamente.

Tabla 14. Modelos viscoelásticos con sus correspondientes ecuaciones diferenciales, Creep y módulos de relajación y compliáncias complejas (17).

Modelo	Diagrama	Ecuaciones diferenciales		Módulo de relajación $\rho(t)$	Compliáncia compleja $J^*(\omega)$
		Relajación	Creep		
Modelo 1		$\sigma = E \epsilon$	$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$	$\rho = E$	$J^* = \frac{1}{E}$
Modelo 2		$\dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon}$	$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta}$	$\rho = \eta t$	$J^* = \frac{1}{i\omega\eta}$
Modelo 3		$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon}$	$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\eta}{E} \dot{\epsilon}$	$\rho = E \left( 1 + \frac{\eta}{E} \dot{\epsilon} \right)$	$J^* = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{\eta}{E} i\omega \right)$
Modelo 4		$\sigma = E \epsilon_1 = \eta \dot{\epsilon}_2$	$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$\rho = E \eta t$	$J^* = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta}$
Modelo 5		$\sigma = E_1 \epsilon + \eta \dot{\epsilon} + E_2 \epsilon$	$\epsilon = \frac{\sigma}{E_1 + E_2} + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon}$	$\rho = (E_1 + E_2) \left( 1 + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\epsilon} \right)$	$J^* = \frac{1}{E_1 + E_2} \left( 1 + \frac{\eta}{E_1 + E_2} i\omega \right)$
Modelo 6		$\sigma = E_1 \epsilon + \eta \dot{\epsilon} = E_2 \epsilon_2$	$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$	$\rho = E_1 \left( 1 + \frac{\eta}{E_1} \dot{\epsilon} \right) + E_2 \epsilon_2$	$J^* = \frac{1}{E_1} \left( 1 + \frac{\eta}{E_1} i\omega \right) + \frac{1}{E_2}$
Modelo 7		$\sigma = E_1 \epsilon_1 = \eta \dot{\epsilon}_2 = E_2 \epsilon_3$	$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$	$\rho = E_1 \eta t + E_2 \eta t$	$J^* = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{i\omega\eta} + \frac{1}{E_2}$

Modelo de Lennard-Jones. tiempo se puede comparar la relajación de esfuerzos para el modelo de Lennard-Jones y para sílica fundida. Otro intento de explicar el comportamiento viscoelástico del vidrio, es el presentado por S.M. Rekhson, y colaboradores (19) en el XII Congreso Internacional sobre vidrio.

Se ha demostrado que una función empírica muy satisfactoria de la energía potencial de interacción entre dos moléculas es el "Potencial (6-12) de Lennard-Jones".

$$\phi(r) = -4\mu \left( \frac{a}{r} \right)^6 - \left( \frac{a}{r} \right)^{12} \quad (23)$$

Donde a es un diámetro característico de la molécula (el diámetro de colisión) y  $\mu$  una energía característica de interacción entre las moléculas (energía de atracción máxima entre dos moléculas). Esta función se representa en la Fig. 16, que pone de manifiesto los caracteres típicos de las interacciones moleculares, débil atracción para grandes separaciones (prácticamente proporcional a  $r^{-6}$ ) y fuerte repulsión para separaciones pequeñas (aproximadamente proporcional a  $r^{-12}$ ). La ecuación (23) resulta muy satisfactoria para numerosas moléculas no polares (10).

Comportamiento lineal, Relajación de Esfuerzos.

La Ecuación (24) a  $t \rightarrow \infty$ ,  $\sigma(t \rightarrow \infty) / \epsilon = \eta = E_0 \int_0^\infty dt \theta(t)$  es most... Considerando primero el comportamiento lineal a pequeños esfuerzos y deformaciones. La Fig. 17 muestra la relajación de esfuerzos cuando una deformación es aplicada en un instante  $t=0$  y es mantenida constante. El artículo de S.M. Rekhson y colaboradores (19) se está analizando en detalle para ver si el modelo que ellos proponen predice con exactitud el comportamiento viscoelástico del vidrio.

Otro intento de explicar el comportamiento viscoelástico del vidrio, es el presentado por S.M. Rekhson, y colaboradores (19) en el XII Congreso Internacional sobre vidrio.

Se ha demostrado que una función empírica muy satisfactoria de la energía potencial de interacción entre dos moléculas es el "potencial (6-12) de Lennard-Jones".

$$\phi(r) = -\frac{A}{r^{12}} + \frac{B}{r^6} \quad (23)$$

Donde  $A$  es un diámetro característico de la molécula (el diámetro de colisión) y  $B$  una energía característica de interacción entre las moléculas (energía de atracción máxima entre dos moléculas). Esta función se representa en la Fig. 16, que pone de manifiesto los caracteres típicos de las interacciones moleculares, débiles a grandes separaciones (prácticamente proporcionales a  $r^{-6}$ ) y fuerte repulsión para separaciones pequeñas (aproximadamente proporcional a  $r^{-12}$ ). La ecuación (23) resulta muy satisfactoria para numerosas moléculas no polares (20).

Considerando primero el comportamiento lineal a pequeños esfuerzos y deformaciones. La Fig. 17 muestra la relajación de esfuerzos cuando una deformación es aplicada en un instante  $t=0$  y es mantenida constante.

Ajustando escalas de tiempo se puede comparar la relajación de esfuerzos para el modelo de Lennard-Jones y para sílica fundida. Los datos usados para el  $SiO_2$  son los reportados por Lenko y Mescheryakova (20).

Viscosidad.

El próximo paso es aplicar el modelo LJ a alguna de las ecuaciones de teoría lineal de viscoelasticidad, las cuales son válidas para vidrios inorgánicos. La ecuación deberá relacionar la relajación de esfuerzos normalizado,  $\phi(t)$ , el módulo de elasticidad,  $E_\infty$ , la viscosidad del material es.

$$\eta = E_\infty \int_0^\infty dt \phi(t) \quad (24)$$

En ref. (20)  $\eta$  fue computada para el sistema de LJ usando  $E_\infty$  y  $\theta(t)$  de experimentos de relajación de esfuerzos a deformación constante  $\epsilon$ . El experimento para el modelo de LJ se basó en aplicar un gradiente de velocidad constante  $\dot{\epsilon}$  a un tiempo  $t=0$  y determinar el esfuerzo como respuesta.

$$\sigma(t) = \dot{\epsilon} E_\infty \int_0^t dt' \phi(t') \quad (25)$$

La Ecuación (24) a  $t \rightarrow \infty$ ,  $\sigma(t \rightarrow \infty) / \dot{\epsilon} = \eta = E_\infty \int_0^\infty dt \theta(t)$  es mostrada en fig. 18, la pendiente inicial es  $E_\infty \dot{\epsilon}$  y a tiempos grandes es  $\eta \cdot \dot{\epsilon}$ .

El estudio de S.M. Rekhson y colaboradores (19) se está analizando en detalle para ver si el modelo que ellos proponen predice con exactitud el comportamiento viscoelástico del vidrio.

Ajustando escalas de tiempo se puede comparar la relajación de esfuerzos para el modelo de Lennard-Jones y para sílica fundida. Los datos usados para el  $\sigma_{ij}$  son los reportados por Lenko y Mescheriakova (20).

Viscosidad.

El próximo paso es aplicar el modelo LJ a algunas de las ecuaciones de teoría lineal de viscoelasticidad, las cuales son válidas para vibraciones inorgánicas. La ecuación deberá relacionar la relajación de esfuerzos normalizados  $\phi(t)$ , el módulo de elasticidad  $E_{\infty}$  y la viscosidad del material  $\eta$ .

$$\eta = E_{\infty} \int_0^{\infty} \phi(t) dt \quad (24)$$

En ref. (20) se fue computada para el sistema de LJ usando  $E_{\infty}$  y  $\phi(t)$  de experimentos de relajación de esfuerzos a deformación constante. El experimento para el modelo de LJ se basó en aplicar un gradiente de velocidad constante a un tiempo  $t_0$  y determinar el esfuerzo como respuesta.

$$\sigma(t) = E_{\infty} \int_0^t \dot{\phi}(t') dt' \quad (25)$$

La Ecuación (24) a  $t = \infty$ ,  $\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon}$  y  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0$  y a tiempos grandes mostrada en fig. 18, la pendiente inicial es  $E_{\infty} \dot{\epsilon}_0$  y a tiempos grandes es  $\eta \dot{\epsilon}_0$ .

El estudio de S.M. Reikson y colaboradores (19) se está analizando en detalle para ver si el modelo que ellos proponen predice con exactitud el comportamiento viscoelástico del vidrio.

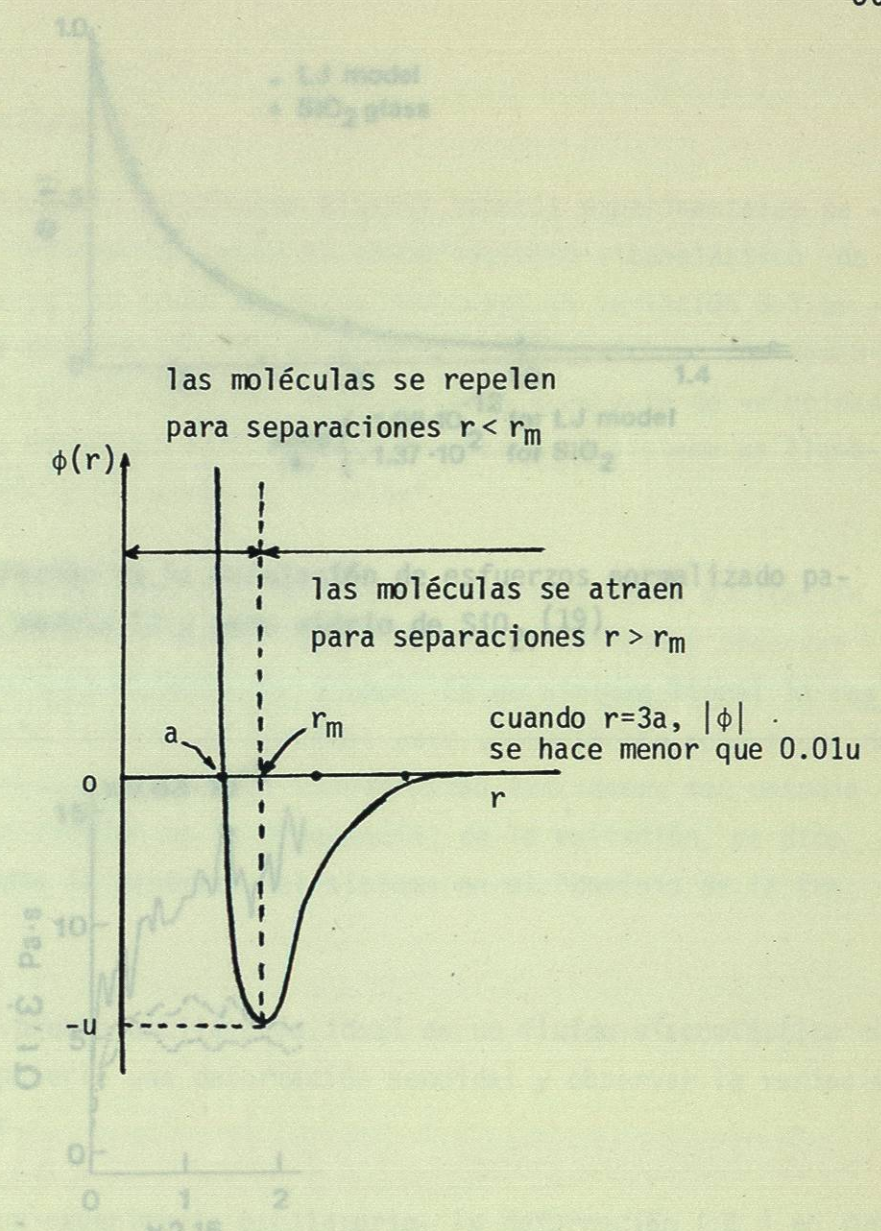


Fig. 17

Fig. 16. Función de energía potencial que describe la interacción de dos moléculas esféricas no polares. La Ecuación (23) es una de las muchas ecuaciones empíricas propuestas para el ajuste de esta curva. (10)

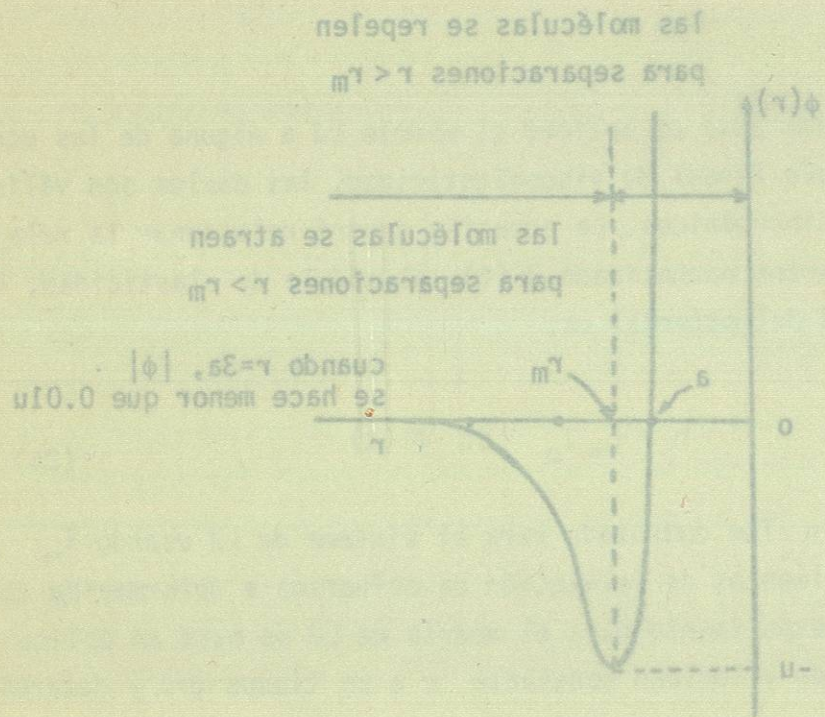


Fig. 16. Función de energía potencial que describe la interacción de dos moléculas estéricas no polares. La ecuación (23) es una de las muchas ecuaciones empíricas propuestas para el ajuste de esta curva (10).

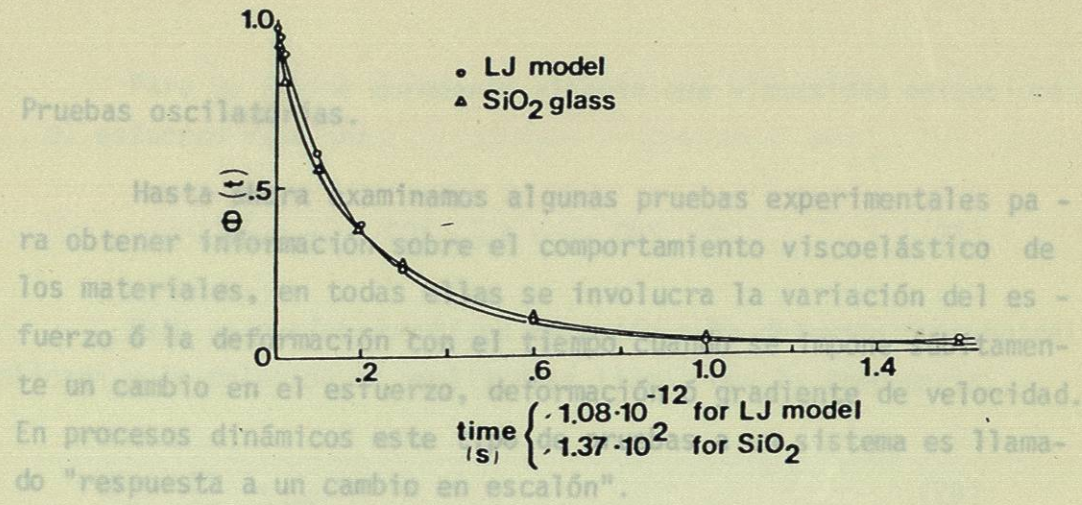


Fig. 17 Comparación de la Relajación de esfuerzos normalizado para el modelo LJ y para vidrio de SiO<sub>2</sub>. (19).

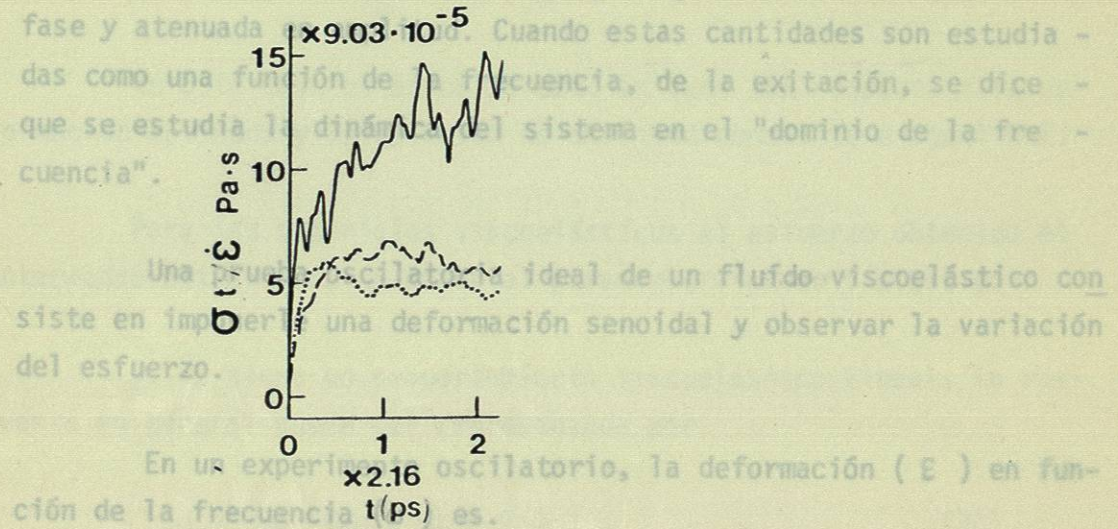


Fig. 18 Dependencia del tiempo del esfuerzo,  $\sigma(t)/\dot{\epsilon}$  para el modelo de Lennard-Jones (19)

(26)

(27)