

ÁREA II

Trigonometría
Plana

4to. Semestre



Preparatoria

Núm. 15

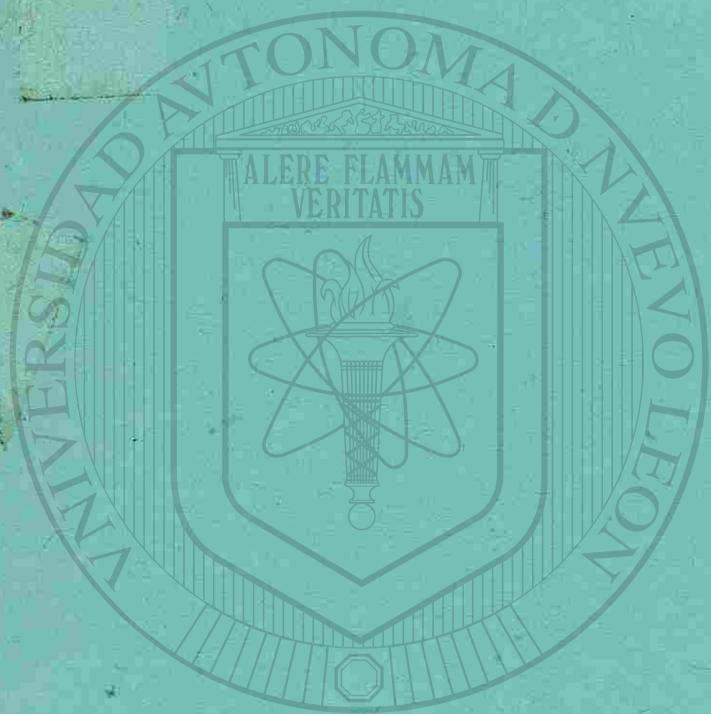
QA 533
G3

Trigonometría Plana • 4to. Semestre

0113 - 22760



1020115131

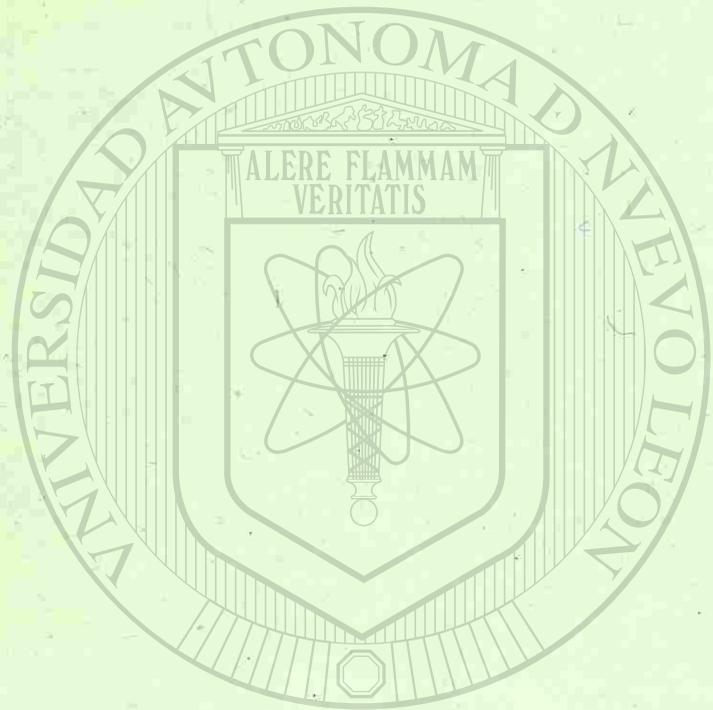


UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





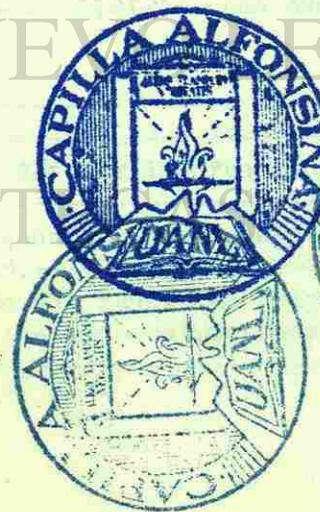
MATEMÁTICAS IV.

UANI

Ing. Miguel Angel Garza Tamez.
Ing. José Luis Guerra Torres.
Ing. Pablo Rivera Carrillo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



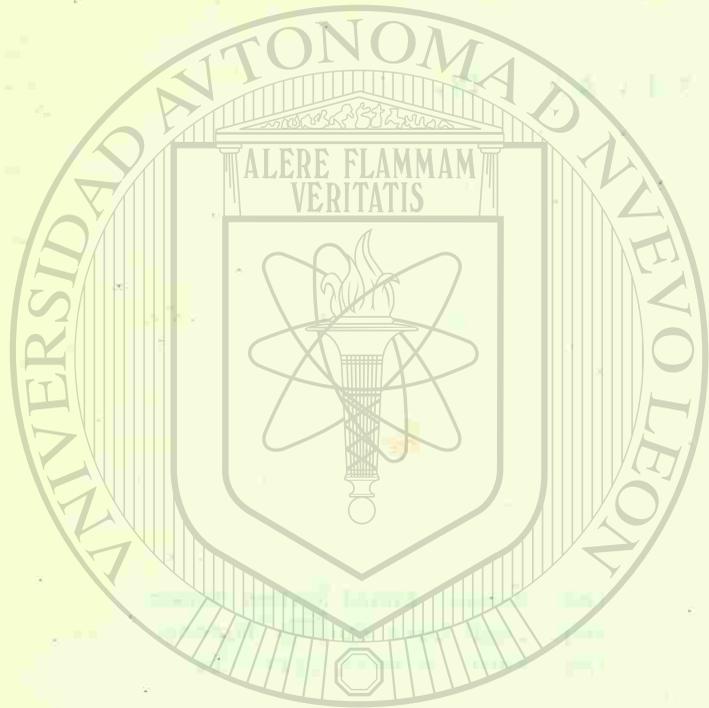
FONDO UNIVERSITARIO

65337

2690

Q4533

G3



I N D I C E.

PÁG.

PRÓLOGO.....	I
CONCEPTOS PRELIMINARES.....	i

CAP.

I	FUNCIONES TRIGONÓMICAS DE ÁNGULOS AGUDOS.	VI
1-1	Introducción.....	1
1-2	Definición de trigonometría.....	2
1-3	Empleo de las tablas trigonométricas.....	7
1-4	Dado el valor de una función, determinar las restantes.....	12
1-5	Relaciones recíprocas.....	15
1-6	Funciones de ángulos de 30°, 45° y 60°.....	20
1-7	Aplicación de las funciones trigonométricas.....	23
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo I.....	41

II	FUNCIONES TRIGONÓMICAS PARA ÁNGULOS MAYORES DE 90°.	
2-1	Introducción.....	45
2-2	Ángulos.....	46
2-3	Otra forma de definir las funciones trigonométricas.....	54
2-4	Funciones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud.....	63
2-5	Variaciones de las funciones trigonométricas.....	90
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo II.....	97

2690

CAP.		PÁG.
III	MEDIDAS CIRCULARES.	
3-1	Introducción.-----	103
3-2	Definición de radián.-----	104
3-3	Relación entre grados y radianes.-----	105
3-4	Ángulo central y longitud de un arco.-----	109
3-5	Velocidad angular y velocidad lineal.-----	110
3-6	Área de un sector circular.-----	115
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo III.-----	119

IV ECUACIONES IDÉNTICAS Y CONDICIONALES.
LECCIÓN 1. Ecuaciones Trigonométricas Idénticas.

4-1	Introducción.-----	121
4-2	Ecuaciones.-----	121
4-3	Identidades trigonométricas fundamentales.-----	122
4-4	Empleo de las relaciones fundamentales.-----	128
4-5	Demostraciones de identidades.-----	136
	Respuestas a las autoevaluaciones de la Lección 1.-----	143

LECCIÓN 2. Ecuaciones Trigonométricas Condicionales.

4-6	Introducción.-----	145
4-7	Ecuaciones trigonométricas condicionales.-----	145
	Respuestas a las autoevaluación de la Lección 2.-----	155

CAP.		PÁG.
V	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.	
5-1	Introducción.-----	157
5-2	Ley de los senos.-----	159
5-3	Área de un triángulo.-----	160
5-4	Ley de los cosenos.-----	167
5-5	Resolución de los cosenos C y D por medio de triángulos semejantes.-----	172
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo V.-----	177

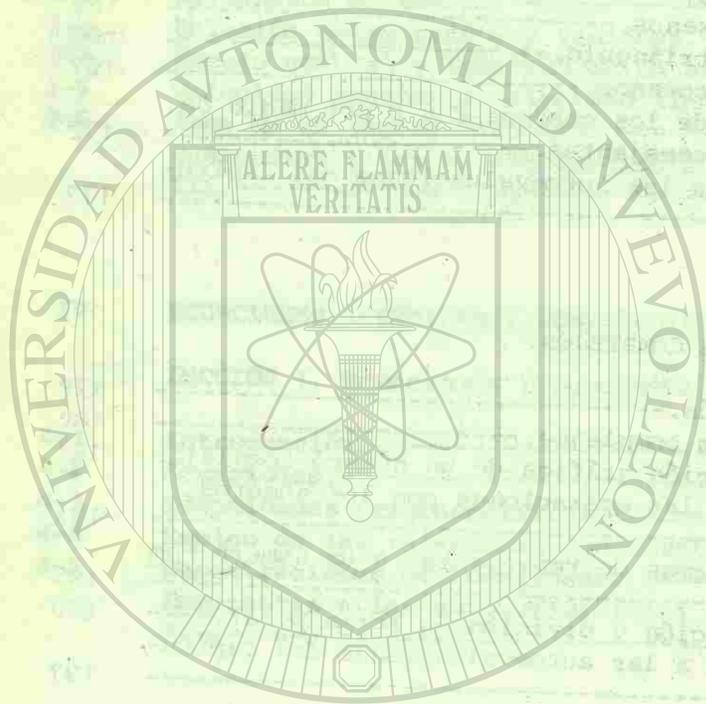
VI LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

6-1	Introducción.-----	179
6-2	Los números complejos.-----	180
6-3	Representación gráfica de un número complejo.-----	182
6-4	Recordando las operaciones con los números complejos.-----	183
6-5	Las dos formas de representar a un número complejo.-----	185
6-6	Multiplicación y división en forma polar.-----	190
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo VI.-----	197

	APÉNDICE.-----	199
--	----------------	-----

	TABLAS TRIGONÓMICAS.-----	203
--	---------------------------	-----

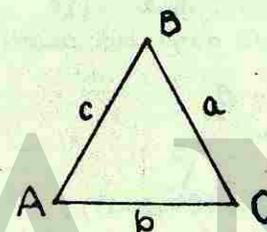
	BIBLIOGRAFÍA.-----	209
--	--------------------	-----



CONCEPTOS PRELIMINARES.

En esta sección veremos algunos conceptos y teoremas que frecuentemente los vamos a estar usando.

Notación. En cualquier triángulo, sus ángulos se expresarán por medio de letras mayúsculas, o bien, utilizando letras del alfabeto griego como theta (θ), gamma (γ), alfa (α), etc. Los lados del triángulo se denotarán con letras minúsculas.



$$\sphericalangle A = \sphericalangle BAC$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle ABC$$

$$\sphericalangle C = \sphericalangle BCA$$

lado a = al segmento \overline{BC}

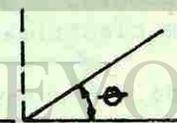
lado b = al segmento \overline{AC}

lado c = al segmento \overline{AB}

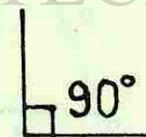
El triángulo de arriba se denota como ΔABC .

Con respecto a los ángulos, existen los siguientes:

a) *Ángulo agudo.* Es el menor que 90° ($\theta < 90^\circ$).



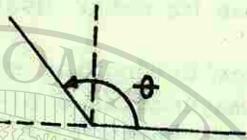
b) *Ángulo recto.* Es el igual a 90° ($\theta = 90^\circ$).[®]



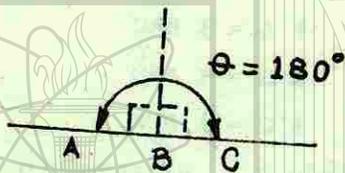
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

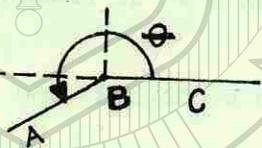
c) *Angulo obtuso.* Es mayor que 90° pero menor que 180° . ($90^\circ < \theta < 180^\circ$).



d) *Angulo llano.* Es igual a 180° . ($\theta = 180^\circ$).

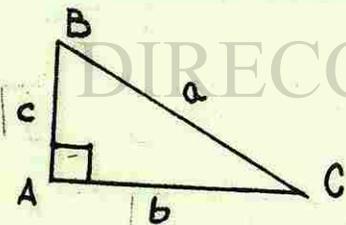


e) *Angulo cóncavo.* Es mayor que 180° . ($\theta > 180^\circ$).



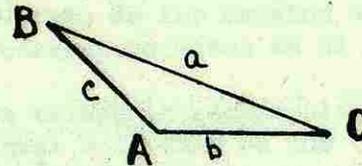
Clasificación de los triángulos. De tal suerte que, los triángulos se clasifican de acuerdo a sus ángulos o sus lados. Con respecto a sus ángulos se clasifican en:

i) *Triángulos rectángulos.* Son aquellos triángulos que tienen uno y sólo uno, ángulo recto.



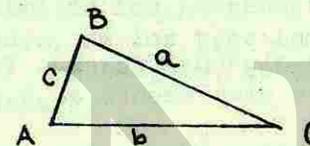
* A es recto

ii) *Triángulos obtusángulos.* Son aquellos triángulos que tienen uno y sólo uno, ángulo obtuso,



* A es obtuso

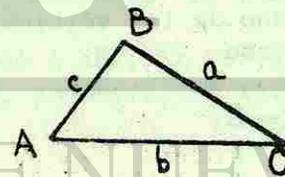
iii) *Triángulos acutángulos.* Son aquellos triángulos que tienen sus tres ángulos agudos.



* A, B y C son agudos

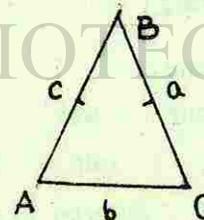
De acuerdo con sus lados, los triángulos pueden ser:

i) *Triángulo escaleno.* Es aquel triángulo que no tiene sus tres lados iguales.



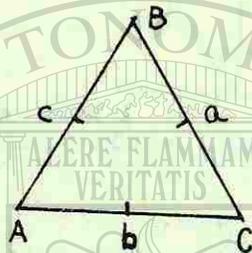
$c \neq a \neq b$

ii) *Triángulo isósceles.* Es aquel triángulo que tiene al menos dos de sus tres lados iguales.



$a = c$

iii) *Triángulo equilátero.* Es aquel triángulo que tiene sus tres lados iguales.



$$a = b = c$$

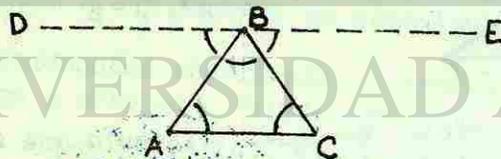
Algunos teoremas fundamentales.

A continuación se enumeran algunos teoremas fundamentales, demostrando algunos y otros simplemente se expondrán.

- 1) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano ($A + B + C = 180^\circ$).

Demostración:

Sea el ΔABC . Tracemos por uno de los vértices del triángulo la paralela al lado opuesto



De aquí se puede observar que:

a) El $\sphericalangle DBE = 1$ ángulo llano.

b) $\sphericalangle DBA + \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE = DBE$

Pero como el $\sphericalangle DBA = \sphericalangle A$, $\sphericalangle CBE = \sphericalangle C$, tenemos que:

$$A + B + C = 1 \text{ ángulo llano}$$

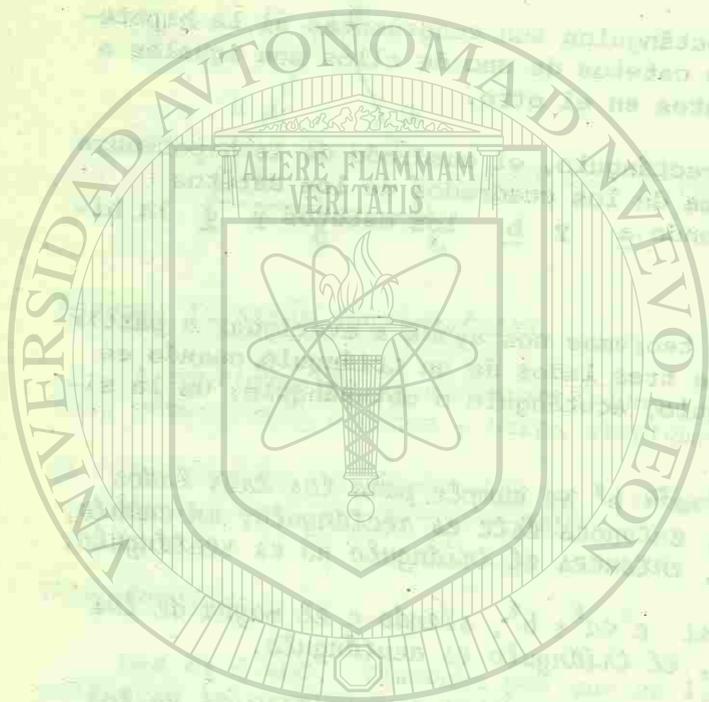
$$A + B + C = 180^\circ$$

- 2) Si los tres ángulos de un triángulo son iguales a los correspondientes de otro, los dos triángulos son semejantes.
- 3) Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de uno de ellos son iguales a sus correspondientes en el otro.
- 4) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ($a^2 + b^2 = c^2$), siendo a y b los catetos y c la hipotenusa.

El último de los teoremas nos ayuda a averiguar a partir de datos dados, de los tres lados de un triángulo, cuando es un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo; de la siguiente manera:

- a) Si la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ se cumple para los tres lados de un triángulo, entonces éste es rectángulo; en cambio, si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces el triángulo no es rectángulo.
- b) En todo ΔABC , si $c^2 < a^2 + b^2$, siendo c el mayor de los lados, entonces, el triángulo es acutángulo.
- c) En todo ΔABC , si $c^2 > a^2 + b^2$, siendo c el mayor de los lados, entonces, el triángulo es obtusángulo.





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE ESTUDIOS

40. SEMESTRE.

AREA II.

UNIDAD I.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS.

Con esta unidad comenzamos el estudio de la Trigonometría. La palabra trigonometría se deriva de los vocablos griegos "tri-gonos-metron", que significa "tres-ángulos-medicación". De esta suerte, en Trigonometría, se estudia la medición o resolución de triángulos dados tres elementos que no sean los tres ángulos.

En esta unidad veremos las funciones trigonométricas de ángulos agudos y aprenderás a definir las y a aplicarlas en la resolución de triángulos rectángulos y en problemas expresados en palabras. Además, veremos los valores de ángulos conocidos como lo son los de 30° , 45° y 60° .

Al término de esta unidad el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

- 1.- Definir correctamente el concepto TRIGONOMETRIA PLANA.
- 2.- Definir correctamente las funciones trigonométricas para cualquier ángulo agudo.
- 3.- Usar correctamente las tablas trigonométricas para encontrar el valor numérico de cualquier función, dado el ángulo y viceversa.
- 4.- Sin usar tablas, encontrar los valores numéricos de las funciones, dado al menos el valor de una de ellas.
- 5.- Aplicar correctamente las razones recíprocas y las cofunciones a las funciones trigonométricas.

- 6.- Sin usar tablas, encontrar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos 30° , 45° y 60° .
- 7.- Aplicar los conocimientos de trigonometría en la solución de problemas verbales que los involucren.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Antes de que empieces a resolver la unidad, te recomendamos que leas los conceptos preliminares, para que visualices la nomenclatura que vamos a usar a través del curso. Así mismo, para que logres distinguir los diferentes triángulos dependiendo de los lados o ángulos y los teoremas que vamos a aplicar.
- 2.- Para que resuelvas satisfactoriamente la unidad, estudia el capítulo I. Es importante el hecho de que sepas definir el concepto trigonometría y trates de comprenderlo. Al final del libro vienen las tablas trigonométricas que te ayudarán a resolver el objetivo 3. Ten cuidado en la forma de localizar valores de ángulos mayores de 45° .

Para el objetivo 4, usa el teorema de Pitágoras y un triángulo de referencia, para que coloques tus datos conocidos y encuentres el lado que falta. Te recomendamos, sepas distinguir claramente los lados opuestos y adyacentes al ángulo, para que des el valor correcto de las demás funciones por definición.

Para el objetivo 5, te recomendamos distingás las cofunciones de las recíprocas y en particular cuida el ángulo, ya que, mientras que en las recíprocas no cambia, en las cofunciones sí. Para el objetivo 6 es cuestión que te graves los valores de los lados.

Para el objetivo 7, te recomendamos leas los pasos que se sugieren que vienen al final de la sección 7.

- 3.- Resuelve como autoevaluación de esta unidad la autoevaluación del capítulo. En caso de tener alguna duda, favor de consultarla con tu asesor.

CAPÍTULO I

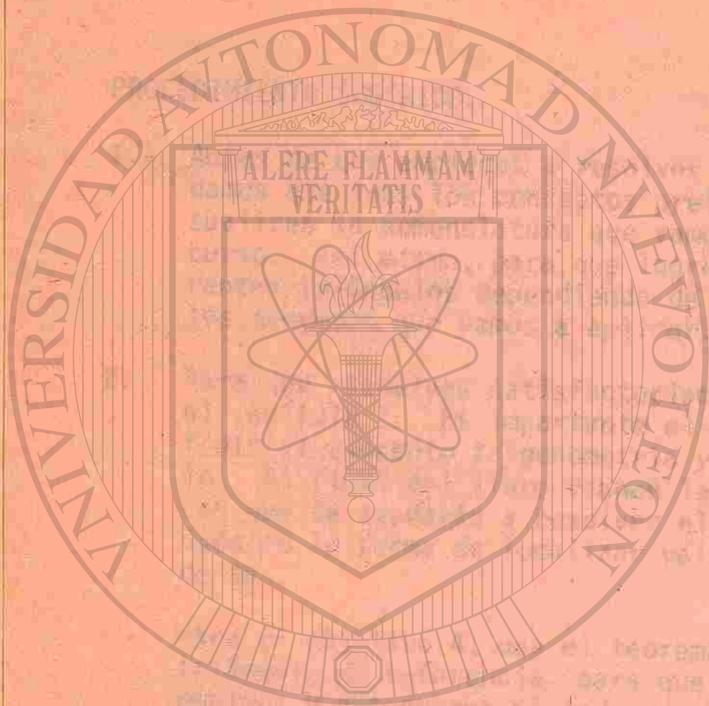
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

1.- INTRODUCCIÓN.

El estudio de la trigonometría se remonta a los antiguos griegos, quienes se dedicaron a investigar los misterios y maravillas del universo. Para ello, utilizaron los conocimientos matemáticos que habían adquirido, como el cálculo de áreas y volúmenes, para medir la altura de las montañas y la distancia entre los puntos de la tierra. Los griegos descubrieron que los triángulos rectángulos eran fundamentales para estos cálculos, y desarrollaron las funciones trigonométricas que hoy conocemos.

En el siglo III, el matemático griego Hiparco de Nicea, quien fue el primero en utilizar el concepto de arco, descubrió que las funciones trigonométricas podían ser representadas por las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Este descubrimiento fue fundamental para el desarrollo de la trigonometría.

En el siglo VI, el matemático indio Brahmagupta descubrió que las funciones trigonométricas podían ser representadas por las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Este descubrimiento fue fundamental para el desarrollo de la trigonometría.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL DE

CAPITULO 1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS.

1-1 INTRODUCCIÓN.

El estudio de la trigonometría nació hasta el siglo XVI, como el deseo del hombre de investigar los misterios y maravillas del universo. Había servido, desde los primitivos babilonios hasta justamente antes de Descartes, como un auxiliar puramente práctico de la agrimensura, la astronomía y la navegación. Esta ciencia les permitía calcular distancias no mensurables, aplicando ciertas reglas básicas acerca de las relaciones entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo, por grande o pequeño que fuera.

Hacia el año 150 A.C., el matemático y astrónomo griego Hiparco, catalogó y localizó más de 800 estrellas, a través de esta ciencia. Más después, Menelao escribió un tratado de Trigonometría esférica. Estos dos matemáticos consideraron la trigonometría como una herramienta útil para el estudio de la astronomía.

Hacia el año 150 D.C., el astrónomo egipcio Ptolomeo en Alejandría, dieron a la astronomía y trigonometría esférica un tremendo impulso. Hasta ese momento la trigonometría se consideró como parte de la astronomía, y centró su interés en los triángulos esféricos más bien que en triángulos planos.

Hacia el año 1,500 D.C., cuando la trigonometría se in-

Introduce en Inglaterra y particularmente en Alemania, las funciones trigonométricas se consideraron como razones, en vez de tomarse como segmentos rectilíneos y las aplicaciones de la trigonometría a la topografía vinieron a ser muy importantes. La trigonometría contribuyó al progreso de toda clase de instrumentos de medida, notablemente el teodolito y el sextante.

Hacia el siglo XVIII, la trigonometría que empezó como herramienta de la astronomía y más tarde de la topografía, llegó a ser una rama de la matemática por derecho propio.

1-2 DEFINICIÓN DE TRIGONOMETRÍA.

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia la medida de los tres ángulos y lados de un triángulo.

También se le ha definido a la trigonometría como la ciencia de la medida indirecta, ya que, por medio de ésta pueden ser calculadas distancias que no se pueden medir directamente, como la profundidad de un precipicio o la altura de una montaña o la distancia de la tierra a la luna.

La palabra trigonometría proviene de tres vocablos griegos que significan "tres - ángulos - medida", e indican que su tema principal de estudio está relacionado con las medidas de un triángulo

La trigonometría plana, que es la que estudiaremos en este libro, se limita a los triángulos contenidos en los planos. La trigonometría esférica estudia ciertos ángulos trazados sobre esferas.

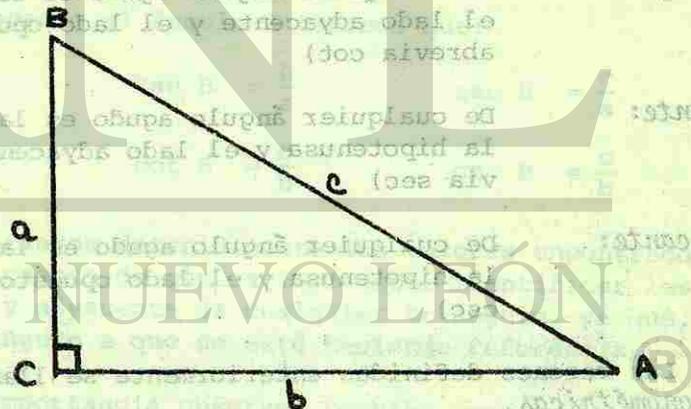
La trigonometría se originó del estudio de las relaciones de los lados de los triángulos rectángulos y luego se extendió a una variedad de triángulos.

El triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas.

Ya conocemos el triángulo rectángulo. Sabemos que sus catetos son los lados que forman el ángulo recto, y que la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos, y conocemos el teorema de Pitágoras ($a^2 + b^2 = c^2$).

Ahora veamos cómo se relacionan los lados y ángulo de un triángulo rectángulo.

Dado un triángulo rectángulo.



tenemos que, la forma en que se relacionan los lados son:

$$\frac{c}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}$$

Cada una de estas razones recibe un nombre en especial dependiendo al ángulo que se esté haciendo referencia. Los nombres son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Cada uno de estos nombres se definen a continuación:

Seno: De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado opuesto (L.O.) y la hipotenusa. (Se abrevia sen)

Coseno: De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado adyacente (L.A.) y la hipotenusa. (Se abrevia cos)

Tangente: De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado opuesto y el adyacente. (Se abrevia tan)

Cotangente: De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado adyacente y el lado opuesto. (Se abrevia cot)

Secante: De cualquier ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el lado adyacente. (Se abrevia sec)

Cosecante: De cualquier ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el lado opuesto. (Se abrevia csc)

Las razones definidas anteriormente se llaman *funciones trigonométricas*.

Por ejemplo, en el ΔABC , con respecto al ángulo A, tenemos que las funciones son:

$$\text{sen } A = \frac{\text{L.O. del ángulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{L.A. del ángulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{L.O. del ángulo}}{\text{L.A. del ángulo}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{L.A. del ángulo}}{\text{L.O. del ángulo}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{L.A. del ángulo}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{csc } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{L.O. del ángulo}} = \frac{c}{a}$$

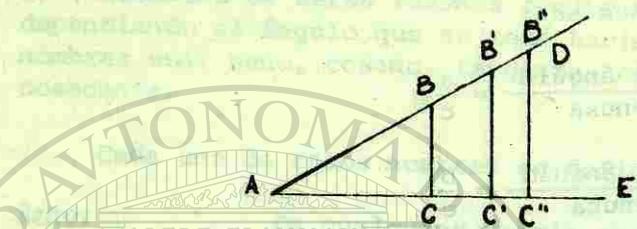
Con respecto al ángulo B tenemos que:

$$\text{sen } B = \frac{b}{c} \qquad \text{tan } B = \frac{b}{a} \qquad \text{sec } B = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos } B = \frac{a}{c} \qquad \text{cot } B = \frac{a}{b} \qquad \text{csc } B = \frac{c}{b}$$

Si observamos detenidamente los valores encontrados, nos daremos cuenta de que es importante identificar los lados opuesto y adyacente de cualquier triángulo, ya que, dependen del ángulo a que se esté haciendo referencia.

Es de importancia observar también que, los valores de las funciones trigonométricas dependen solamente de la magnitud del *ángulo*, y son completamente independientes de la longitud de los lados del triángulo rectángulo que lo contienen.



Sean B, B', B'', puntos sobre la recta AD y C, C', C'', puntos sobre la recta AE, de tal manera que las rectas BC, B'C', B''C'', sean perpendiculares a la recta AE, formando así triángulos rectángulos. Por definición, tenemos:

$$\text{sen } A = \frac{BC}{AB}; \quad \text{sen } A = \frac{B'C'}{AB'} \quad \text{y} \quad \text{sen } A = \frac{B''C''}{AB''}$$

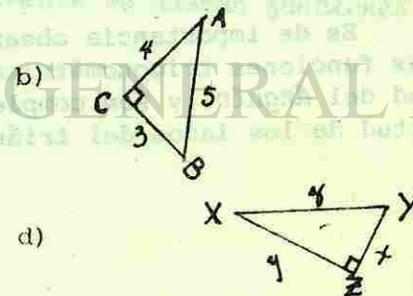
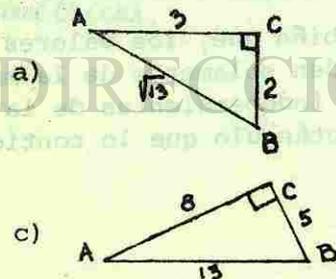
Pero como los triángulos rectángulos ABC, AB'C' y AB''C'' son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, esto es:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

Lo anterior nos dice que, los valores obtenidos para sen A son iguales.

AUTOEVALUACION 1.

1.- En cada uno de los siguientes triángulos, encuentra las funciones trigonométricas para los dos ángulos agudos.



1-3 EMPLEO DE LAS TABLAS TRIGONOMETRICAS.

En la sección anterior definimos las funciones trigonométricas en términos de sus lados, para cualquier triángulo rectángulo. Ahora, en esta sección veremos el uso y manejo de las tablas trigonométricas que nos sirven para:

- 1.- Encontrar el valor numérico de cualquier función, dado el ángulo.
- 2.- Encontrar el ángulo dado el valor numérico de la función trigonométrica.

Las tablas trigonométricas contienen los valores de las funciones de ángulos comprendidos entre 0° y 90° con intervalos regulares de diez minutos. (ver tabla al final del libro).

La forma de usar las tablas es la siguiente:

a) Si el ángulo es menor de 45°, se localiza el ángulo en la columna izquierda. Luego que se localiza el ángulo deseado se recorre la línea con la vista hasta la columna en cuya parte superior aparece la función deseada. Ahí encontrará el valor de la función deseada.

EJEMPLO 1.

Encontrar el valor de sen 40°10'.

SOLUCIÓN:

Buscamos primero el ángulo de 40°10' del lado izquierdo de las tablas hasta localizarlo.

Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos
0° 0'							
10'							
20'							
30'							
40'							
50'							
1° 0'							
.							
.							
.							
.							
40° 0'							
*10'							
20'							
30'							
40'							
50'							

Luego, siguiendo con la vista la línea del ángulo, buscamos la columna que contenga los valores de la función "seno" y donde se intersecten ambas líneas (columna de la función y línea del ángulo), ahí encontremos el valor de la función.

Grados	Radianes	*Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos
0° 0'							
10'							
20'							
30'							
40'							
50'							
1° 0'							
.							
.							
.							
.							
40° 0'							
*10'		→ .6450					

de donde $\text{Sen } 40^\circ 10' = 0.6450$.

Es importante observar que en la mayor parte de las veces, la primera cifra del valor de cada función está impresa sólo para cada medio grado, por lo que, cuando se omite, debe buscarse (arriba) hasta encontrar la línea en la que la primera cifra está impresa. Dicha cifra debe incluirse en el valor determinado.

b) Si el ángulo es mayor de 45° , se localiza el ángulo en la columna derecha. Luego que se localiza el ángulo, se recorre la línea con la vista (de derecha a izquierda) hasta la columna en cuya parte inferior aparece la función deseada. Ahí, donde se intersectan ambas líneas, encontrará el valor numérico de la función.

EJEMPLO 1

Encontrar el valor de $\tan 72^{\circ}30'$.

SOLUCIÓN:

Buscamos en la columna derecha (grados) el ángulo dado ($72^{\circ}30'$). Luego, buscamos la función tangente en la parte inferior y donde se crucen estas dos líneas, ahí encontramos el valor de $\tan 72^{\circ}30'$ que es 3.172.

Es importante observar que los ángulos cuando sean mayores de 45° están ordenados crecientemente de abajo hacia arriba, por lo que se debe tener cuidado al localizar los minutos, que se deben leer en la parte superior de la columna de los grados dados y no abajo. Observe que en el ejemplo se hizo esto, es decir, una vez que se localizó los grados (72°) se buscó luego la cantidad de minutos arriba de 72° que en este caso fueron $30'$.

Frecuentemente ocurre que en lugar de tener que determinar la tangente de un ángulo dado, sea necesario obtener el ángulo al cual corresponda una función dada.

Cuando el valor decimal dado aparece exactamente en una de las columnas de la función dada, ya sea a la cabeza o en su pie, sólo necesitamos leer la intersección de las columnas adecuadas, el ángulo a que corresponde.

EJEMPLO 3.

Si $\tan A = 3.412$, determinar A.

SOLUCIÓN:

Puesto que $\tan A = 3.412$, buscamos en las tablas, en la columna que tiene "tan", en su pie. Entonces leemos a la derecha que $A = 73^{\circ}40'$.

Para un mejor manejo de las tablas hay que ver cómo varían los valores de las funciones trigonométricas con respecto al ángulo. Así podemos observar que, mientras el ángulo crece el valor numérico de: a) el seno crece, b) el coseno,

decrece, c) la tangente crece, d) la cotangente decrece, e) la secante crece y f) la cosecante decrece.

Se deja al alumno la comprobación de lo anterior.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Encuentre los valores numéricos de las funciones siguientes:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1.- $\sin 30^{\circ}$ | 5.- $\cot 89^{\circ}50'$ |
| 2.- $\cos 60^{\circ}$ | 6.- $\csc 13^{\circ}20'$ |
| 3.- $\tan 30^{\circ}30'$ | 7.- $\cos 61^{\circ}$ |
| 4.- $\sec 75^{\circ}20'$ | 8.- $\tan 80^{\circ}40'$ |

Encontrar el valor del ángulo en los siguientes problemas:

- | | |
|-----------------------------|------------------------|
| 9.- $\sin C = 0.1478$ | 13.- $\cot M = 0.4522$ |
| 10.- $\tan B = 0.4522$ | 14.- $\sec X = 1.255$ |
| 11.- $\cos X = 0.7880$ | 15.- $\cos A = 0.1478$ |
| 12.- $\csc \theta = 1.1880$ | 16.- $\sin B = 0.9775$ |

1-4 DADO EL VALOR DE UNA FUNCIÓN, DETERMINAR LAS RESTANTES.

Frecuentemente se conoce una función de un ángulo y se desea determinar las demás funciones. Si se utilizan las definiciones es fácil determinar cualquiera de ellas sin necesidad de calcular el ángulo.

Para ello es necesario e importante que al llegar a esta sección, ya tengas bien grabadas las definiciones de las funciones, así como el de identificar ya plenamente los lados opuesto y adyacente.

EJEMPLO 1.

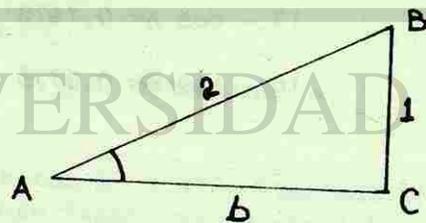
Si $\text{sen } A = 1/2$, determinar las demás funciones de A.

SOLUCIÓN:

Nosotros sabemos que el seno es la razón del cateto opuesto a un ángulo agudo a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es decir:

$$\text{sen } A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

Ahora, hagamos un triángulo rectángulo de referencia donde se muestre la información dada:



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Para encontrar el cateto adyacente al ángulo, hacemos uso del teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2; \text{ siendo } a \text{ y } b \text{ los lados y } c \text{ la hipotenusa}$$

$$(2)^2 = (1)^2 + b^2$$

$$4 = 1 + b^2$$

$$4 - 1 = b^2$$

$$3 = b^2$$

$$b^2 = 3$$

$$b = \sqrt{3} \text{ (lado adyacente)}$$

Ahora, con los valores de los lados tenemos:

$$\text{L.A.} = \text{lado adyacente} = \sqrt{3}$$

$$\text{L.O.} = \text{lado opuesto} = 1$$

$$h = \text{hipotenusa} = 2$$

$$\cos A = \frac{\text{L.A.}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan A = \frac{\text{L.O.}}{\text{L.A.}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot A = \frac{\text{L.A.}}{\text{L.O.}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec A = \frac{h}{\text{L.A.}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\csc A = \frac{h}{\text{L.O.}} = \frac{2}{1} = 2$$

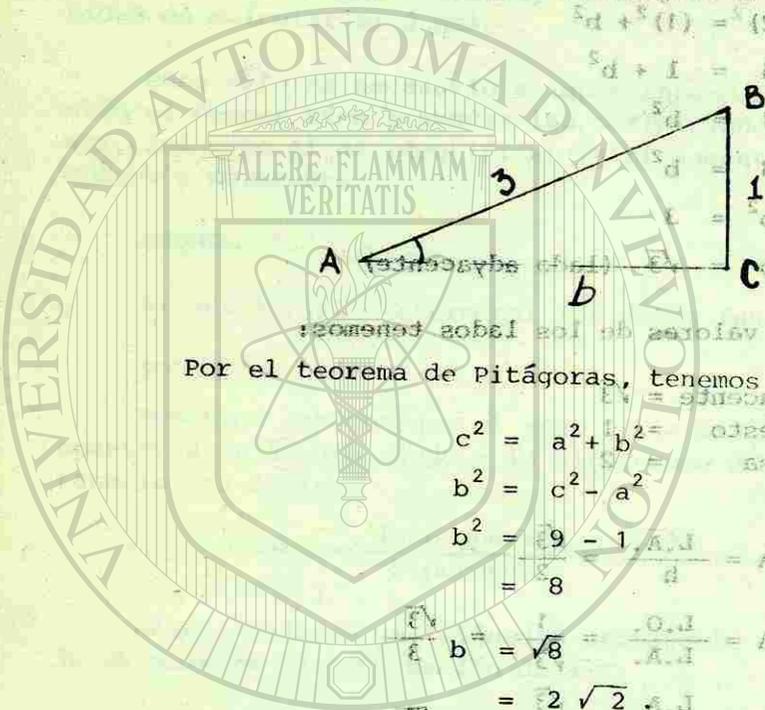
EJEMPLO 2.

Dado $\csc A = 3$, hallar los valores de las demás funciones de A.

SOLUCIÓN:

Para la cosecante del ángulo, tenemos por definición:

$\sec A = \frac{h}{1.0} = 3$
 y sobre los lados y a obtener el
 Dibujando un triángulo rectángulo de referencia.



Por el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 9 - 1$$

$$= 8$$

$$b = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Luego, las demás funciones para el ángulo A son:

$$h = 3 \quad a = 1 \quad \text{y} \quad b = 2\sqrt{2}$$

$$\sin A = \frac{1}{3}$$

$$\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan A = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot A = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

$$\sec A = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

AUTOEVALUACION 3.

Hallar en cada uno de los ejemplos siguientes los valores de las demás funciones trigonométricas:

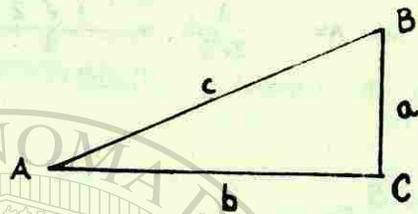
- | | |
|--|---------------------------|
| 1.- Si $\tan B = 5/12$ | 5.- $\sec Y = 17/8$ |
| 2.- Si $\csc A = 5/3$ | 6.- $\cos Z = \sqrt{5}/3$ |
| 3.- Si $\cot C = \frac{5\sqrt{6}}{12}$ | 7.- $\csc A = 2$ |
| 4.- Si $\sin X = 4/9$ | 8.- $\sin B = y/x$ |

Encuentra lo que se te pida en cada uno de los siguientes problemas:

- 9.- Si $\tan A = 4/3$, hallar $\sin A + \cos A$.
- 10.- Si $\cot A = 3/2$, hallar $\sin A$.
- 11.- Si $\cos Y = 12/13$, hallar $\sin^2 y + \cos^2 y$.
- 12.- Si $\sin A = y/x$, hallar $\tan A$.

1-5 RELACIONES RECÍPROCAS Y COFUNCIONES.

Si analizamos detalladamente las seis funciones trigonométricas, veremos que la recíproca de la función seno es la función cosecante para el mismo ángulo; por ejemplo, para el siguiente triángulo:



tenemos que, por definición:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c}$$

y

$$\text{csc } A = \frac{c}{a}$$

o sea que:

$$\text{sen } A = \frac{1}{\text{csc } A}$$

o bien

$$\text{csc } A = \frac{1}{\text{sen } A}$$

del mismo modo tenemos que:

$$\text{cos } A = \frac{b}{c}$$

y

$$\text{sec } A = \frac{c}{b}$$

o sea:

$$\text{cos } A = \frac{1}{\text{sec } A}$$

o bien

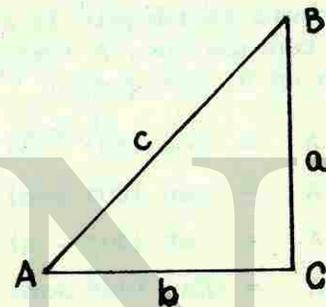
$$\text{sec } A = \frac{1}{\text{cos } A}$$

Es importante recalcar que las razones recíprocas sólo son válidas respecto al mismo ángulo.

Funciones y cofunciones.

Si dos cantidades están relacionadas de tal modo que, el valor de la primera determina unívocamente el valor de la segunda, la relación entre ellas recibe el nombre de *función*; y en particular si la segunda de ellas es una razón trigonométrica. Esta definición es válida, puesto que, para cada ángulo agudo le corresponde un valor a la razón tangente y a las demás y sólo uno.

Consideremos ahora el siguiente triángulo rectángulo:



Por definición, tenemos que:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{c}$$

$$\text{cos } A = \frac{b}{c}$$

$$\text{cos } B = \frac{a}{c}$$

$$\text{tan } A = \frac{a}{b}$$

$$\text{tan } B = \frac{b}{a}$$

$$\text{cot } A = \frac{b}{a}$$

$$\text{cot } B = \frac{a}{b}$$

$$\text{sec } A = \frac{c}{b}$$

$$\text{sec } B = \frac{c}{a}$$

$$\text{csc } A = \frac{c}{a}$$

$$\text{csc } B = \frac{c}{b}$$

Si observamos detenidamente ambas funciones para A y B, veremos que:

$$\text{sen } A = \text{cos } B$$

$$\text{cos } A = \text{sen } B$$

$$\text{tan } A = \text{cot } B$$

$$\text{cot } A = \text{tan } B$$

$$\text{sec } A = \text{csc } B$$

$$\text{csc } A = \text{sec } B;$$

pero como en todo triángulo rectángulo la suma de sus ángulos agudos es igual a 90° , tenemos que: $A + B = 90^\circ$, entonces $B = 90^\circ - A$, que sustituido en B, nos queda:

$$\text{sen } A = \text{cos } (90^\circ - A)$$

$$\text{cos } A = \text{sen } (90^\circ - A)$$

$$\text{tan } A = \text{cot } (90^\circ - A)$$

$$\text{cot } A = \text{tan } (90^\circ - A)$$

$$\text{sec } A = \text{csc } (90^\circ - A)$$

$$\text{csc } A = \text{sec } (90^\circ - A)$$

De lo anterior, se deduce que, si A es el ángulo complementario de B o viceversa, entonces: "Cualquier función de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su complemento." Así tenemos que:

- El seno de cualquier ángulo agudo es igual al coseno de su complemento y viceversa.
- La tangente de un ángulo agudo es igual a la cotangente de su complemento y viceversa.
- La secante de un ángulo agudo es igual a la cosecante de su complemento y viceversa.

AUTOEVALUACION 4.

Clasificar cada una de las expresiones siguientes como falsa o verdadera:

1.- $\text{cos } 30^\circ = \frac{1}{\text{sen } 60^\circ}$

2.- $\text{tan } x = \text{cot } (90^\circ + x)$

3.- $\text{sec } A \cdot \text{cos } B = 1$

4.- $\text{tan } 38^\circ 14' = \text{cot } 51^\circ 46'$

5.- $\text{sec } y = \frac{1}{\text{cos } y}$

6.- $\text{csc } 83^\circ = \text{sec } 7^\circ$

7.- $\frac{1}{\text{cos } C} = \text{sec } C$

8.- $\text{tan } A = \frac{1}{\text{cot } (90^\circ - A)}$

9.- $\text{tan } A \cdot \text{cot } A = 1$

10.- $\text{cot } 18^\circ 18' = \text{tan } 71^\circ 42'$

Empleando las cofunciones, escribir la equivalente de cada una de las expresiones siguiente:

11.- $\text{sen } x$

12.- $\text{tan } 31^\circ$

13.- $\text{csc } A$

14.- $\text{cos } (90^\circ - y)$

15.- $\text{sen } 28^\circ 50'$

16.- $\text{cos } 81^\circ 20'$

Empleando las relaciones recíprocas, escribir la equivalente de cada una de las expresiones siguientes:

17.- $\sec A \cdot \cos A$

18.- $\frac{1}{\cos 29^\circ 40'}$

19.- $\frac{1}{\cos C}$

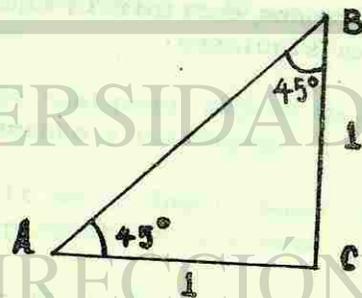
20.- $\tan B \cdot \cot B$

21.- $\sec 83^\circ$

1-6 FUNCIONES DE ANGULOS DE 30° , 45° y 60° .

Existen en trigonometría dos triángulos rectángulos muy conocidos que son los de 45° y $30^\circ - 60^\circ$. Las funciones para esos ángulos se usan con frecuencia, por lo que se recomienda a los estudiantes estudien con cuidado esta parte.

Comencemos con el triángulo rectángulo isósceles, en el cual los ángulos agudos miden 45° cada uno.



Representando cada lado por medio de la unidad, se dibuja un rectángulo con A y B de 45° . Ahora, por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$c^2 = 1 + 1$$

$$c = \sqrt{2}$$

Una vez encontrados los valores de los lados, procedemos a encontrar las funciones:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

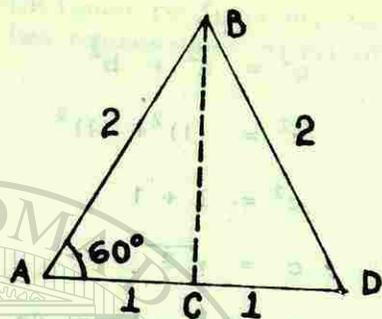
$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

En este triángulo es donde las funciones seno-coseno, tangente-cotangente, secante-cosecante, tienen el mismo valor y las cofunciones son también iguales.

Para el triángulo rectángulo $30^\circ - 60^\circ$, construyamos un triángulo equilátero con un valor de 2 para cada lado.



Como en todo triángulo equilátero sus lados y sus ángulos son iguales, tenemos que:

$$A + B + C = 180^\circ$$

pero como $A = B = C$, entonces:

$$3A = 180^\circ$$

$$A = \frac{180^\circ}{3}$$

$$A = 60^\circ$$

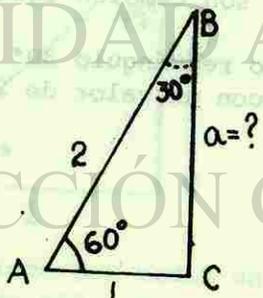
También sabemos por geometría que en todo triángulo equilátero, C es el punto medio de AD, es decir: $AC = CD = 1/2(2) = 1$. Para calcular la altura del triángulo equilátero, basta con aplicar el teorema de Pitágoras, ya que la altura divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$60^\circ + B + 90^\circ = 180^\circ$$

$$B = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$$

$$B = 30^\circ$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 4 - 1$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3}$$

Conociendo los lados y ángulos, procedemos a encontrar las funciones:

$$\text{Sen } 30^\circ = 1/2$$

$$\text{Sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

$$\text{Cos } 60^\circ = 1/2$$

$$\text{Tan } 30^\circ = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$$

$$\text{Tan } 60^\circ = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$$

Se deja al estudiante encontrar las funciones restantes como práctica de esta sección.

1-7 APLICACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Como ya se vió antes, la trigonometría era una herramienta muy útil y se usaba para calcular cantidades no mensurables directamente. En esta sección veremos algunas de las tantas aplicaciones que tienen las funciones. Te recomendamos veas y analices los ejemplos que a continuación se exponen para que luego resuelvas tu autoevaluación.

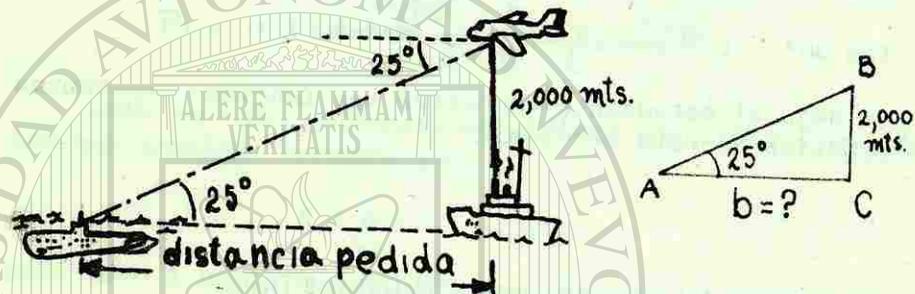
EJEMPLO 1.

El altímetro de un aeroplano de reconocimiento indica 2000 mts sobre el nivel del mar. Cuando pasa sobre su portaviones. En el mismo instante se detecta la presencia de un submarino, cuyo ángulo de depresión, desde el aeroplano, es de 25° . ¿Cuál será la distancia entre el submarino y el barco?

SOLUCIÓN:

Ángulo de depresión es el ángulo comprendido entre la horizontal que pasa por el ojo del observador y la recta determinada por la vista dirigida hacia un punto que está por debajo de él.

Una vez aclarado el concepto, ángulo de depresión, procedamos a contruir un dibujo del problema, para verlo más claramente.



Arriba se muestra el triángulo de referencia, que forma el avión-portal-aviones-submarino.

El siguiente paso es encontrar la función que nos relacione los lados del triángulo. Para ello, vemos que, la Tan A y cot A nos relacionan los lados de los cuales escogemos la cot A.

$$\cot A = \frac{b}{2000}$$

despejando b, tenemos: $b = 2000 (\cot A)$

resolviendo: $b = 2000 (\cot 25^\circ)$

$$b = 2000 (2.145)$$

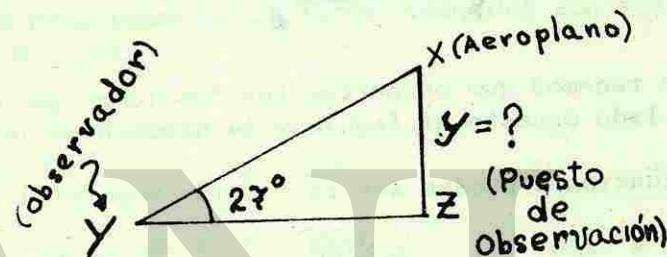
$$b = 4290 \text{ m.}$$

EJEMPLO 2.

Se reporta un aeroplano que está precisamente sobrevolando un puesto de observación que se halla a 3000 m de una batería antiaérea. Desde la batería, el ángulo de elevación del avión es de 27° . Determinar la altura del avión.

Ángulo de elevación es el ángulo comprendido entre la horizontal que pasa por el ojo del observador y la recta determinada por la vista dirigida hacia un punto que está por encima de él.

Haciendo un esquema, donde mostremos los datos y la incógnita:



Escogiendo entre las funciones, aquellas que nos relacionen los lados, tenemos que son la tan y cot y, de las cuales escogemos tan y.

$$\tan y = \frac{y}{3,000}$$

$$y = 3,000 (\tan y)$$

$$y = 3,000 (\tan 27^\circ)$$

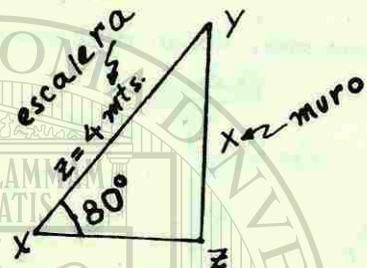
$$y = 3,000 (0.5095)$$

$$y = 1528.5 \text{ m}$$

EJEMPLO 3.

Una escalera de 4 m de largo se apoya contra un muro formando un ángulo de 80° con el suelo. ¿A qué altura del muro está apoyada la escalera?

Haciendo un esquema del problema tenemos:



Ahora tenemos que encontrar las funciones que nos relacionen al lado opuesto al ángulo y la hipotenusa (escalera).

Las funciones pueden ser la función seno o su recíproca.

$$\text{sen } X = x/4 \quad \text{o bien} \quad \text{csc } X = 4/x$$

de las cuales la más sencilla de operar es la función seno.

$$\text{sen } X = x/4$$

$$x = 4 \text{ Sen } X$$

$$x = 4 (0.9848)$$

$$x = 3.9392 \text{ m}$$

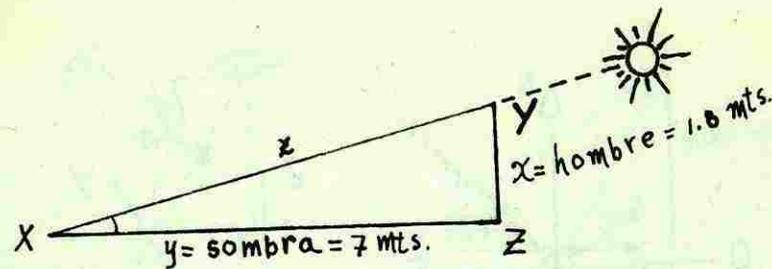
$$x \approx 3.94 \text{ (aproximadamente a decimales)}$$

EJEMPLO 4.

Si un hombre de 1.8 m de altura proyecta una sombra de 7 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?

SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema del problema, tenemos:



Para encontrar el ángulo (X), tenemos que, las funciones que nos relacionan a los lados conocidos son $\tan X = x/y$ o bien $\cot X = y/x$.

$$\tan X = x/y$$

$$= 1.8/7$$

$$\tan X = 0.2571$$

$$X = \text{arco tan } (0.2571)$$

$$X \approx 14^\circ 30'$$

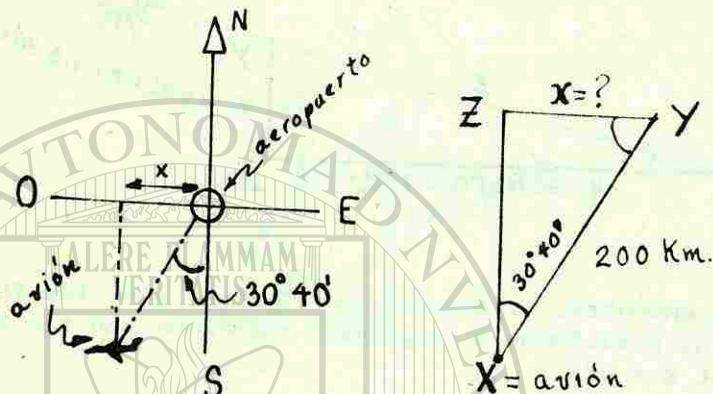
EJEMPLO 5.

Un avión despegue de un aeropuerto y vuela 200 Km en dirección S $30^\circ 40' 0$. ¿A qué distancia, al oeste del punto de partida, está el avión en ese instante?

SOLUCIÓN:

A fin de resolver este tipo de problemas, las direcciones que se toman en torno a problemas de navegación estarán referidas usualmente al N (norte) o S (sur), de acuerdo con la que sea más cercana a la dirección que se desea indicar, y estará seguida por el número de grados (menor de 90°) hacia el este (E) u oeste (O) de la dirección principal.

En nuestro caso S $30^\circ 40' 0$, indica $30^\circ 40'$ al oeste a partir del sur, cuyo diagrama o esquema es el siguiente:



El dibujo de la derecha muestra el triángulo que se forma y la distancia que se pide (x). Ahora buscamos las funciones que nos relacionan al lado opuesto a x y su hipotenusa (200 Km). Pueden ser $\text{sen } X$ o $\text{csc } X$, de las cuales se escoge: $\text{sen } X$.

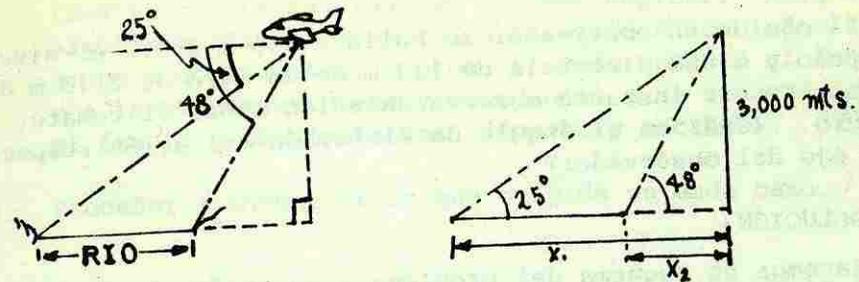
$$\begin{aligned} \text{sen } X &= x/z \\ \text{sen } X &= x/200 \\ x &= 200 \text{ sen } X \\ x &= 200 \text{ sen } 30^\circ 40' \\ x &= 200 (0.51) \\ x &= 102 \text{ Km} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.

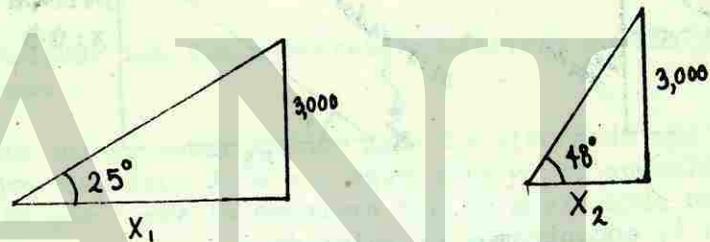
Volando a una altura de 3000 m un observador mide los ángulos de depresión de las orillas opuestas al río y resultan ser de 48° y 25° respectivamente. ¿Qué anchura tiene el río en el lugar de la observación?

SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema del problema y sus triángulos formados (dibujo derecho).



Calculando la distancia x_1 y restándole x_2 , encontraremos el ancho del río.



$$\begin{aligned} \frac{x_1}{3000} &= \cot 25^\circ & \frac{x_2}{3000} &= \cot 48^\circ \\ x_1 &= (3000)(\cot 25^\circ) & x_2 &= (3000)(\cot 48^\circ) \\ x_1 &= (3000)(2.145) & x_2 &= (3000)(0.9004) \\ x_1 &= 6435 \text{ m} & x_2 &= 2701 \text{ m} \end{aligned}$$

luego,

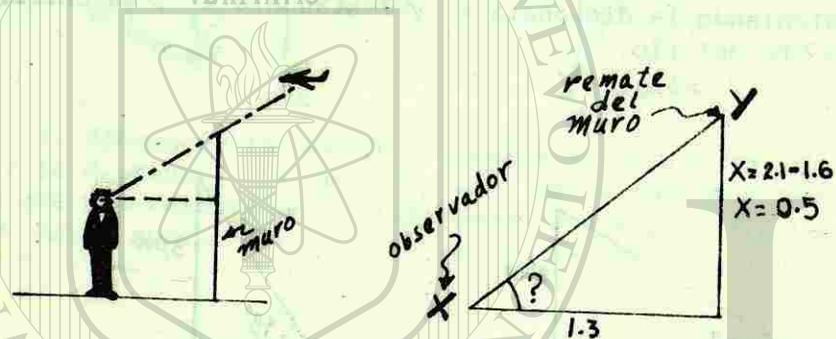
$$\begin{aligned} \text{ancho del río} &= x_1 - x_2 \\ &= 6435 - 2701 \\ &= 3734 \text{ m} \end{aligned}$$

EJEMPLO 7.

El ojo de un observador se halla a 1.6 m sobre el nivel del suelo y a una distancia de 1.3 m de un muro de 2.10 m de altura. En ese instante observa un avión sobre el remate del muro. ¿Cuál es el ángulo de elevación del avión respecto al ojo del observador?

SOLUCIÓN:

Hacemos un esquema del problema y un triángulo de referencia (dibujo derecho).



Por $\tan X$, encontramos el valor de X .

$$\tan X = 0.5/1.3$$

$$\tan X = 0.3846$$

$$X = \arcsin \tan (0.3846)$$

$$X \approx 21^\circ$$

todos los ejemplos anteriores se basan en diferentes triángulos rectángulos. En cada caso se siguieron los siguientes pasos:

- Hacer un dibujo sobre el cual se indiquen los datos.
- Observar qué lados conoce y cuáles quiere determinar, siempre con respecto a un determinado ángulo.

- Identificar la función que se debe emplear. Para ello basta recordar qué funciones relacionan los lados (tangente y cotangente), o bien, el lado opuesto al ángulo y a la hipotenusa (seno y cosecante) o el lado adyacente al ángulo y la hipotenusa (coseno y secante).
- Proceder a encontrar lo que se pida en cada caso.

Aplica estos mismos pasos en la resolución de la autoevaluación de esta sección.

AUTOEVALUACION 5.

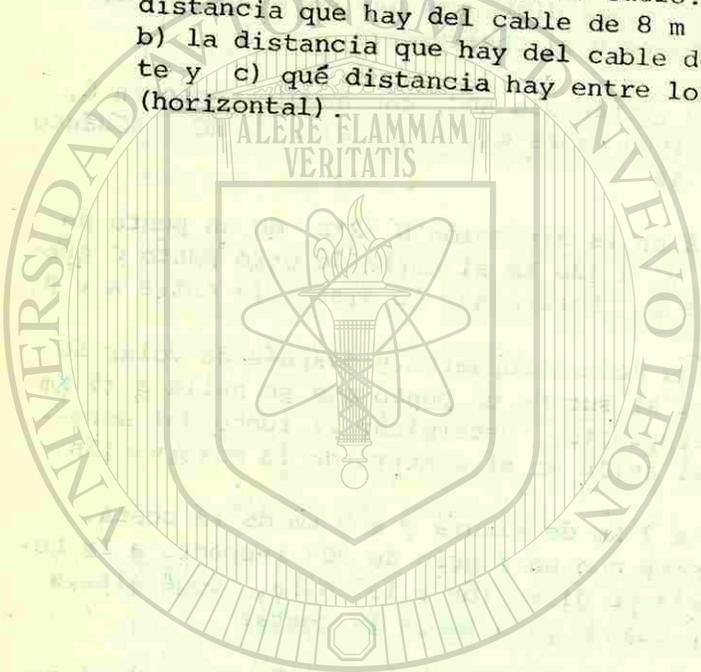
Aplicar las funciones trigonométricas en los siguientes problemas.

- Se quiere saber cuánto mide la altura de una casa, donde una escalera de 4 m llegue a la parte superior y el ángulo que forma la escalera con el suelo mide 60° .
- Se ha construido una carretera en forma ascendente que se empina 105 m por cada 1000 m de recorrido horizontal. Hallar: a) la inclinación (ángulo de la carretera con la horizontal), aproximándolo al grado más cercano y b) la longitud de la carretera, aproximando al metro más cercano.
- Un aeroplano despegue de la pista y vuela siguiendo una trayectoria que forma el ángulo constante de 9° con el suelo, considerado horizontal. Cuando ha alcanzado la altura de 400 m. Se pide: a) encontrar el alcance horizontal del avión y b) la distancia que realmente ha volado.
- Hallar los lados de un rectángulo si una de sus diagonales mide 24 cm y forma con uno de los lados un ángulo de 42° .

- 5.- Un aeroplano recorre en el aire 15,000 m siguiendo un ángulo de ascenso constante alcanzando una altura de 1900 m. Calcular el ángulo de elevación.
- 6.- Calcular al grado más cercano, el ángulo de elevación del sol cuando un árbol de 60 m de altura arroja una sombra de 10 m.
- 7.- Calcular la sombra proyectada por un poste que mide 15 m de altura si en ese instante el ángulo de elevación del sol es 34° .
- 8.- Un faro, construido al nivel del mar, tiene 180 m de altura. Vista desde su cima, una barca tiene un ángulo de depresión de 24° . Hallar la distancia que hay entre la barca y el pie del faro.
- 9.- Un observador mira la cima de un edificio con un ángulo de elevación de 21° . Si el ojo del observador se haya a 5 m sobre el suelo y a 200 m del edificio. ¿Cuál es la altura del edificio?
- 10.- Desde un faro que está a 200 m sobre el nivel del mar, un observador ve dos botes en línea recta. Si los ángulos de depresión, medidos por el observador, son de 11° y 16° . Hallar la distancia entre los dos botes.
- 11.- Desde la cima de un faro de 200 m de altura, un vigía observa simultáneamente un aeroplano y un barco, estando éste exactamente debajo de aquél. Los ángulos de elevación y depresión del avión y el barco eran en ese instante 25° y 32° respectivamente. Hallar: a) la distancia del barco al pie del faro y b) la altura del aeroplano por encima del agua.
- 12.- Si dos ángulos de la base de un triángulo isósceles miden 28° y los lados iguales 45 cm. Encontrar: a) la altura correspondiente de la base, b) la base.

- 13.- Un observador mira el tope del asta de una bandera con un ángulo de elevación de 16° . Se considera que el piso es horizontal y que el ojo del observador se halla a 5 m sobre el suelo. Si el asta de la bandera tiene 8.6 m de altura. ¿Qué distancia hay entre el pie del asta de la bandera y el observador?
- 14.- En un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en C, el lado AB es cinco veces mayor que el lado AC. ¿Cuánto mide el ángulo A?
- 15.- Un lugar A está en la dirección $N 72^\circ E$ de un punto de observación B y a 120 Km al norte de otro punto C que está al este de B. Determinar la distancia entre A y B.
- 16.- Un avión despegó de su aeropuerto y después de volar 50 Km se encuentra al sur de un punto que se halla a 25 Km al este del aeropuerto. Determinar el rumbo del aeropuerto desde el avión en el momento de la observación.
- 17.- Un avión está a 2 Km de altura y a 5 Km de la costa. Ascende entonces con un ángulo de 30° respecto a la horizontal y vuela en dirección a la costa. ¿Qué altura lleva el avión cuando pasa sobre la costa?
- 18.- Un asta de bandera está colocada verticalmente en el remate de una torre. Desde un punto situado a 30 m del pie de la torre y de frente al asta, los ángulos de elevación al extremo superior y a la base del asta, son de 51° y 47° , respectivamente. Si el ojo del observador está a 1.6 m del suelo, determinar: a) la altura de la torre y b) la altura del asta.
- 19.- Un árbol se a partido al caerle un rayo, en un punto situado a 4 m del suelo, pero no se encuentra completamente roto. El extremo descansa sobre el suelo formando con él un ángulo de 20° . ¿Qué altura tenía el árbol?

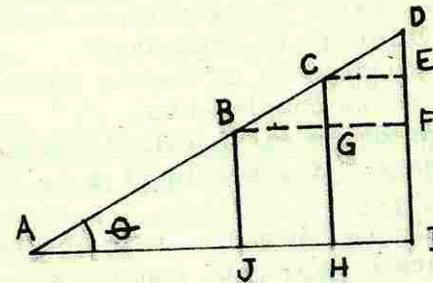
20.- Un poste ha sido reforzado con los cables para su sosten. Los dos cables miden 8 m y 5 m y están colocados a los lados del poste (izquierda y derecha, respectivamente). Los ángulos formados por los cables son de 36° y 70° respectivamente con el suelo. Determinar: a) la distancia que hay del cable de 8 m al pie del poste, b) la distancia que hay del cable de 5 m al pie del poste y c) qué distancia hay entre los pies de los cables (horizontal).



AUTOEVALUACION DEL CAPITULO I.

Subraya la respuesta correcta.

A partir del triángulo rectángulo indicado.



determinar:

1.- $\cos \theta$

1) AH/AC

2) BC/BG

3) CD/CE

4) DI/AD

5) BD/BF

2.- $\csc \theta$

1) AC/AH

2) AD/DI

3) BC/BG

4) AC/AH

5) ED/CE

3.- El ángulo de elevación se define como el ángulo comprendido entre la horizontal que pasa por el ojo de un observador y la recta determinada por la vista dirigida _____

1) Hacia un punto que está por debajo de él. [®]

2) Hacia un punto que está por encima de él.

3) Hacia un punto que está a la altura del ojo.

4) Ninguna de las anteriores.

4.- Es como se define "función":

- 1) Si dos cantidades están relacionadas de tal modo que el valor de la primera determina unívocamente el valor de la segunda.
- 2) Cuando dos cantidades no están relacionadas de tal modo que el valor de la primera no determina unívocamente el valor de la segunda.
- 3) Cualquier función de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su complemento.
- 4) Si dos cantidades están relacionadas de tal modo que el valor de las dos sea igual a la unidad.

5.- En un triángulo rectángulo la razón entre el cateto opuesto al cateto adyacente con respecto a un ángulo, se denomina:

- | | | |
|----------------|------------|--------------|
| 1) Seno. | 2) Coseno. | 3) Tangente. |
| 4) Cotangente. | | |

6.- $\csc 25^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1) 0.4226 | 2) 1.1035 | 3) 0.9063 |
| 4) 2.3662 | | |

7.- $\sec 75^\circ 30'$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1) 1.0333 | 2) 3.9939 | 3) 1.0385 |
| 4) 3.7421 | | |

8.- Dado $\cot A = 0.0087$, ¿cuánto vale A?

- | | | |
|-------------------|------------------|-----------------------|
| 1) $60^\circ 30'$ | 2) $1^\circ 30'$ | 3) $89^\circ 30' 5''$ |
| 4) $30'$ | | |

9.- El altímetro de un aeroplano de reconocimiento indica 2100 metros sobre el nivel del mar, cuando pasa sobre su porta aviones. En el mismo instante se detecta la presencia de un submarino cuyo ángulo de depresión, desde el aeroplano, es de $27^\circ 30'$. ¿Cuál será la distancia entre el submarino y el barco? (Dar el resultado en m).

- | | | |
|--------------|-----------|-----------|
| 1) 4034.06 m | 2) 1093 m | 3) 1862 m |
| 4) 900 m | | |

10.- Al salir de un aeropuerto, el radio operador de un avión que vuela hacia el sur determina que dos estaciones de radio están ambas hacia el oeste del aeropuerto. Después de volar 25 Km, los rumbos respectivos de las 2 estaciones son 315° y 300° (con respecto al N). Hallar la distancia entre las dos estaciones.

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-------|
| 1) $25\sqrt{3}$ | 2) $25(\sqrt{3} - 1)$ | 3) 25 |
| 4) $(\sqrt{3} - 1)$ | | |

11.- Clasificar el enunciado que se indica como verdadero o falso: $\cos 10^\circ 20' = \sin 79^\circ 40'$.

- | | |
|-----------|---------------|
| 0) Falso. | 1) Verdadero. |
|-----------|---------------|

Usando los enunciados, $\tan A = 4/3$ y $\cos B = 12/13$, determinar los valores de las siguientes expresiones trigonométricas.

12.- $\cos A - \cos B$.

- | | | |
|------------|----------|-------------|
| 1) $65/14$ | 2) $3/5$ | 3) $-21/65$ |
| 4) $5/3$ | | |

13.- $\sin^2 A + \cos^2 A$ [sugerencia: $\sin^2 A = (\sin A)^2$]

- | | | |
|----------|------|----------|
| 1) 1 | 2) 0 | 3) $4/5$ |
| 4) $5/4$ | | |

14.- Utilizando tus conocimientos de razones recíprocas, escribe la equivalente de:

$$\frac{1}{\tan 0^{\circ}40'}$$

- 1) $\cot 89^{\circ}20'$ 2) $\tan 89^{\circ}70'$ 3) $\tan 0^{\circ}40'$
 4) $\cot 0^{\circ}40'$

15.- Un triángulo rectángulo tiene un ángulo agudo igual a la mitad de un recto. Encontrar la csc del ángulo complementario ($90^{\circ}-\theta$).

- 1) 2 2) $\sqrt{2}/2$ 3) 1
 4) $\sqrt{2}$

Efectuar las siguientes operaciones dando su resultado como una fracción:

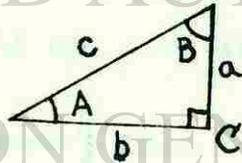
16.- $3 \sin 60^{\circ} - 4 \tan 45^{\circ} + 2 \cos 30^{\circ}$

- 1) $\frac{5\sqrt{3} - 8}{2}$ 2) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ 3) $5\sqrt{3} - 4$
 4) 0.25

17.- $(\tan 45^{\circ})(\sin^2 30^{\circ})$

- 1) 4 2) 1/4 3) 1
 4) 1/2

18.- A través del siguiente dibujo



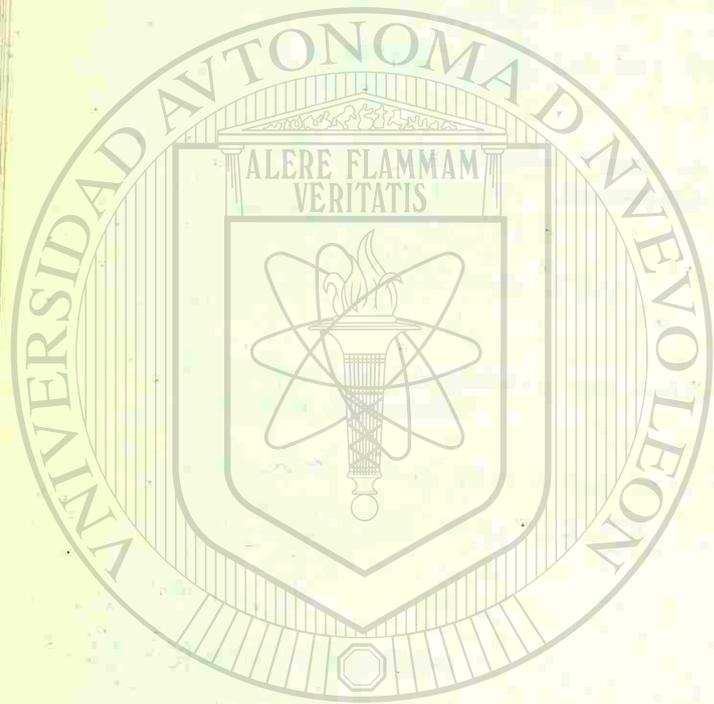
relaciona las siguientes columnas:

- a) c/b
 b) a/c
 c) b/a
 d) a/b
 e) b/c
 f) c/a

- _____ $\sin A$
 _____ $\tan B$
 _____ $\csc A$
 _____ $\csc B$



LIBRO ALQUILADO



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO I.

AUTOEVALUACIÓN 1:

1.- a) $\text{Sen } A = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\text{Sen } B = \frac{3}{\sqrt{13}}$
 $\text{Cos } A = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\text{Cos } B = \frac{2}{\sqrt{13}}$
 $\text{Tan } A = \frac{2}{3}$ $\text{Tan } B = \frac{3}{2}$
 $\text{Cot } A = \frac{3}{2}$ $\text{Cot } B = \frac{2}{3}$
 $\text{Sec } A = \frac{\sqrt{13}}{3}$ $\text{Sec } B = \frac{\sqrt{13}}{2}$
 $\text{Csc } A = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $\text{Csc } B = \frac{\sqrt{13}}{3}$

b) $\text{Sen } A = \frac{3}{5}$ $\text{Sen } B = \frac{4}{5}$
 $\text{Cos } A = \frac{4}{5}$ $\text{Cos } B = \frac{3}{5}$
 $\text{Tan } A = \frac{3}{4}$ $\text{Tan } B = \frac{4}{3}$
 $\text{Cot } A = \frac{4}{3}$ $\text{Cot } B = \frac{3}{4}$
 $\text{Sec } A = \frac{5}{4}$ $\text{Sec } B = \frac{5}{3}$
 $\text{Csc } A = \frac{5}{3}$ $\text{Csc } B = \frac{5}{4}$

c) $\text{Sen } A = \frac{5}{13}$ $\text{Sen } B = \frac{8}{13}$
 $\text{Cos } A = \frac{8}{13}$ $\text{Cos } B = \frac{5}{13}$
 $\text{Tan } A = \frac{5}{8}$ $\text{Tan } B = \frac{8}{5}$
 $\text{Cot } A = \frac{8}{5}$ $\text{Cot } B = \frac{5}{8}$
 $\text{Sec } A = \frac{13}{8}$ $\text{Sec } B = \frac{13}{5}$
 $\text{Csc } A = \frac{13}{5}$ $\text{Csc } B = \frac{13}{8}$

d) $\text{Sen } X = \frac{x}{z}$ $\text{Sen } Y = \frac{y}{z}$
 $\text{Cos } X = \frac{y}{z}$ $\text{Cos } Y = \frac{x}{z}$
 $\text{Tan } X = \frac{x}{y}$ $\text{Tan } Y = \frac{y}{x}$
 $\text{Cot } X = \frac{y}{x}$ $\text{Cot } Y = \frac{x}{y}$
 $\text{Sec } X = \frac{z}{y}$ $\text{Sec } Y = \frac{z}{x}$
 $\text{Csc } X = \frac{z}{x}$ $\text{Csc } Y = \frac{z}{y}$

AUTOEVALUACIÓN 2.

- | | |
|------------|---------------------------|
| 1.- 0.5 | 9.- $8^{\circ}29' 58''$ |
| 2.- 0.5 | 10.- $24^{\circ}19' 57''$ |
| 3.- 0.5890 | 11.- $38^{\circ}0' 3''$ |
| 4.- 3.9495 | 12.- $57^{\circ}19' 32''$ |
| 5.- 0.0029 | 13.- $65^{\circ}40' 3''$ |
| 6.- 4.3362 | 14.- $37^{\circ}10' 23''$ |
| 7.- 0.4848 | 15.- $81^{\circ}30'$ |
| 8.- 6.0844 | 16.- $77^{\circ}49' 22''$ |

AUTOEVALUACIÓN 3.

- | | |
|---|---|
| 1.- Sen B = $5/13$
Cos B = $12/13$
Cot B = $12/5$
Sec B = $13/12$
Csc B = $13/5$ | 5.- Sen Y = $15/17$
Cos Y = $8/17$
Tan Y = $15/8$
Cot Y = $8/15$
Csc Y = $17/15$ |
| 2.- Sen A = $3/5$
Cos A = $4/5$
Tan A = $3/4$
Cot A = $4/3$
Sec A = $5/4$ | 6.- Sen Z = $2/3$
Tan Z = $2\sqrt{5}/5$
Cot Z = $\sqrt{5}/2$
Sec Z = $3\sqrt{5}/5$
Csc Z = $3/2$ |
| 3.- Sen C = $(2/7)\sqrt{6}$
Cos C = $5/7$
Tan C = $(2/5)\sqrt{6}$
Sec C = $7/5$
Csc C = $7\sqrt{6}/12$ | 7.- Sen A = $1/2$
Cos A = $\sqrt{3}/2$
Tan A = $\sqrt{3}/3$
Cot A = $\sqrt{3}$
Sec A = $2\sqrt{3}/3$ |
| 4.- Cos X = $\sqrt{65}/9$
Tan X = $4\sqrt{65}/65$
Cot X = $\sqrt{65}/4$
Sec X = $9\sqrt{65}/65$
Csc X = $9/4$ | 8.- Cos B = $\sqrt{x^2 - y^2}/x$
Tan B = $y/\sqrt{x^2 - y^2}$
Cot B = $\sqrt{x^2 - y^2}/y$
Sec B = $x/\sqrt{x^2 - y^2}$
Csc B = x/y |

- 9.- $7/5$
10.- $2\sqrt{13}/13$
11.- 1
12.- $y/\sqrt{x^2 - y^2}$

AUTOEVALUACIÓN 4.

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1.- Falso. | 12.- Cot 59° |
| 2.- Verdadero. | 13.- Sec $(90^{\circ} - A)$ |
| 3.- Falso. | 14.- Sen Y |
| 4.- Verdadero. | 15.- Cos $61^{\circ} 10'$ |
| 5.- Verdadero. | 16.- Sen $8^{\circ} 40'$ |
| 6.- Verdadero. | 17.- 1 |
| 7.- Verdadero. | 18.- Sec $29^{\circ} 40'$ |
| 8.- Falso. | 19.- Sec C |
| 9.- Verdadero. | 20.- 1 |
| 10.- Verdadero. | 21.- $\frac{1}{\cos 83^{\circ}}$ |
| 11.- Cos $(90^{\circ} - X)$ | |

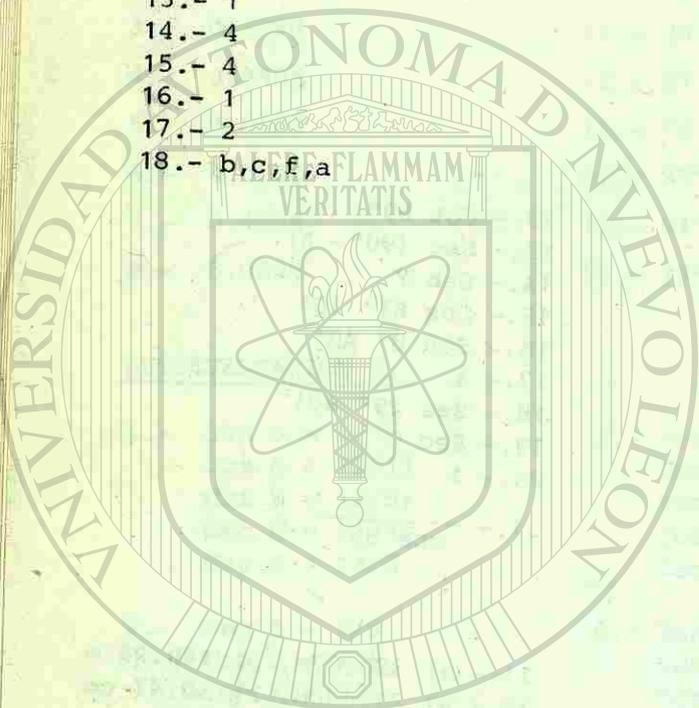
AUTOEVALUACIÓN 5.

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1.- 3.464 | 11.- a) 320.07m, b) 149.25 m |
| 2.- a) 6° ; b) 1006 m | 12.- a) 21.13cm, b) 79.47 cm |
| 3.- a) 2525.5m, b) 2557 m | 13.- 34.25 |
| 4.- 16.1 y 17.8 | 14.- $78^{\circ}27' 47''$ |
| 5.- $7^{\circ}16' 37''$ | 15.- 388.33 Km |
| 6.- $80^{\circ} 32' 16''$ | 16.- N $30^{\circ}0'$ |
| 7.- 22.24 m | 17.- 4.887 Km |
| 8.- 404.3 m | 18.- a) 33.77m, b) 4.876 m |
| 9.- 81.77 m | 19.- 15.695 m |
| 10.- 331.4 m | 20.- a) 6.472m, b) 1.710m,
c) 8.182 m |

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO 1.

- | | |
|-------|--------|
| 1.- 1 | 6.- 4 |
| 2.- 2 | 7.- 2 |
| 3.- 2 | 8.- 3 |
| 4.- 1 | 9.- 1 |
| 5.- 3 | 10.- 2 |

- 11.- 1
- 12.- 3
- 13.- 1
- 14.- 4
- 15.- 4
- 16.- 1
- 17.- 2
- 18.- b, c, f, a



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN

4o. SEMESTRE.

AREA II.

UNIDAD II.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS PARA ANGULOS EN GENERAL.

En la unidad anterior vimos cómo definir las funciones trigonométricas para ángulos agudos en términos de los lados de triángulos rectángulos y cómo, a través de ellos, podemos resolver diferentes tipos de problemas. Pero la definición de las funciones son un poco vagas ya que se refieren con respecto a triángulos rectángulos.

En esta unidad veremos cómo, en base a las definiciones anteriores, podemos definir las funciones en términos generales a través de un sistema rectangular de coordenadas y, a expresar los valores de funciones de ángulos mayores de 90° . Así mismo, aprenderás cómo varían las funciones cuando los ángulos crecen o decrecen.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

- 1.- Explicar en qué consiste un sistema de coordenadas rectangulares, definiendo cada una de las partes de que conste.
- 2.- Distinguir claramente los conceptos: radio vector, ángulo conterminal, ángulo positivo y ángulo negativo.
- 3.- En base a los objetivos anteriores, definir las funciones trigonométricas en términos de ángulos de cualquier magnitud.
- 4.- Dado al menos el valor de una función y el signo de otra, identificar y expresar el cuadrante, signos y valores de

las demás funciones.

- 5.- Expresar correctamente las funciones de ángulos positivos menores que 360° ($180^\circ - \theta$, $180^\circ + \theta$, $360^\circ - \theta$), en términos de ángulos agudos, mostrando su valor por medio de tablas.
- 6.- Expresar correctamente los valores de las funciones de ángulos mayores de 360° por medio de tablas.
- 7.- Expresar correctamente los valores de las funciones de ángulos negativos por medio de tablas.
- 8.- Escribir correctamente los valores de las funciones para los ángulos de 0° , 90° , 180° , 270° y 360° .
- 9.- Resumir, en base al objetivo anterior, las variaciones de las funciones en los cuadrantes cuando el ángulo aumenta y disminuye.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Antes de empezar a contestar o resolver la unidad, es necesario que domines a la perfección las definiciones de las funciones, así como el manejo correcto de las tablas y del teorema de Pitágoras.
- 2.- Para que resuelvas la unidad satisfactoriamente es necesario que leas y estudies el capítulo II. Para los objetivos 1 y 2 te recomendamos que comprendas cada una de las partes de que se compone un sistema de coordenadas rectangulares y los ángulos positivo, negativo y coterminal, ya que es la base para contestar satisfactoriamente los demás objetivos.

Para el objetivo 3, es importante que visualices los nombres que toman ahora los lados opuestos, adyacente y la hipotenusa. Si observas detenidamente las gráficas verás que, el ángulo de referencia es siempre con respecto al eje X, y que conforme a este eje, los lados quedan

como:

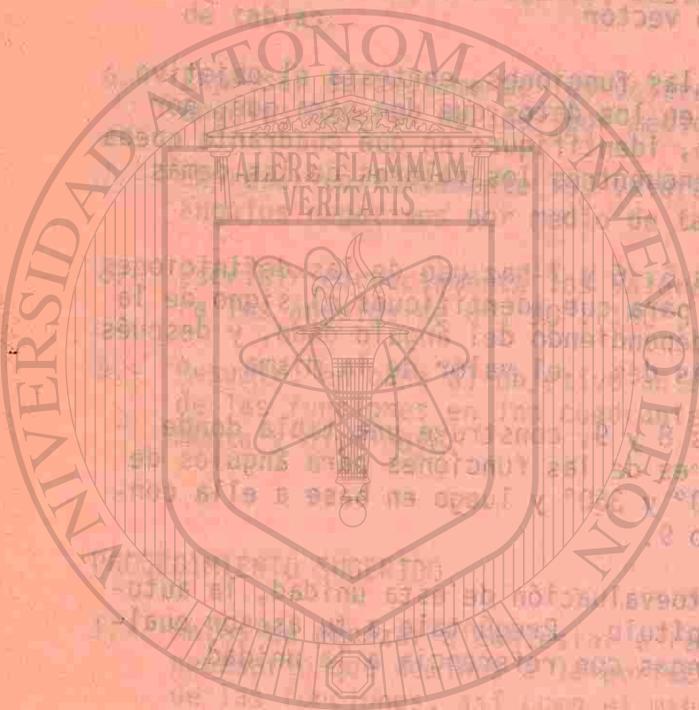
lado opuesto = ordenada = eje "y"
lado adyacente = abscisa = eje "x"
hipotenusa = radio vector

Una vez definidas las funciones, contesta el objetivo 4, fijándote bien en los datos que den para que, por definición y signo, identifiques en qué cuadrante queda y posteriormente encuentres los valores de las demás funciones.

Para los objetivos 5, 6 y 7 haz uso de las definiciones de las funciones, para que identifiques el signo de la función deseada, dependiendo del ángulo dado, y después por medio de tablas des el valor de la misma.

Para los objetivos 8 y 9, construye una tabla donde muestres los valores de las funciones para ángulos de 0° , 90° , 180° , 270° y 360° y luego en base a ella contestes el objetivo 9.

- 2.- Resuelve, como autoevaluación de esta unidad, la autoevaluación del capítulo. Pregúntale a tu asesor cualquier duda que tengas con referencia a la unidad.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL

CAPITULO 2.

FUNCIONES TRIGONÓMICAS PARA ÁNGULOS MAYORES DE 90° .

2-1 INTRODUCCIÓN.

Una de las cosas importantes de las matemáticas es que nos indica como pensar y razonar correctamente, por eso, algunas veces se le llama "la ciencia del razonamiento puro".

Las matemáticas, al igual que la trigonometría, es una de las ciencias más antiguas. La medida de los ángulos se remonta al tiempo de la escuela de Alejandría, en los principios de la Era Cristiana. Los matemáticos dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, llamadas grados.

En el capítulo anterior, vimos cómo definir las funciones trigonométricas para ángulos agudos. Gracias al sistema de coordenadas rectangulares, nos es posible estudiar hoy las funciones trigonométricas para ángulos mayores que el recto.

2-2 ANGULOS.

a) Coordenadas rectangulares.

Cuando en el siglo XVII, René Descartes estableció la correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y las parejas ordenadas de números reales, las matemáticas dieron un gran paso hacia adelante. Se pudo utilizar la intuición geométrica para la resolución de problemas algebraicos y el aparato algebraico dió la solución a problemas geométricos.

Veamos en qué consiste esta sencilla y poderosa correspondencia:

- 1.- Tracemos en el plano dos rectas perpendiculares, una horizontal que se llama "eje x" y otra vertical llamada "eje y". El punto de intersección de ambas rectas, se denomina "origen" y lo denotaremos por "O". (Estas dos rectas se conocen hoy bajo el nombre de "coordenadas rectangulares".)
- 2.- Como los puntos de una recta se pueden identificar con los números reales, en los dos ejes se puede hacer esa identificación: en el "eje x", los puntos a la derecha de "O" corresponden a los reales "positivos", y los puntos a la izquierda de "O", a los reales "negativos". En el "eje y", los puntos arriba de "O" corresponden a los reales "positivos" y los puntos abajo de "O" a los reales "negativos" (véase la fig. 2-1).
- 3.- A las cuatro regiones en que los dos ejes dividen al plano se les llama "cuadrantes" y es costumbre asignarles los números romanos indicados en la figura 2-1.

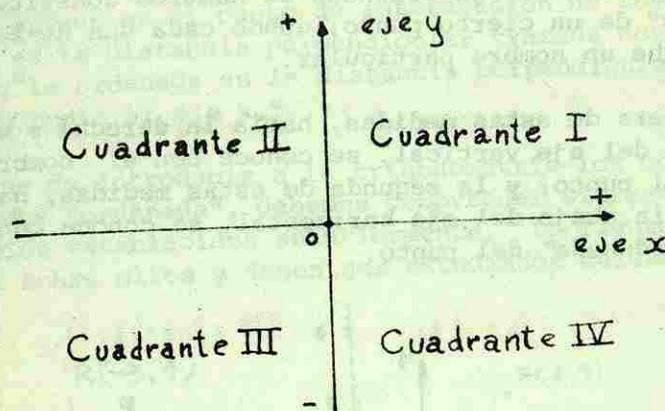


Fig. 2-1.

Obsérvese lo siguiente:

- a) "Los cuadrantes se enumeran siempre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj."
- b) "Las medidas se consideran positivas cuando se toman hacia la derecha del eje vertical o hacia arriba del eje horizontal."
- c) "Las medidas se consideran negativas cuando se toman hacia la izquierda del eje vertical o hacia abajo del eje horizontal."

La posición exacta de cualquier punto en el plano se acostumbra indicarlo por medio de dos números reales, precedidos por el signo + o el signo -. Debe sobre-entenderse que el primero de dichos números indica siempre una medida hacia la derecha o hacia la izquierda del eje vertical, mientras que el segundo número indica una medida hacia arriba o hacia

abajo del eje horizontal. Tal como sucede en álgebra, si un número no va precedido del signo se considera positivo. Consecuentemente, una pareja ordenada de números constituye las "coordenadas" de un cierto punto; donde cada una de las coordenadas recibe un nombre particular.

La primera de estas medidas, hacia la derecha o hacia la izquierda del eje vertical, se conoce con el nombre de "abscisa" del punto; y la segunda de estas medidas, hacia arriba o hacia abajo del eje horizontal, se conoce con el nombre de "ordenada" del punto.

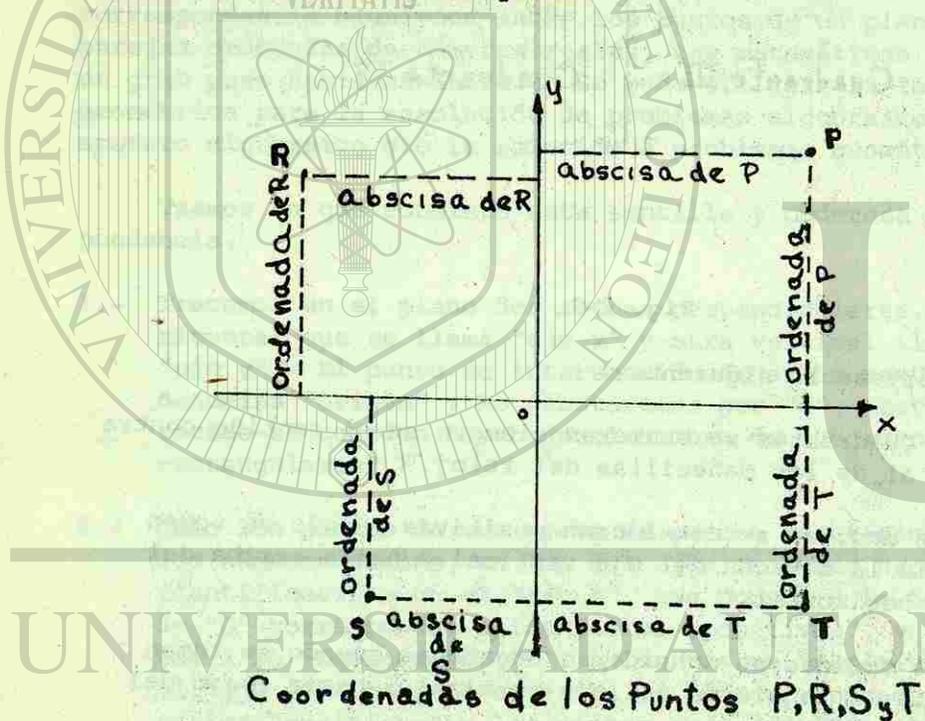


Fig. 2-2. Coordenadas de los puntos P, R, S y T.

En un sistema de coordenadas rectangulares:

"El origen es el punto de intersección de los ejes; la abscisa es la distancia perpendicular trazada desde un punto al eje y " la ordenada es la distancia perpendicular trazada desde un punto al eje x ."

Antes de introducir a la trigonometría los conceptos de "abscisa" y "ordenada", debemos comprender claramente los principios establecidos anteriormente. La figura 2-3 nos ilustra sobre ellos y deben ser estudiados cuidadosamente.

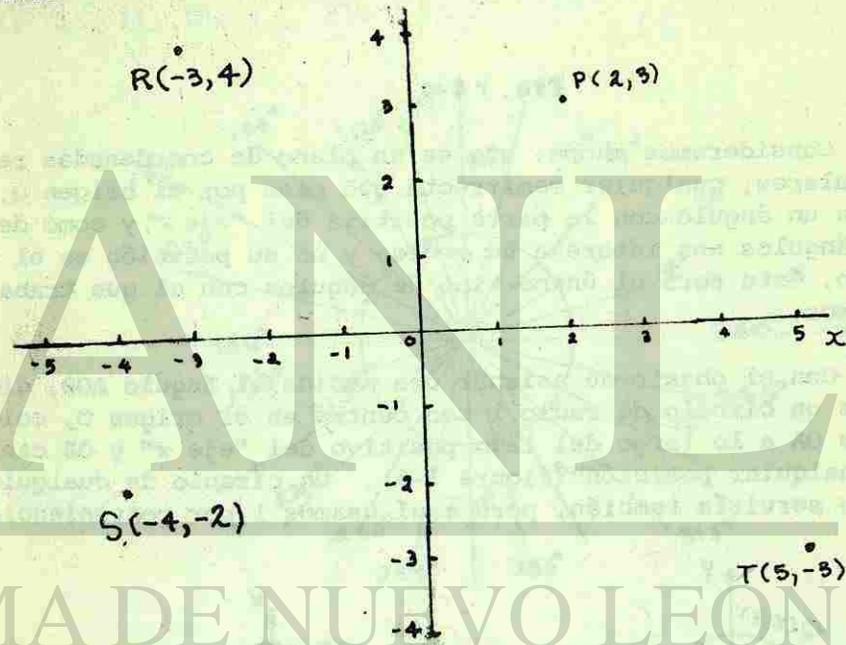


Fig. 2-3.

b) *Angulos positivos y negativos.*

Para una mejor comprensión de la trigonometría, se requiere una definición más amplia de ángulo que la conocida en geometría elemental: "es una figura formada por dos rectas que se cortan en un punto llamado vértice." Por ejemplo:

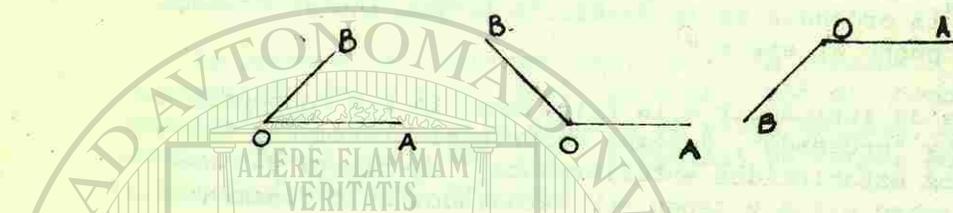


Fig. 2-4.

Consideremos ahora, que en un plano de coordenadas rectangulares, cualquier semirrecta que pase por el origen O , forma un ángulo con la parte positiva del "eje x ", y como de los ángulos nos interesa su medida y no su posición en el plano, éste será el único tipo de ángulos con el que trabajaremos.

Con el objeto de asignar una medida al ángulo AOB , dibujamos un círculo de radio 1 con centro en el origen O , colocamos OA a lo largo del lado positivo del "eje x " y OB caerá en cualquier posición (figura 2-5). Un círculo de cualquier radio serviría también, pero aquí usamos 1 por conveniencia



Fig. 2-5.

Cuando el lado OA está en dicha posición, entonces, se dice que el ángulo AOB está en "posición ordinaria". OA corta el círculo en el punto $P(1,0)$ y OB , en el punto que llamamos $Q(x,y)$.

Comúnmente, la circunferencia de un círculo se ha dividido en 360 arcos iguales (aunque no sea posible esta división por medio de la regla y el compás) y cada una de estas partes ha recibido el nombre de "grado". Cada grado a su vez, se ha dividido en 60 partes, llamadas "minuto", y cada minuto en otras 60 partes llamadas "segundo". Y se escriben así: $1^\circ, 1', 1''$.

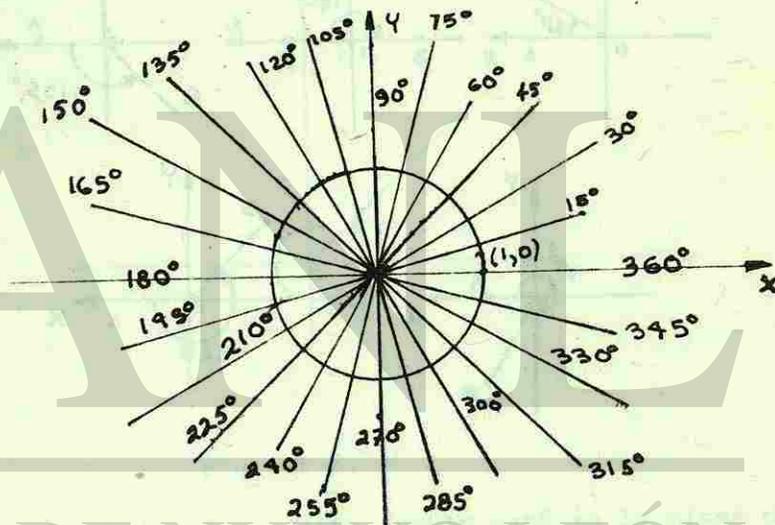


Fig. 2-6.

Tomando estas unidades en arcos de un círculo de radio unitario, podemos ahora definir la medida de los ángulos.

"La medida (en grados) de un ángulo es la medida del arco que él intercepta en el círculo unitario."

Pero en trigonometría necesitamos la noción de cómo van "dirigidos los arcos", intuitivamente se nos ocurre colocar

1020115131

una flecha en el arco, que determina si el arco se recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, o en el mismo sentido. Y después designaremos que, cuando el giro es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es "positivo"; y cuando el giro es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es "negativo" (véase fig. 2-7).

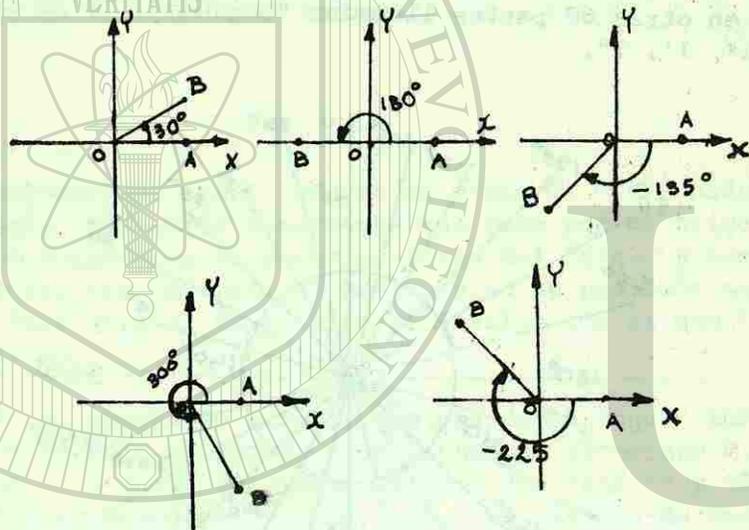


Fig. 2-7.

El lado del ángulo a partir del cual empieza el giro, se llama "lado inicial" (OA en la fig. 2-7). El lado cuyo movimiento genera el ángulo y determina su tamaño por la posición que ocupa al detenerse el giro, recibe el nombre de "lado terminal" (OB en la fig. 2-7).

Los ángulos que tienen los mismos lados, inicial y terminal se llaman "ángulos coterminales". En un plano de coordenadas cada punto B, diferente del origen determina un con-

junto infinito de ángulos coterminales, cada uno teniendo al origen como vértice, la parte positiva del eje x como lado inicial y el lado OB como lado terminal.

Por consiguiente, el lado terminal de cualquier ángulo coincide con el de muchos otros ángulos, ya que en trigonometría se trabaja con frecuencia con ángulos mayores de una vuelta. Consideremos un ángulo de 410° como el de la figura 2-8.

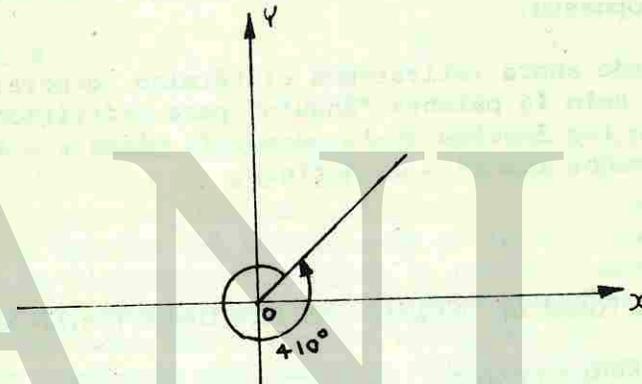


Fig. 2-8.

El lado terminal de dicho ángulo está en la misma posición que el de un ángulo de 50° ó 770° ($50^\circ + 360^\circ + 360^\circ$) ó 50° más un número cualquiera de revoluciones completas. Se observará que, excepto por el total de revoluciones que intervienen en la generación del ángulo, las propiedades de todos los ángulos coterminales son las mismas. Es fácil ver que un ángulo de -310° es coterminales con los ángulos de 50° , 410° y 770° mencionados arriba.

En vista de la discusión anterior, es natural la siguiente definición de ángulo generalizado:

"Un ángulo generalizado es una figura plana que consiste en dos lados: uno inicial y otro terminal, con un punto común inicial O ; y un lado dirigido de un círculo (con centro en O), cuyos extremos terminan en los dos lados. Este arco puede ser de cualquier longitud, o sea, la que se puede medir directamente, más la que resulte de sumarle n veces la longitud de la circunferencia en una misma dirección."

La medida en grados de este arco, junto con su signo, se define como la medida de un ángulo generalizado. El signo es positivo, si la circunferencia se recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y es negativo, en el caso opuesto.

Desde ahora retiraremos el término "generalizado" y usaremos solo la palabra "ángulo" para referirnos a ambas clases, a los ángulos de la geometría plana y a los ángulos generalizados acabados de definir.

2-3 OTRA FORMA DE DEFINIR LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

a) Radio vector.

En trigonometría, se emplean con frecuencia, las letras del alfabeto griego para representar, de un modo general, el número de grados de un ángulo. Algunas letras griegas son: α (alfa), β (beta), γ (gama), θ (theta), ϕ (fi), ω (omega).

Supongamos que una recta OB sobre el eje horizontal, tal como se muestra en la figura 2-9, gira en torno de O , en sentido contrario al de las manecillas del reloj, generará un ángulo positivo θ (figura 2-10).

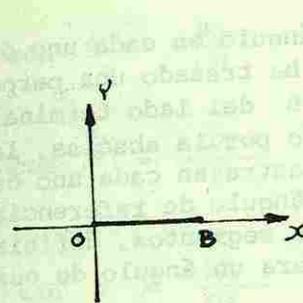


Fig. 2-9.

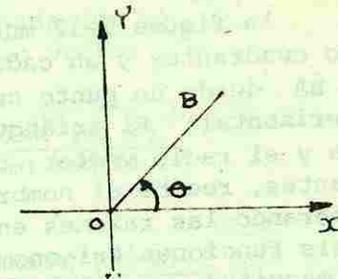


Fig. 2-10.

Desde B , un punto cualquiera del lado terminal, trazamos BA perpendicular al eje horizontal (figura 2-11) de esta manera se forma un triángulo rectángulo en el cual el lado OA es la abscisa del punto B , BA es la ordenada y OB se conoce como la distancia del origen al punto o como "radio vector". Si el punto B se tomara en otra posición, las longitudes de los lados del triángulo variarían, pero las razones de lados homólogos continuarían siendo las mismas, puesto que los triángulos son semejantes para cualquier ángulo dado θ .

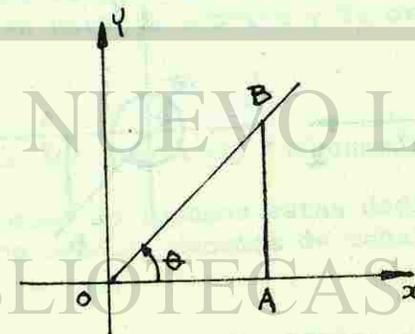


Fig. 2-11.

b) Definición.

La figura 2-12 muestra un ángulo en cada uno de los cuatro cuadrantes y en cada caso se ha trazado una perpendicular BA desde un punto cualquiera B del lado terminal, al eje horizontal. El triángulo formado por la abscisa, la ordenada y el radio vector, como se muestra en cada uno de los cuadrantes, recibe el nombre de "triángulo de referencia." Considerando las razones entre dichos segmentos, definiremos las seis funciones trigonométricas para un ángulo de cualquier magnitud.

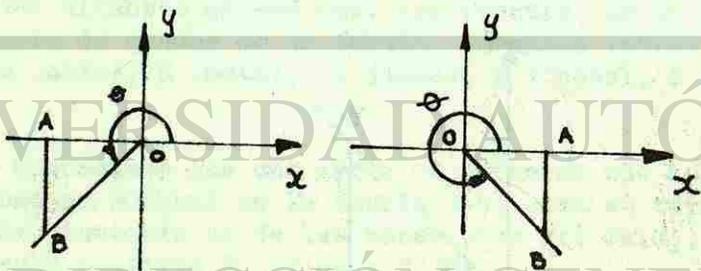
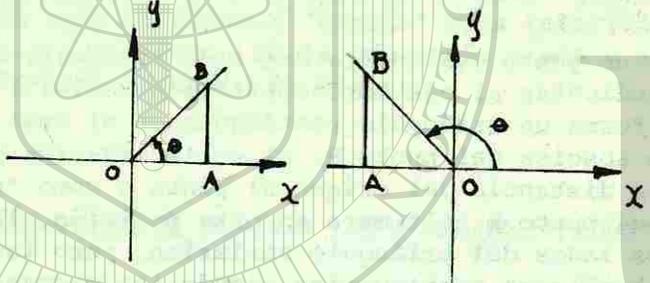


Fig. 2-12.

$$\text{sen } \theta = \frac{BA}{OB} = \frac{\text{ordenada (de B)}}{\text{radio vector}}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{abscisa (de B)}}{\text{radio vector}}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{BA}{OA} = \frac{\text{ordenada (de B)}}{\text{abscisa (de B)}}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{OA}{BA} = \frac{\text{abscisa (de B)}}{\text{ordenada (de B)}}$$

$$\text{sec } \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa (de B)}}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{OB}{BA} = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada (de B)}}$$

Estas definiciones nos permiten escribir expresiones para las funciones de ángulos de cualquier magnitud, ya que -- cualquiera que sea la posición del radio vector se tendrán los mismos valores para la abscisa y la ordenada.

c) Signos de las funciones trigonométricas.

Tan pronto como apliquemos estas definiciones a ángulos diferentes de los agudos, debemos de considerar los signos ya que:

- a) "En el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son ambas positivas."

- b) "En el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada es positiva."
- c) "En el tercer cuadrante la abscisa y la ordenada son ambas negativas."
- d) "En el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada es negativa."
- e) "El radio vector se considera siempre positivo."

Los signos de las seis funciones trigonométricas de θ dependen del cuadrante, en el que el lado terminal de θ cae. Así diremos que " θ está en el segundo cuadrante" si, colocado el lado inicial en el lado positivo de eje x, el lado terminal cae en el segundo cuadrante, y así nos expresaremos para los otros cuadrantes.

Observamos que el $\text{sen } \theta$ es positivo cuando θ está en el primer o segundo cuadrante, dado que la ordenada es positiva en el primer y en el segundo cuadrante y el radio vector es siempre positivo. En cambio, $\text{sen } \theta$ es negativo, cuando es un ángulo del tercer o cuarto cuadrante, porque la ordenada es negativa en esos cuadrantes. La situación se resume en la siguiente tabla, que el estudiante puede verificar por sí mismo.

TABLA 2-1.

Cuadrante	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

En la figura 2-13 se muestran los signos del seno, del coseno y de la tangente de ángulos que pertenecen a diferentes cuadrantes. Los signos de la cosecante, secante y de la cotangente serán, naturalmente, los mismos que los de sus correspondientes recíprocas seno, coseno y tangente.

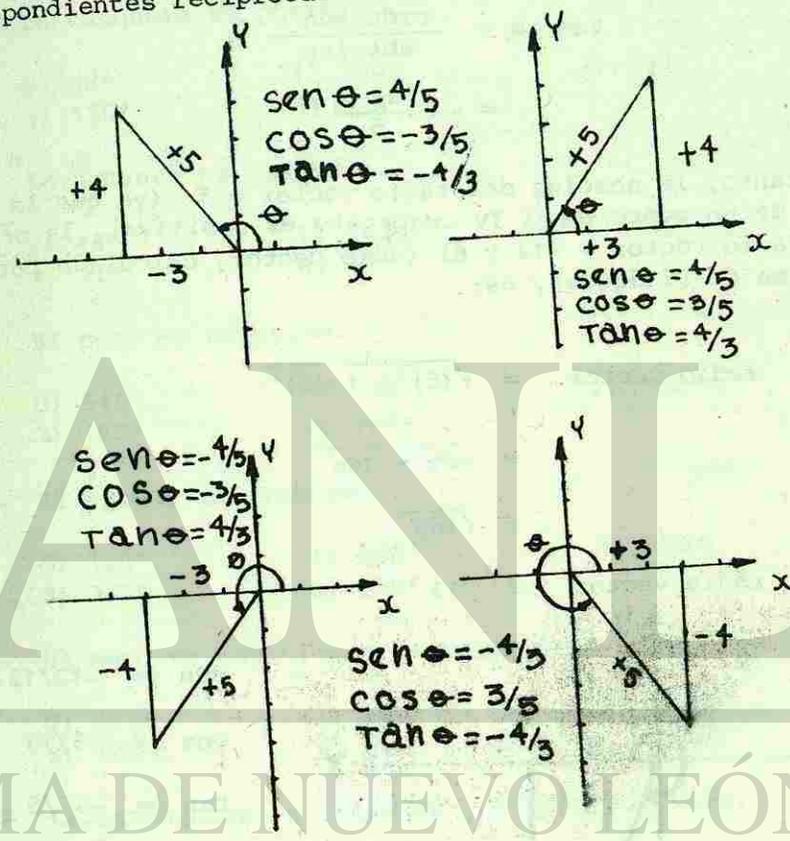


Fig. 2-13.

EJEMPLO.

Si la $\tan \phi = -12/5$ y el seno es negativo, ¿en qué cuadrante está ϕ ? (Hacer una figura donde se muestre la posición correcta del triángulo de referencia). Calcular el valor de cada una de las cinco funciones restantes de ϕ .

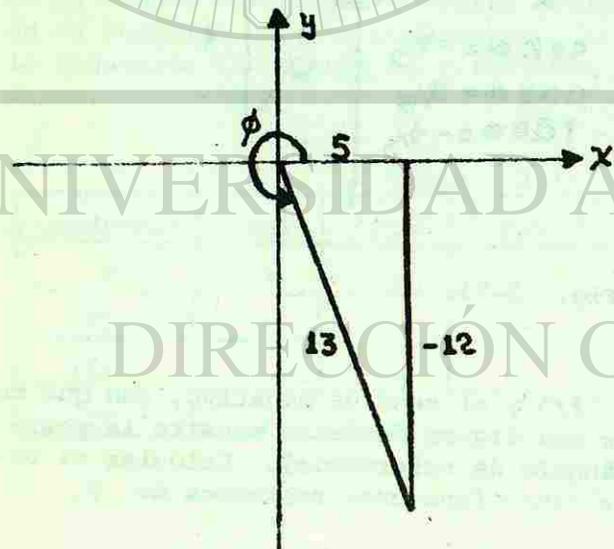
SOLUCIÓN:

El único cuadrante en que la tangente y el seno son negativos es en el IV cuadrante. Y si la

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} \\ &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

por lo tanto, la abscisa del radio vector = 5, (ya que la abscisa de un punto en el IV cuadrante es positiva), la ordenada del radio vector = -12 y el radio vector, calculado por el teorema de Pitágoras, es:

$$\begin{aligned} \text{radio vector} &= \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ \text{radio vector} &= 13 \end{aligned}$$



$$\text{sen } \phi = -12/13$$

$$\text{cos } \phi = 5/13$$

$$\text{tan } \phi = -12/5$$

$$\text{cot } \phi = -5/12$$

$$\text{sec } \phi = 13/5$$

$$\text{csc } \phi = -13/12$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

De cada uno de los siguientes conjuntos de ángulos, seleccionar aquel ángulo para el cual:

1.- La tangente es positiva.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 0) 98° | 1) 294° | 2) 200° |
| 3) 135° | 4) 332° | |

2.- La secante es positiva.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 0) 185° | 1) 243° | 2) 169° |
| 3) 325° | 4) 95° | |

3.- El seno es negativo.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 0) 54° | 1) 198° | 2) 135° |
| 3) 167° | 4) 100° | |

4.- El coseno es negativo.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 0) 128° | 1) 283° | 2) 296° |
| 3) 315° | 4) 350° | |

5.- El seno es positivo y la cotangente positiva.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 0) 321° | 1) 280° | 2) 245° |
| 3) 128° | 4) 30° | |

6.- La cotangente es negativa y coseno positivo.

- | | | |
|---------|---------|--------|
| 0) 189° | 1) 228° | 2) 99° |
| 3) 74° | 4) 330° | |

7.- La secante es negativa y la tangente negativa.

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 0) 85° | 1) 138° | 2) 190° |
| 3) 250° | 4) 324° | |

8.- La cosecante es negativa y el coseno negativo.

- | | | |
|----------------|-----------------|----------------|
| 0) 305° | 1) -312° | 2) 242° |
| 3) 165° | 4) 286° | |

Si $\tan \theta = -2/3$ y el coseno es positivo; contesta lo siguiente:

9.- ¿En qué cuadrante está el ángulo ?

- | | | |
|-------|-------|--------|
| 0) I | 1) II | 2) III |
| 3) IV | | |

10.- El valor de la función $\sin \theta$.

- | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|
| 0) $-2\sqrt{13}/13$ | 1) $-2\sqrt{5}/5$ | 2) $-3\sqrt{13}/13$ |
| 3) $-3\sqrt{5}/5$ | 4) $-\sqrt{13}/13$ | |

11.- El valor de la función $\cos \theta$.

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| 0) $2\sqrt{13}/13$ | 1) $2\sqrt{5}/5$ | 2) $3\sqrt{13}/13$ |
| 3) $3\sqrt{5}/5$ | 4) $\sqrt{13}/13$ | |

12.- El valor de la función $\cot \theta$.

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| 0) $-\sqrt{13}/2$ | 1) $-3/2$ | 2) $-\sqrt{5}/2$ |
| 3) $-\sqrt{5}/3$ | 4) $-\sqrt{13}/3$ | |

13.- El valor de la función $\sec \theta$.

- | | | |
|-------------------|------------------|-----------------|
| 0) $3/2$ | 1) $-\sqrt{5}/2$ | 2) $\sqrt{5}/3$ |
| 3) $-\sqrt{13}/2$ | 4) $\sqrt{13}/3$ | |

14.- El valor de la función $\csc \theta$.

- | | | |
|-------------------|------------------|------------------|
| 0) $-\sqrt{13}/3$ | 1) $-\sqrt{5}/3$ | 2) $-\sqrt{5}/2$ |
| 3) $-\sqrt{13}/2$ | 4) $-3/2$ | |

2-4 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD.

Hay muchas identidades importantes en trigonometría, que tendremos que hacer uso de ellas muy a menudo. Y esto se presentará sobre todo cuando los ángulos con los que estamos trabajando sean mayores de 90° . Porque, por ejemplo, las tablas de valores de las funciones trigonométricas, están hechas para ángulos cuyos valores se encuentran entre 0° y 90° solamente. Necesitamos por lo tanto, métodos de reducción de expresiones tales como $\sin(180^\circ - \theta)$, $\tan(180^\circ + \theta)$, $\cos(360^\circ - \theta)$, etc. a formas más sencillas que contengan sólo el ángulo θ y en donde θ es un ángulo mayor de 0° y menor de 90° . ($0^\circ < \theta < 90^\circ$).

a) Funciones de ángulos mayores de 90° y menores de 180° .

Consideremos un giro de OD a fin de determinar un ángulo agudo θ , después, a partir de la posición original, consideremos el giro de OB necesario para formar un ángulo de $(180^\circ - \theta)$, que es un ángulo en el segundo cuadrante. (Véase figura 2-14).

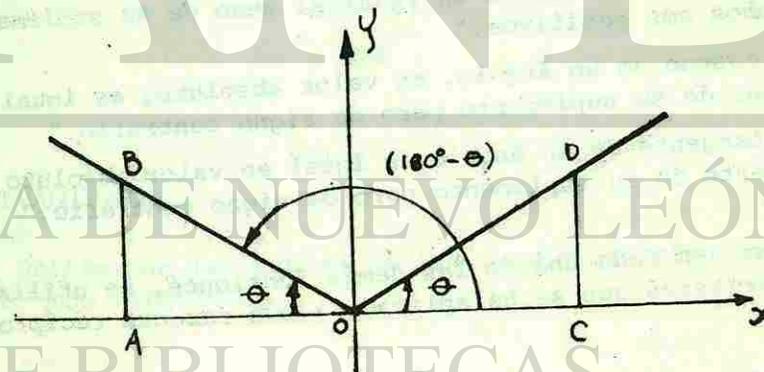


Fig. 2-14.

Fácilmente se puede demostrar que el triángulo ODC y el triángulo OBA son semejantes (algunas veces, pero no necesariamente, congruentes). Por consiguiente, sus lados correspondientes son proporcionales, pero las funciones en las que interviene OA, como es negativo, serán de signo contrario a las otras. Por lo tanto, la figura 2-14, si $OA = -OC$, se sigue que:

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{-OC}{OD} = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{BA}{OA} = -\frac{DC}{OC} = -\tan \theta$$

Lo anterior nos permite obtener el valor numérico de cualquier función trigonométrica para ángulos comprendidos entre 90° y 180° , recurriendo a las tablas de valores numéricos de las funciones de ángulos comprendidos entre 0° y 90° .

De lo anterior, podemos decir, si $90^\circ < \theta < 180^\circ$, que

- "El seno de un ángulo es igual al seno de su suplemento y ambos son positivos."
- "El coseno de un ángulo, en valor absoluto, es igual al coseno de su suplemento pero de signo contrario."
- "La tangente de un ángulo es igual en valor absoluto, a la tangente de su suplemento pero de signo contrario."

(Nota: en cada una de las demás funciones, se utiliza el mismo criterio que se ha aplicado a sus razones recíprocas).

EJEMPLO 1.

Hallar el valor de $\tan 155^\circ$

SOLUCIÓN:

$$155^\circ = 180^\circ - 25^\circ$$

por lo tanto,

$$\tan 155^\circ = \tan(180^\circ - 25^\circ)$$

$$= -\tan 25^\circ$$

$$= -0.4663$$

EJEMPLO 2.

Hallar el valor de $\csc 113^\circ$.

SOLUCIÓN:

$$113^\circ = 180^\circ - 67^\circ$$

por lo tanto,

$$\csc 113^\circ = \csc(180^\circ - 67^\circ)$$

$$= \csc 67^\circ$$

$$= 1.086$$

AUTOEVALUACION 2.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar los valores de:

1.- $\sin 171^\circ$

- 0) 0.1382
- 3) 0.9877

- 1) 0.1564
- 4) 0.9903

2) 0.1478

2.- $\tan 164^\circ$

- | | | |
|-----------|------------|-----------|
| 0) 0.2679 | 1) 0.3057 | 2) -3.487 |
| 3) -3.271 | 4) -0.2867 | |

3.- $\cos 148^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.8480 | 1) 0.5299 | 2) -0.5150 |
| 3) -0.5381 | 4) -0.8572 | |

4.- $\sin 118^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.4695 | 1) 0.4540 | 2) 0.8829 |
| 3) 0.8910 | 4) 0.8746 | |

5.- $\csc 98^\circ$

- | | | |
|----------|-----------|----------|
| 0) 7.185 | 1) 1.0098 | 2) 8.206 |
| 3) 0.008 | 4) 6.392 | |

6.- $\csc 154^\circ$

- | | | |
|-----------|----------|----------|
| 0) 2.203 | 1) 2.366 | 2) 1.122 |
| 3) 2.2812 | 4) 1.113 | |

7.- $\cot 104^\circ$

- | | | |
|------------|------------|-----------|
| 0) 3.732 | 1) -0.3057 | 2) -3.487 |
| 3) -0.2493 | 4) -0.2679 | |

8.- $\tan 112^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -2.4751 | 1) -0.4640 | 2) -0.3839 |
| 3) -2.3839 | 4) -2.356 | |

9.- $\cos 160^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.3256 | 1) -0.3420 | 2) -0.9397 |
| 3) -0.9455 | 4) -0.9336 | |

10.- $\sec 115^\circ$

- | | | |
|-----------|------------|-----------|
| 0) -1.095 | 1) -2.281 | 2) -2.459 |
| 3) -1.103 | 4) -2.3662 | |

b) Funciones de ángulos mayores de 180° y menores de 270° .

Consideremos un giro de OD para formar un ángulo agudo θ , después, a partir de la posición original, consideremos el giro de OD correspondiente a un ángulo de $(180^\circ + \theta)$, que es un ángulo del tercer cuadrante. (Véase figura 2-15).

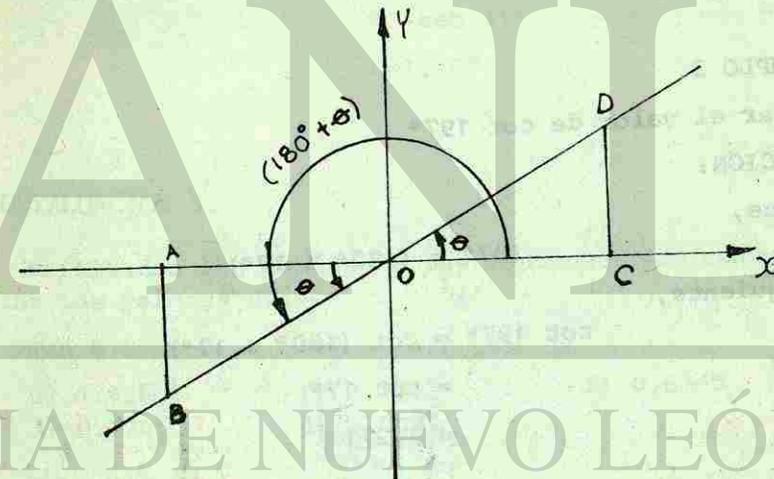


Fig. 2-15.

Se puede demostrar fácilmente que el triángulo ODC y el triángulo OBA de la figura 2-15 son semejantes. Por lo tanto, si $OA = -OC$ y $BA = -DC$, entonces tendremos:

$$\text{sen } (180^\circ + \theta) = \frac{BA}{OB} = -\frac{DC}{OD} = -\text{sen } \theta$$

$$\text{cos } (180^\circ + \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{-OC}{OD} = -\text{cos } \theta$$

$$\text{tan } (180^\circ + \theta) = \frac{BA}{OA} = \frac{-DC}{-OC} = \text{tan } \theta$$

De todo lo anterior, podemos decir que:

"Cualquier función de un ángulo expresado como 180° más (o menos) un ángulo agudo, es igual, en valor absoluto, a la misma función del ángulo agudo, con el mismo signo o con el signo contrario, dependiendo del cuadrante en que se encuentre la función."

EJEMPLO 3.

Hallar el valor de $\cot 197^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que,

$$197^\circ = (180^\circ + 17^\circ)$$

por consiguiente,

$$\cot 197^\circ = \cot (180^\circ + 17^\circ)$$

$$= \cot 17^\circ$$

$$= 3.271$$

EJEMPLO 4.

Hallar el valor de $\text{sen } 228^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que

$$228^\circ = (180^\circ + 48^\circ)$$

por consiguiente,

$$\text{sen } 228^\circ = \text{sen } (180^\circ + 48^\circ)$$

$$= -\text{sen } 48^\circ$$

$$= -0.7431$$

EJEMPLO 5.

Hallar el valor de $\text{sec } 149^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que,

$$149^\circ = (180^\circ - 31^\circ)$$

por consiguiente,

$$\text{sec } 149^\circ = \text{sec } (180^\circ - 31^\circ)$$

$$= -\text{sec } 31^\circ$$

$$= -1.167$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar los valores de:

1.- $\text{Tan } 215^\circ$

0) 1.428

1) 0.7002

2) 0.6745

3) 0.7265

4) 1.483

2.- $\text{sen } 213^\circ$

0) -0.5299

1) -0.8480

2) -0.5592

3) -0.5446

4) -0.8387

3.- $\text{csc } 235^\circ$

0) -1.2208

1) -1.743

2) -1.206

3) -1.236

4) -1.788

4.- $\cot 218^\circ$

- | | | |
|-----------|----------|-----------|
| 0) 0.7813 | 1) 1.327 | 2) 1.2799 |
| 3) 0.7536 | 4) 1.235 | |

5.- $\cos 188^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.1392 | 1) -0.9925 | 2) -0.9877 |
| 3) -0.1219 | 4) -0.9903 | |

6.- $\sin 263^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.9925 | 1) -0.1392 | 2) -0.1219 |
| 3) -0.9877 | 4) -0.9903 | |

7.- $\tan 195^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 3.732 | 1) 0.2493 | 2) 0.2679 |
| 3) 0.2867 | 4) 4.011 | |

8.- $\sec 259^\circ$

- | | | |
|-----------|------------|-----------|
| 0) -1.019 | 1) -0.1908 | 2) -5.759 |
| 3) -1.022 | 4) -5.2408 | |

9.- $\cos 201^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.9327 | 1) -0.9336 | 2) -0.9272 |
| 3) -0.3584 | 4) -0.3420 | |

10.- $\cot 244^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|----------|
| 0) 2.050 | 1) 0.4663 | 2) 2.145 |
| 3) 0.4877 | 4) 0.5995 | |

c) Funciones de ángulos mayores de 270° y menores de 360° .

Consideremos un giro de OD para formar un ángulo agudo θ , después, a partir de la posición original, consideremos el giro de OD correspondiente a un ángulo de $(360^\circ - \theta)$, que es un ángulo del cuarto cuadrante. (Véase figura 2-16).

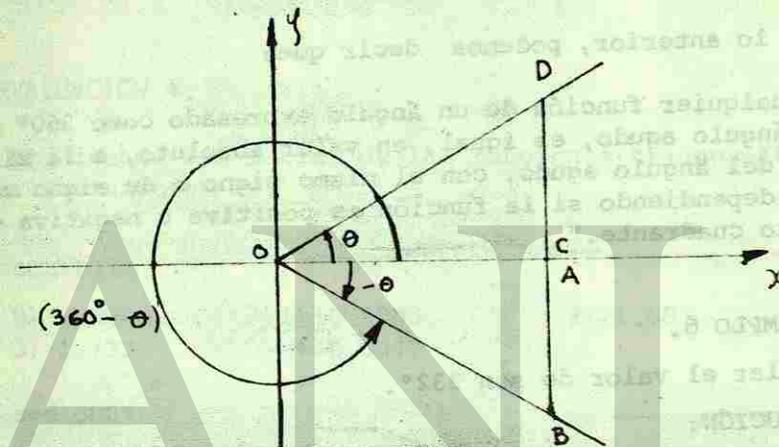


Fig. 2 - 16.

Análogamente se puede demostrar que el triángulo ODC y el triángulo OBA de la figura 2-16 son semejantes.

En dicha figura observamos que $(360^\circ - \theta)$ es coterminal con el ángulo agudo $(-\theta)$ y, por lo tanto, las relaciones establecidas anteriormente también serán válidas para las funciones de $(-\theta)$.

Por lo tanto, si $BA = -DC$, tendremos:

$$\operatorname{sen} (360^\circ - \theta) = \frac{BA}{OB} = \frac{-DC}{OD} = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{cos} (360^\circ - \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{tan} (360^\circ - \theta) = \frac{BA}{OA} = \frac{-DC}{OC} = -\operatorname{tan} \theta$$

De lo anterior, podemos decir que:

"Cualquier función de un ángulo expresado como 360° menos el ángulo agudo, es igual, en valor absoluto, a la misma función del ángulo agudo, con el mismo signo o de signo contrario, dependiendo si la función es positiva o negativa en el cuarto cuadrante."

EJEMPLO 6.

Hallar el valor de $\operatorname{sen} 332^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que, $332^\circ = (360^\circ - 28^\circ)$
 por lo tanto, $\operatorname{sen} 332^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ - 28^\circ)$
 $= -\operatorname{sen} 28^\circ$

$$= -0.4695$$

EJEMPLO 7.

Hallar el valor de $\operatorname{cos} 298^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que, $298^\circ = (360^\circ - 62^\circ)$
 por consiguiente, $\operatorname{cos} 298^\circ = \operatorname{cos} (360^\circ - 62^\circ)$

$$= \operatorname{cos} 62^\circ$$

$$= 0.4695$$

EJEMPLO 8.

Hallar el valor de $\operatorname{cot} 322^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que, $322^\circ = (360^\circ - 38^\circ)$
 por lo tanto, $\operatorname{cot} 322^\circ = \operatorname{cot} (360^\circ - 38^\circ)$
 $= -\operatorname{cot} 38^\circ$
 $= -1.28$

AUTOEVALUACION 4.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar los valores de:

1.- $\operatorname{cot} 331^\circ$

0) -1.8040	1) -0.5543	2) -1.881
3) -1.732	4) -0.5317	

2.- $\operatorname{sec} 302^\circ$

0) 1.179	1) 0.5299	2) 1.8871
3) 1.942	4) 1.167	

3.- $\operatorname{sen} 323^\circ$

0) -0.7986	1) -0.6018	2) -0.5878
3) -0.8090	4) -0.7880	

4.- $\operatorname{tan} 314^\circ$

0) -0.9657	1) -1.072	2) -0.9325
3) -1.0355	4) -0.9942	

5.- $\operatorname{csc} 351^\circ$

0) -1.012	1) -6.314	2) -6.3925
3) -7.185	4) -1.010	

6.- $\cos 274^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.9976 | 1) 0.0872 | 2) 0.9962 |
| 3) 0.0523 | 4) 0.0698 | |

7.- $\sin 348^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.9781 | 1) -0.2079 | 2) -0.2250 |
| 3) -0.1908 | 4) -0.9816 | |

8.- $\sec 283^\circ$

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| 0) 1.022 | 1) 4.810 | 2) 0.2250 |
| 3) 1.026 | 4) 4.4454 | |

9.- $\cot 341^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -2.9042 | 1) -0.3443 | 2) -0.3249 |
| 3) -2.747 | 4) -3.078 | |

10.- $\cos 294^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.3907 | 1) 0.4226 | 2) 0.9205 |
| 3) 0.4067 | 4) 0.9135 | |

d) Funciones de ángulos de un cuadrante (0° , 90° , 180° y 270°).

Cuando el radio vector OB está en la posición que se muestra en la figura 2-17 y no ha iniciado su giro, entonces $\theta = 0^\circ$, la abscisa de B = OB y la ordenada de B = 0.

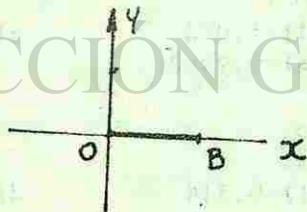


Fig. 2-17.

Por consiguiente,

$$\sin 0^\circ = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{radio vector}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{radio vector}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{abscisa de B}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{ordenada de B}} = \frac{OB}{0} = *$$

$$\sec 0^\circ = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa de B}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

$$\csc 0^\circ = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada de B}} = \frac{OB}{0} = *$$

*La $\cot 0^\circ$ y la $\csc 0^\circ$ se dice que "no están definidas" ya que la división entre cero no tiene significado.

Podemos decir que a medida que el ángulo tiende a 0° la cotangente y cosecante tienden a un número infinitamente grande o crecen indefinidamente. O sea que, para θ mayor de 0° , cuando θ tiende a 0° , la $\cot \theta$ tiende a ∞ .

Cuando se emplea el "símbolo de infinito" debe entenderse claramente que "no representa ningún número definido".

Se puede ver que a medida que un ángulo tiende a 0° , la longitud de la ordenada disminuye continuamente, mientras que la función que tiene a la ordenada, como denominador, crece en valor, indefinidamente.

Si el numerador de cualquier fracción permanece constante y el denominador se hace, sucesivamente, más pequeño, el

valor de la fracción se hace cada vez más grande. Así, a medida que un ángulo positivo tiende a 0° , los valores de su cotangente y cosecante se harán cada vez más grandes, tendiendo hacia infinito.

Consideremos, ahora, la figura 2-18 donde la recta OB de la figura 2-17, da un giro de 90° . Entonces $\theta = 90^\circ$, la abscisa de B = 0 y la ordenada de B = OB.

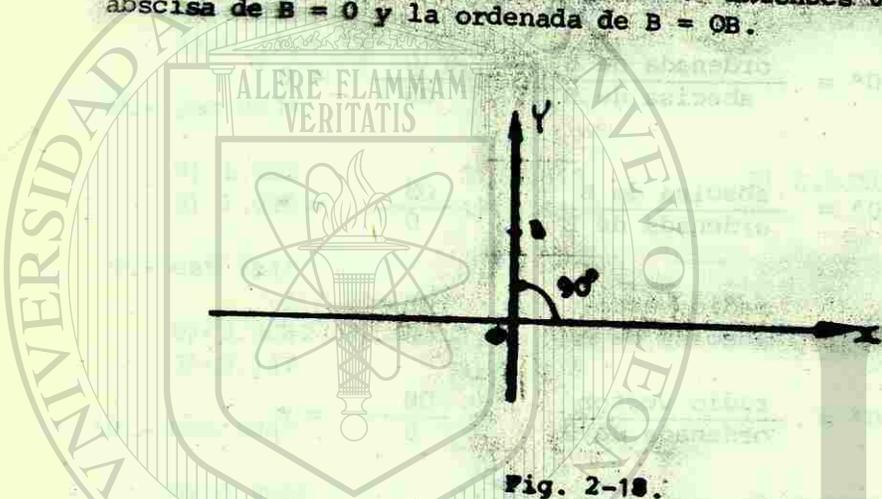


Fig. 2-18.

Por consiguiente,

$$\text{sen } 90^\circ = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{radio vector}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

$$\text{cos } 90^\circ = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{radio vector}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\text{tan } 90^\circ = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{abscisa de B}} = \frac{OB}{0}, \text{ no está definida}$$

$$\text{cot } 90^\circ = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{ordenada de B}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\text{sec } 90^\circ = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa de B}} = \frac{OB}{0}, \text{ no está definida}$$

$$\text{csc } 90^\circ = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada de B}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

Si la recta OB, de la figura 2-17, da un giro de 180° , entonces $\theta = 180^\circ$, la abscisa de B = -OB y la ordenada de B = 0. (Véase figura 2-19).

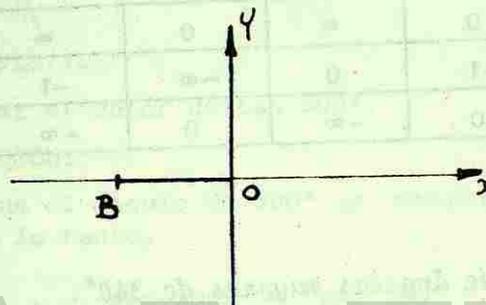


Fig. 2-19.

Por consiguiente,

$$\text{sen } 180^\circ = 0 \quad \text{cot } 180^\circ, \text{ no está definido}$$

$$\text{cos } 180^\circ = -1 \quad \text{sec } 180^\circ = -1$$

$$\text{tan } 180^\circ = 0 \quad \text{csc } 180^\circ, \text{ no está definida}$$

Y si OB da un giro de 270° , se verá que:

$$\text{sen } 270^\circ = -1 \quad \text{cot } 270^\circ = 0$$

$$\text{cos } 270^\circ = 0 \quad \text{sec } 270^\circ, \text{ no está definida}$$

$$\text{tan } 270^\circ, \text{ no está definida} \quad \text{csc } 270^\circ = -1$$

Puesto que un ángulo de 360° es coterminal de 0° , sus funciones tienen los mismos valores que las correspondientes a 0° .

Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

TABLA 2 - 2.

θ	$\text{sen}\theta$	$\text{cos}\theta$	$\text{tan}\theta$	$\text{cot}\theta$	$\text{sec}\theta$	$\text{csc}\theta$
0°	0	1	0	∞	1	∞
90°	1	0	∞	0	∞	1
180°	0	-1	0	$-\infty$	-1	∞
270°	-1	0	$-\infty$	0	$-\infty$	-1

e) Funciones de ángulos mayores de 360° .

Hemos visto que las funciones de un ángulo comprendido entre 0° y 360° , se pueden expresar en términos de un ángulo agudo. Cualquier ángulo mayor de 360° puede sustituirse por otro menor, restándole el mayor número de vueltas completas para convertirlo en un ángulo coterminal (ya que, todas las propiedades de ángulos coterminales son las mismas).

En virtud de que la posición de la recta generatriz determina tanto el valor numérico como el signo de cualquier función trigonométrica del ángulo que genera, vemos que los valores de dichas funciones pasan periódicamente por todos los valores positivos y negativos repitiéndose a intervalos de 360° , o de una vuelta. Así, por ejemplo, las seis funciones de 130° tendrán el mismo valor numérico y el mismo signo que el de las funciones correspondientes a 490° ($360^\circ + 130^\circ$). Lo mismo es cierto para las funciones de 330° y 690° . Debido a esta repetición periódica, cada función trigonométrica recibe el nombre de "función periódica".

EJEMPLO 9.

Hallar el valor de $\text{sen } 392^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de 392° es coterminal del ángulo de 32° , por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{sen } 392^\circ &= \text{sen } 32^\circ \\ &= 0.5299\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.

Hallar el valor de $\text{tan } 500^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de 500° es coterminal del ángulo de 140° , por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{tan } 500^\circ &= \text{tan } 140^\circ \\ &= \text{tan } (180^\circ - 40^\circ) \\ &= -\text{tan } 40^\circ \\ &= -0.8391\end{aligned}$$

EJEMPLO 11.

Hallar el valor de $\text{cos } 706^\circ$.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de 706° es coterminal del ángulo de 346° , por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{cos } 706^\circ &= \text{cos } 346^\circ \\ &= \text{cos } (360^\circ - 14^\circ) \\ &= \text{cos } 14^\circ \\ &= 0.9703\end{aligned}$$

AUTOEVALUACION 5.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar el valor de:

1.- $\text{sen } 393^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.8387 | 1) 0.5299 | 2) 0.5446 |
| 3) 0.8480 | 4) 0.5592 | |

2.- $\text{cot } 938^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|----------|
| 0) 1.235 | 1) 0.7536 | 2) 1.327 |
| 3) 0.7813 | 4) 1.2799 | |

3.- $\text{sen } 1177^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.1392 | 1) 0.9925 | 2) 0.1219 |
| 3) 0.9877 | 4) 0.9903 | |

4.- $\text{sec } 641^\circ$

- | | | |
|-----------|----------|-----------|
| 0) 1.022 | 1) 5.759 | 2) 0.1908 |
| 3) 5.2408 | 4) 1.019 | |

5.- $\text{cot } 836^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.4877 | 1) -2.050 | 2) -0.4663 |
| 3) -2.145 | 4) -0.5095 | |

6.- $\text{sec } 1382^\circ$

- | | | |
|-----------|----------|-----------|
| 0) 1.167 | 1) 1.942 | 2) 0.5299 |
| 3) 1.8871 | 4) 1.179 | |

7.- $\text{tan } 406^\circ$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.9942 | 1) 1.0355 | 2) 0.9657 |
| 3) 1.072 | 4) 0.9325 | |

8.- $\text{cos } 986^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.0523 | 1) -0.9962 | 2) -0.0698 |
| 3) -0.9976 | 4) -0.0872 | |

9.- $\text{sec } 1157^\circ$

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| 0) 1.022 | 1) 4.810 | 2) 0.2250 |
| 3) 1.026 | 4) 4.4454 | |

10.- $\text{cos } 474^\circ$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.4067 | 1) -0.9135 | 2) -0.3907 |
| 3) -0.4226 | 4) -0.9205 | |

f) Funciones de ángulos negativos.

Consideremos un giro de OB necesario para formar un ángulo θ pero en sentido de las manecillas del reloj a fin de que el ángulo sea negativo.

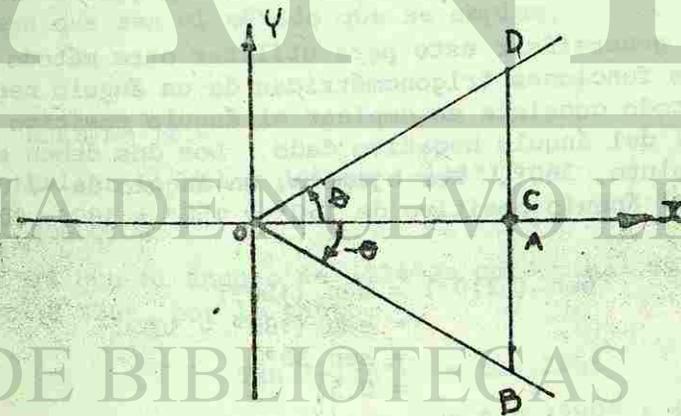


Fig. 2-20.

Nuevamente tenemos los triángulos semejantes ODC y OBA con lados correspondientes iguales en magnitud, pero BA = DC. Procediendo en forma similar a los casos anteriores,

$$\operatorname{sen}(-\theta) = \frac{BA}{OB} = \frac{-DC}{OD} = -\operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{cos}(-\theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{tan}(-\theta) = \frac{BA}{OA} = \frac{-DC}{OC} = -\operatorname{tan} \theta$$

$$\operatorname{cot}(-\theta) = \frac{OA}{BA} = \frac{OC}{-DC} = -\operatorname{cot} \theta$$

$$\operatorname{sec}(-\theta) = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \operatorname{sec} \theta$$

$$\operatorname{csc}(-\theta) = \frac{OB}{BA} = \frac{OD}{-DC} = -\operatorname{csc} \theta$$

tal como sucedió para las funciones $(360^\circ - \theta)$.

Podemos generalizar esto para utilizar otro método para encontrar las funciones trigonométricas de un ángulo negativo. Este método consiste en emplear el ángulo positivo que es cotermino del ángulo negativo dado. Los dos deben sumarse en valor absoluto, 360° . Por ejemplo, un ángulo de -210° es cotermino del ángulo positivo de 150° y $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, así que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-210^\circ) &= \operatorname{sen}(150^\circ) \\ &= \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) \\ &= \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(-210^\circ) &= \operatorname{cos}(150^\circ) \\ &= \operatorname{cos}(180^\circ - 30^\circ) \\ &= -\operatorname{cos} 30^\circ \\ &= -0.8660 \end{aligned}$$

Obsérvese que si se han obtenido dichos valores haciendo uso de $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-210^\circ) &= -\operatorname{sen}(210^\circ) \\ &= -(-\operatorname{sen} 30^\circ) \\ &= -(-0.5) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(-210^\circ) &= \operatorname{cos}(210^\circ) \\ &= -\operatorname{cos} 30^\circ \\ &= -0.8660 \end{aligned}$$

de tal suerte que los resultados deben ser iguales a cualquiera que sea el método que se emplee.

EJEMPLO 12.

Hallar el valor de $\operatorname{tan}(-134^\circ)$.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de -134° es cotermino del ángulo positivo de 226° , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tan}(-134^\circ) &= \operatorname{tan} 226^\circ \\ &= \operatorname{tan}(180^\circ + 46^\circ) \\ &= \operatorname{tan} 46^\circ \\ &= 1.036 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13.

Hallar el valor de $\csc (-327^\circ)$.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de -327° es cotermino del ángulo positivo de 33° , por lo tanto:

$$\begin{aligned}\csc (-327^\circ) &= \csc 33^\circ \\ &= 1.836\end{aligned}$$

EJEMPLO 14.

Hallar el valor de $\sen (-25^\circ)$.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de -25° es cotermino del ángulo positivo de 335° y $335^\circ = 360^\circ - 25^\circ$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sen (-25^\circ) &= \sen 335^\circ \\ &= \sen (360^\circ - 25^\circ) \\ &= -\sen 25^\circ \\ &= -0.4226\end{aligned}$$

AUTOEVALUACION 6.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas, hallar el valor de:

1.- $\tan (-215^\circ)$

- | | | |
|------------|-----------|------------|
| 0) -0.7002 | 1) -1.428 | 2) -0.6745 |
| 3) -0.7265 | 4) -1.483 | |

2.- $\csc (-125^\circ)$

- | | | |
|-----------|------------|-----------|
| 0) -1.788 | 1) -1.236 | 2) -1.206 |
| 3) -1.743 | 4) -1.2208 | |

3.- $\cos (-352^\circ)$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1) 0.1392 | 1) 0.9903 | 2) 0.9925 |
| 3) 0.9877 | 4) 0.1219 | |

4.- $\tan (-15^\circ)$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -4.011 | 1) -0.2867 | 2) -0.2493 |
| 3) -0.2679 | 4) -3.732 | |

5.- $\cos (-339^\circ)$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.3420 | 1) 0.3584 | 2) 0.9336 |
| 3) 0.9327 | 4) 0.9272 | |

6.- $\cot (-151^\circ)$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.5317 | 1) 1.8040 | 2) 0.5543 |
| 3) 1.881 | 4) 1.732 | |

7.- $\sen (-37^\circ)$

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 0) -0.5878 | 1) -0.8090 | 2) -0.7880 |
| 3) -0.6018 | 4) -0.7986 | |

8.- $\csc (-189^\circ)$

- | | | |
|-----------|----------|----------|
| 0) 6.3925 | 1) 1.012 | 2) 6.314 |
| 3) 7.185 | 4) 1.010 | |

9.- $\sen (-348^\circ)$

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 0) 0.9816 | 1) 0.1908 | 2) 0.2250 |
| 3) 0.9781 | 4) 0.2079 | |

10.- $\cot(-161^\circ)$

- 0) 0.3443 1) 2.9042 2) 0.3249
 3) 2.747 4) 3.078

g) Representación de las funciones trigonométricas por segmentos rectilíneos.

Antiguamente los matemáticos concebían las funciones seno y tangente: como "segmentos rectilíneos" referidos a una circunferencia cuyo radio era igual a la unidad. Sin embargo, hemos considerado, en páginas anteriores, a las seis funciones trigonométricas como "razones" entre dos longitudes. Podemos afirmar que ambas formas de estudiar las funciones trigonométricas están íntimamente relacionadas y aún más, es conveniente y de gran utilidad estudiar y comparar sus variaciones mediante el uso de unas figuras en que se muestran las seis funciones cuando su denominador es igual a la unidad.

Es fácil observar que toda fracción cuyo denominador sea 1 es igual en valor a su numerador, cualquiera que ésta sea. Por ejemplo,

$$\frac{3}{1} = 3; \quad \frac{9}{1} = 9; \quad \frac{15}{1} = 15; \quad \frac{x}{1} = x$$

Por consiguiente, si ideamos una figura en la que cada una de las funciones trigonométricas pueda ser representada por una razón cuyo denominador sea igual a la unidad, el valor de cada una de las funciones estará representando en la figura por la longitud de un segmento de recta que representará al numerador de su razón y en estas condiciones será posible comparar las funciones por la comparación de las longitudes de varios segmentos rectilíneos que contengan la figura.

Primero representaremos por medio de tales segmentos rectilíneos las seis funciones trigonométricas de un ángulo

agudo y después, mediante una construcción similar y consideraciones análogas, podremos considerar ángulos de cualquier magnitud en los otros tres cuadrantes.

Consideremos dos ejes de coordenadas. Sea θ un ángulo agudo cualquiera con vértice en el origen O y su lado inicial coincidiendo con la parte positiva del "eje X". Con centro en O, trazamos una circunferencia cuyo radio se considerará de longitud uno y que intersecte al lado terminal en el punto B, se traza BA perpendicular al eje X, siendo A el punto de intersección.

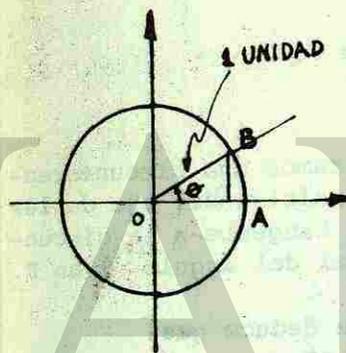


Fig. 2-21.

De donde se deduce que:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{BA}{OB} \\ &= \frac{BA}{1} \\ &= BA \\ \cos \theta &= \frac{OA}{OB} \\ &= \frac{OA}{1} \\ &= OA \end{aligned}$$

Ahora, con centro en O, trazamos una circunferencia unitaria que intersecte al lado inicial en el punto C y desde C, se traza una tangente a la circunferencia que intersecte el lado terminal de θ en D.

DE BIBLIOTECAS

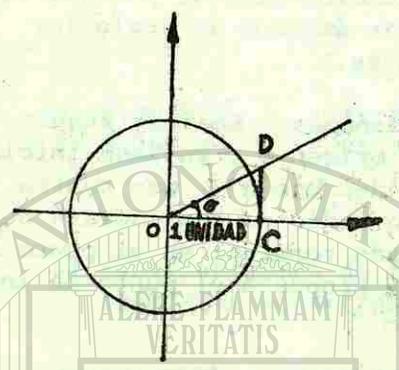


Fig. 2-22.

Y por último con centro en O, trazamos una circunferencia unitaria que intersecte la parte positiva del eje de las ordenadas en G y desde G, se traza una tangente a la circunferencia que intersecte al lado terminal del ángulo θ en P.

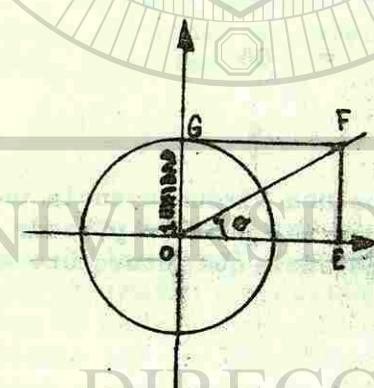


Fig. 2-23.

De donde se deduce que:

$$\tan \theta = \frac{DC}{OC}$$

$$= \frac{DC}{1}$$

$$= DC$$

$$\sec \theta = \frac{OD}{OC}$$

$$= \frac{OD}{1}$$

$$= OD$$

De donde se deduce que:

$$\cot \theta = \frac{OE}{FE}$$

$$= \frac{OE}{OG}$$

$$= \frac{OE}{1}$$

$$= OE$$

$$\csc \theta = \frac{OF}{FE}$$

$$= \frac{OF}{OG}$$

$$= \frac{OF}{1}$$

$$= OF$$

Para mayor claridad, los segmentos de recta anteriores se muestran todos en las figuras 2-24, 2-25 y 2-26.

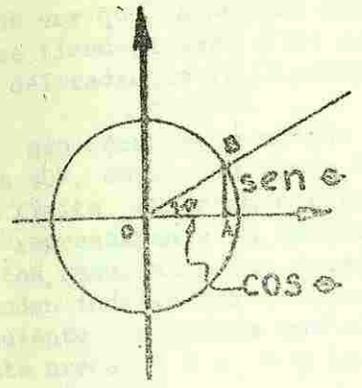


Fig. 2-24.

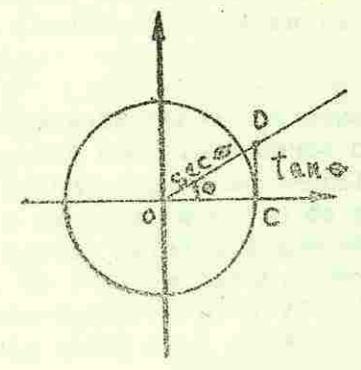


Fig. 2-25.

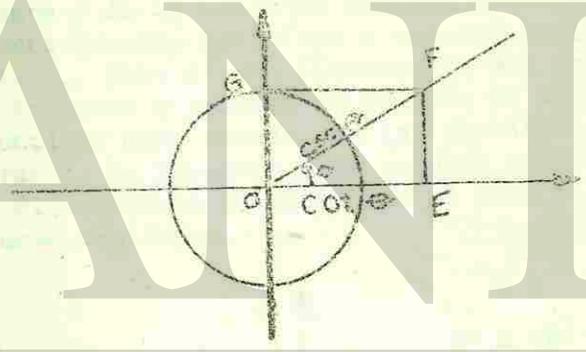
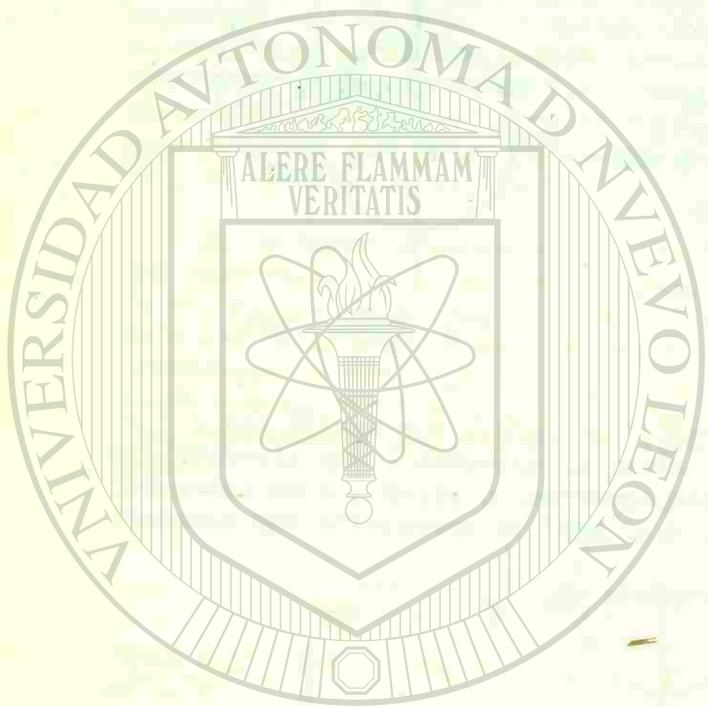


Fig. 2-26

Haciendo exactamente la misma construcción con el procedimiento anterior para ángulos con su lado terminal comprendido en el segundo, tercero y cuarto cuadrante, se encontrará de inmediato que las funciones de $(180^\circ - \theta)$, $(180^\circ + \theta)$ y $(360^\circ - \theta)$ son numéricamente iguales a las funciones de θ .



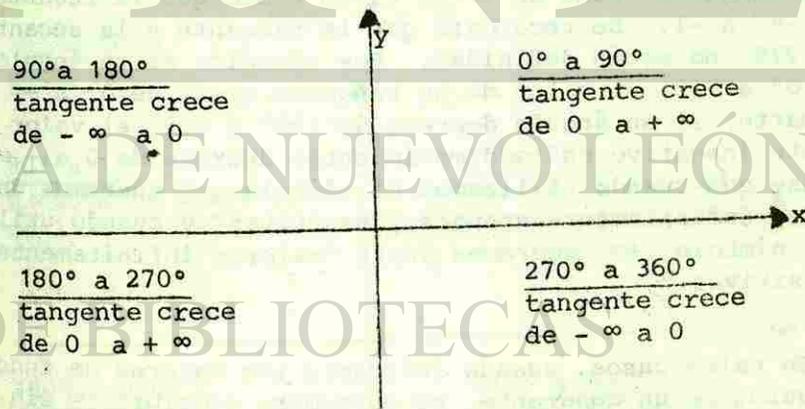
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2. *tangente y secante.* En las figuras 2-22 y 2-25 se puede ver que a medida que el ángulo tiende a cero, su tangente tiende a cero y su secante tiende a 1, que es la longitud del radio de la circunferencia.

Sin embargo, a medida que el ángulo crece aproximadamente a 90° , se ve que tanto la tangente como la secante crecen sin límite. Exactamente en 90° dichos segmentos rectilíneos que representan a la tangente y a la secante dejan de ser segmentos, resultando una pareja de rectas paralelas que se extienden indefinidamente tratando de intersectarse. Por consiguiente, "a medida que el ángulo crece de 0° a 90° , la tangente crece de 0 a ∞ y la secante crece de 1 a ∞ .

Al pasar el lado terminal al segundo cuadrante, por pequeño que se considere el incremento, se verá que los valores de la secante y de la tangente cambian bruscamente de valores infinitamente grandes positivos a valores infinitamente grandes negativos. Esto es una ilustración del hecho de que las funciones tangente y secante no cambian de valor de un modo suave y continuo como sucede con las funciones seno y coseno. Por esta razón, la tangente y la secante reciben el nombre de funciones discontinuas en oposición al seno y al coseno que son funciones continuas.



Variación de los valores de la tangente.

Fig. 2-29.

90° a 180°
secante crece
de $-\infty$ a -1

0° a 90°
secante crece
de 1 a $+\infty$

180° a 270°
secante decrece
de -1 a $-\infty$

270° a 360°
secante decrece
de $+\infty$ a 1

Variación de los valores de la secante.

Fig. 2-30.

Al pasar el lado terminal al segundo cuadrante, la tangente y la secante, que en 90° eran ambas infinitas, ahora los dos tienen valores finitos que resultan cada vez más pequeños a medida que el ángulo tiende a 180°. Sin embargo, debido a que ambos grupos de segmentos rectilíneos son negativos, dicha disminución en longitud indica un crecimiento en valor numérico: la tangente crece de $-\infty$ a 0, en tanto que la secante crece de $-\infty$ a -1 . Se recordará que la tangente y la secante, en 90° y 270°, no están definidas. Por ejemplo, si un ángulo crece de 0° a 90°, el valor de su tangente crece de 0 a $+\infty$; por otra parte, si un ángulo decrece de 180° a 90°, el valor de la tangente (negativo en todo movimiento) decrece de 0 a $-\infty$. Cuérdese que cuando utilizamos el símbolo $-\infty$ queremos decir "valores infinitamente grandes y negativos" y cuando utilizamos el símbolo $+\infty$ queremos decir "valores infinitamente grandes positivos."

En tales casos, cuando indicamos los valores de funciones de ángulos de un cuadrante, es costumbre escribir ∞ sin signo. Sin embargo, cuando se describe la variación de las funciones para un ángulo que varía, es conveniente indicar el signo más o el signo menos cuando una función tiende a un valor

infinito positivo o un valor infinito negativo.

3. *Cotangente y cosecante.* las figuras 2-23 y 2-26 muestran las variaciones de la cotangente y la cosecante en el primer cuadrante. Dejamos el análisis al estudiante con la recomendación de comparar dichas figuras con las figuras 2-31 y 2-32.

90° a 180°
cotangente decrece
de 0 a $-\infty$

0° a 90°
cotangente decrece
de $+\infty$ a 0

180° a 270°
cotangente decrece
de $+\infty$ a 0

270° a 360°
cotangente decrece
de 0 a $-\infty$

Variación de los valores de la cotangente.

Fig. 2 - 31.

90° a 180°
cosecante crece
de 1 a $+\infty$

0° a 90°
cosecante decrece
de $+\infty$ a 1

180° a 270°
cosecante crece
de $-\infty$ a -1

270° a 360°
cosecante decrece
de -1 a $-\infty$

Variación de los valores de la cosecante.

Fig. 2 - 32.

AUTOEVALUACION 7.

Observando las figuras relativas, decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- 1.- Si θ crece de 90° a 180° , $\cot \theta$ decrece de 0 a $-\infty$.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 2.- Si θ crece de 270° a 360° , $\sec \theta$ decrece de $+\infty$ a 1.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 3.- Si θ decrece de 180° a 90° , $\csc \theta$ decrece de $+\infty$ a 1.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 4.- Si θ crece de 90° a 180° , $\cos \theta$ decrece de 0 a -1.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 5.- Si θ decrece de 360° a 270° , $\cos \theta$ crece de 0 a 1.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 6.- Si θ crece de 180° a 270° , $\cot \theta$ decrece de 1 a 0.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 7.- Si θ decrece de 70° a 180° , $\tan \theta$ decrece de $+\infty$ a 0.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 8.- Si θ crece de 0° a 90° , $\tan \theta$ crece de 1 a $+\infty$.
0) Falso. 1) Verdadero.
- 9.- Si θ decrece de 90° a 0° , $\sin \theta$ crece de 0 a 1.
0) Falso. 1) Verdadero.

- 10.- Si θ crece de 180° a 270° , $\sin \theta$ decrece de 0 a -1.

0) Falso. 1) Verdadero.

¿En qué cuadrante ocurren los siguientes cambios? (Considérese incrementos positivos para el ángulo).

- 11.- El coseno crece y la cosecante decrece.
0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos
- 12.- La secante y la cosecante crecen.
0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos
- 13.- El seno decrece y el coseno crece.
0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos
- 14.- La tangente decrece y la cotangente crece.
0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos
- 15.- La tangente crece y la cotangente decrece.
0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO II.

Selecciona la respuesta correcta subrayándola.

1.- Cuando el giro de un ángulo es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es:

- 1) Agudo. 2) Positivo 3) Obtuso.
4) Negativo.

2.- La intersección de los ejes que dividen un plano en cuatro cuadrantes se denomina:

- 1) Origen. 2) Vértice. 3) Punto.
4) Ordenada.

3.- El triángulo formado por la abscisa, la ordenada y el radio vector recibe el nombre de:

- 1) Triángulo isósceles. 2) Triángulo oblicuángulo.
3) Triángulo equilátero. 4) Triángulo de referencia.

Si $\cos\theta = -3/5$ y la $\cot\theta$ es positiva; contesta lo siguiente: (preguntas 4, 5 y 6).

4.- ¿En qué cuadrante está θ ?

- 1) 1er. cuadrante. 2) 2º cuadrante.
3) 3er. cuadrante. 4) 4º cuadrante.

5.- ¿Qué valor tiene la $\sec\theta$?

- 1) $4/5$ 2) $5/4$ 3) $-5/3$
4) $1/2$

6.- ¿Cuál es el valor de θ ?

- 1) $233^\circ 7' 48''$ 2) $36^\circ 50'$ 3) $38^\circ 40'$
4) $51^\circ 20'$

A partir de $\sin 300^\circ$, contesta lo siguiente:

7.- Expresar la función en términos de un ángulo agudo.

- 1) $\sin 60^\circ$ 2) $\sin -30^\circ$ 3) $\sin 30^\circ$
4) $-\sin 60^\circ$

8.- Dar su valor numérico como una razón:

- 1) $2/3$ 2) $-\sqrt{3}/2$ 3) 2
4) 1

A partir de $\sec(-148^\circ 20')$ contesta lo siguiente:

9.- Expresar la función en términos de un ángulo agudo.

- 1) $-\sec 31^\circ 40'$ 2) $\sec 51^\circ 40'$ 3) $\csc 51^\circ 40'$
4) $-\csc 51^\circ 40'$

10.- Dar el valor numérico de la función por tablas:

- 1) 1.2750 2) -1.1749 3) 1.578
4) -1.293

11.- Relaciona correctamente las siguientes columnas:

- a) 0.2994 _____ $\csc 165^\circ$
b) -3.864 _____ $\tan(180^\circ + 16^\circ 40')$
c) 0.02994 _____ $\sec 298^\circ$
d) 2.1301
e) -2.130
f) 3.8637

12.- Relaciona correctamente las siguientes columnas:

- | | | |
|--|-------|--|
| a) El seno decrece de 1 a 0. | _____ | El ángulo crece de 90° a 180° . |
| b) El coseno crece de 0 a 1. | _____ | El ángulo crece de 0° a 90° . |
| c) La tangente crece de -1 a 0 . | _____ | El ángulo decrece de 360° a 270° . |
| d) El seno decrece de ∞ a 0 . | | |
| e) La cosecante crece de ∞ a -1 . | | |
| f) La cotangente crece de 0 a 1 . | | |
| g) El coseno decrece de 1 a 0 . | | |

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO II.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- | | |
|-------|--------|
| 1.- 2 | 8.- 2 |
| 2.- 3 | 9.- 3 |
| 3.- 1 | 10.- 0 |
| 4.- 0 | 11.- 2 |
| 5.- 4 | 12.- 1 |
| 6.- 4 | 13.- 4 |
| 7.- 1 | 14.- 3 |

AUTOEVALUACIÓN 2.

- | | |
|-------|--------|
| 1.- 1 | 6.- 3 |
| 2.- 4 | 7.- 3 |
| 3.- 0 | 8.- 0 |
| 4.- 2 | 9.- 2 |
| 5.- 1 | 10.- 4 |

AUTOEVALUACIÓN 3.

- | | |
|-------|--------|
| 1.- 1 | 6.- 0 |
| 2.- 3 | 7.- 2 |
| 3.- 0 | 8.- 4 |
| 4.- 2 | 9.- 1 |
| 5.- 4 | 10.- 3 |

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- 0	6.- 4
2.- 2	7.- 1
3.- 1	8.- 4
4.- 3	9.- 0
5.- 2	10.- 3

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.- 2	6.- 3
2.- 4	7.- 1
3.- 1	8.- 2
4.- 3	9.- 4
5.- 0	10.- 0

AUTOEVALUACIÓN 6.

1.- 0	6.- 1
2.- 4	7.- 3
3.- 1	8.- 0
4.- 3	9.- 4
5.- 2	10.- 1

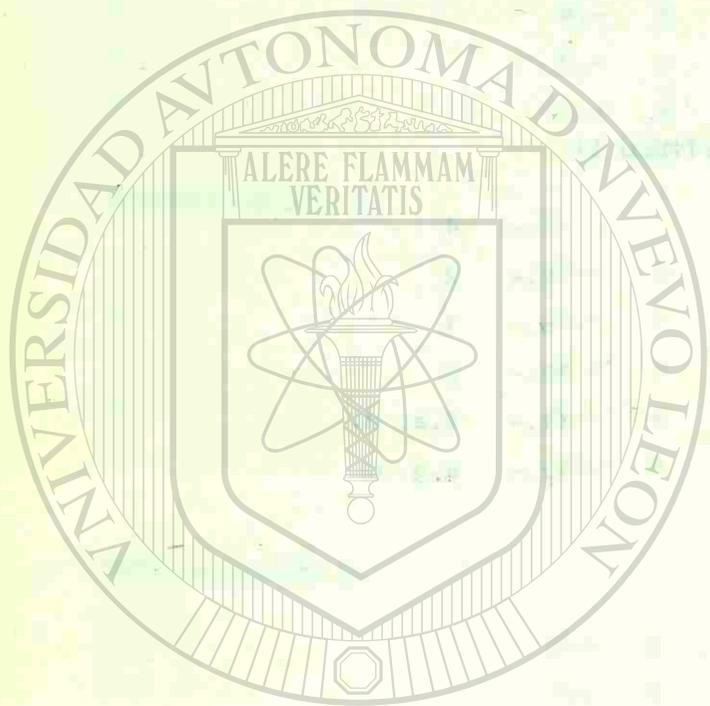
AUTOEVALUACIÓN 7.

1.- 1	9.- 0
2.- 1	10.- 1
3.- 1	11.- 3
4.- 1	12.- 1

5.- 0	13.- 2
6.- 0	14.- 4
7.- 0	15.- 5
8.- 0	

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO II.

1.- 2	7.- 4
2.- 1	8.- 2
3.- 4	9.- 1
4.- 3	10.- 2
5.- 3	11.- f, a, d.
6.- 1	12.- a, g, g.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

40. SEMESTRE.

AREA II.

UNIDAD III.

MEDIA CIRCULAR.

Hasta ahora, hemos usado como medida circular los grados y minutos para expresar un ángulo. La medida de los ángulos que hoy es común, tuvo su origen en Alejandría a principios de la era cristiana. Ahí, los matemáticos griegos dividieron la circunferencia en 360 partes iguales llamados "grados", y cada grado, a su vez en 60 partes iguales llamados "minutos".

En esta unidad veremos otra forma de medir los ángulos que son los radianes. Veremos cómo podemos transformar grados o medidas sexagesimales a radianes y viceversa y aplicaremos estas condiciones en el cálculo de velocidades angulares, longitud de arco o áreas circulares.

Te deseamos mucho éxito en el estudio de esta unidad, ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

- 1.- Definir con tus propias palabras los conceptos radián y velocidad angular.
- 2.- Transformar correctamente ángulos de medidas sexagesimal a radianes y viceversa.
- 3.- Calcular correctamente la longitud de un arco de circunferencia, mediante la fórmula:
$$\text{Arco} = r \cdot \theta$$
- 4.- Calcular correctamente la velocidad angular y lineal de cualquier sector circular, mediante las fórmulas.

$$v = r \cdot \omega$$

$$\omega = \theta/t$$

siendo:

ω = velocidad angular

v = velocidad lineal

r = radio

θ = número de radianes

t = tiempo

- 5.- Calcular correctamente el área de un sector circular, mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{r^2 \theta}{2}$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Para que resuelvas satisfactoriamente la unidad estudia el capítulo III de tu libro.
- 2.- Resuelve las autoevaluaciones que vienen en el capítulo conforme vayas avanzando en tu estudio.
- 3.- Como autoevaluación de la unidad, resuelve la autoevaluación del capítulo.

I D E N T I D A D E S.

Así como en el álgebra existen dos clases de ecuaciones que son las condicionales y las idénticas, en trigonometría también las hay, donde la incógnita es el valor del ángulo.

En esta unidad veremos cómo podemos, a través de ciertas relaciones dadas, demostrar la veracidad de identidades trigonométricas para un ángulo, así como también a expresar cualquier función en términos de otra función.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

- 1.- Discriminar, a partir de las relaciones fundamentales, aquellas que se puedan usar para expresar las funciones en términos de otras, dando a su vez una simple expresión de las mismas.
- 2.- Demostrar o comprobar, a partir de las identidades trigonométricas fundamentales, la veracidad de enunciados en forma de ecuación idéntica.

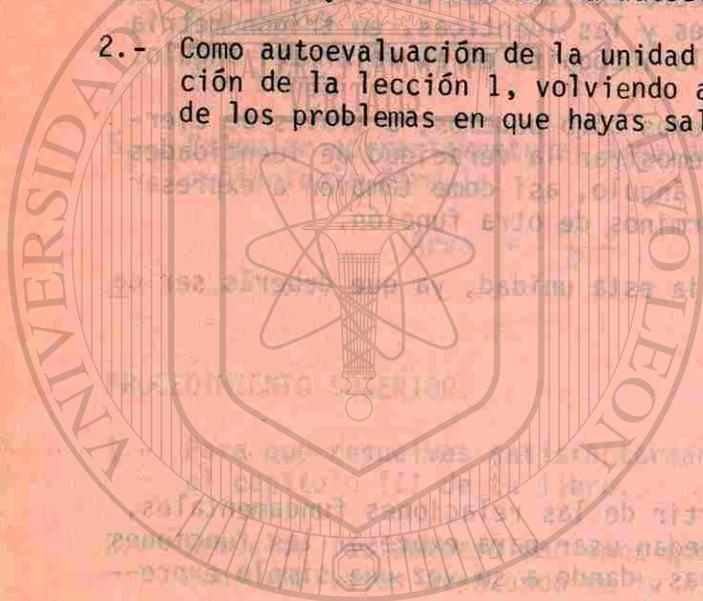
PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Estudia para esta unidad la lección 1 del capítulo IV. Como verás, tanto en el objetivo 1 como en el objetivo 2 intervienen las relaciones fundamentales, por lo que te recomendamos trates de demostrarlas como si fueran identidades sencillas.

Después, úsalas en el objetivo 1, resolviendo la autoevaluación 1. En caso de no poder, pregúntale al asesor la duda que tengas.

Para el objetivo 2, estudia primero los ejemplos que vienen para que visualices mejor lo que vas a hacer, cuando vayas a resolver la autoevaluación 2.

- 2.- Como autoevaluación de la unidad resuelve la autoevaluación de la lección 1, volviendo a estudiar el objetivo de los problemas en que hayas salido mal.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPITULO 3.

MEDIDA CIRCULAR.

3-1 INTRODUCCIÓN.

Así como la longitud de un segmento rectilíneo es la razón del segmento a alguna longitud patrón escogido como unidad, la magnitud de un ángulo es igual a la razón del ángulo dado a otro que se elige como unidad. Las unidades angulares más frecuentemente usadas son el grado y el radián que se discutirán en este capítulo.

Sin duda alguna, el ángulo recto es la más simple y la más antigua unidad de medida angular. Su uso va unido a nociones tan familiares como son el cambio en dirección de lo vertical a lo horizontal o del cambio de una línea norte-sur a otra oriente-poniente.

Aunque es demasiado grande para ser empleado como un instrumento científico ideal, todavía permanece en algunos teoremas geométricos tradicionales cuyo enunciado se remonta hasta la antigüedad.

Para la navegación con uso del compás, el ángulo recto se dividió en ocho "puntos". Un "punto" era una unidad muy adecuada para dirigir una embarcación. Los astrónomos, desde la época de Babilonia, tuvieron necesidad de una graduación más fina del círculo. Se debe a ellos el más conocido

de los sistemas científicos de medición angular, el sistema sexagesimal, en el cual la unidad de medida es el grado. El grado es un ángulo tal que si su vértice se coloca en el centro de un círculo intercepta un arco cuya longitud es igual a $1/360$ de la circunferencia. Este sistema de medición es empleado en la mayor parte de los trabajos prácticos, así como en topografía y en navegación.

El sistema circular de medida angular se emplea casi exclusivamente en cálculo diferencial e integral y en diversas ramas de la ciencia. La unidad del sistema circular es el radián y queda caracterizado por la siguiente definición e ilustrado en la figura 1.

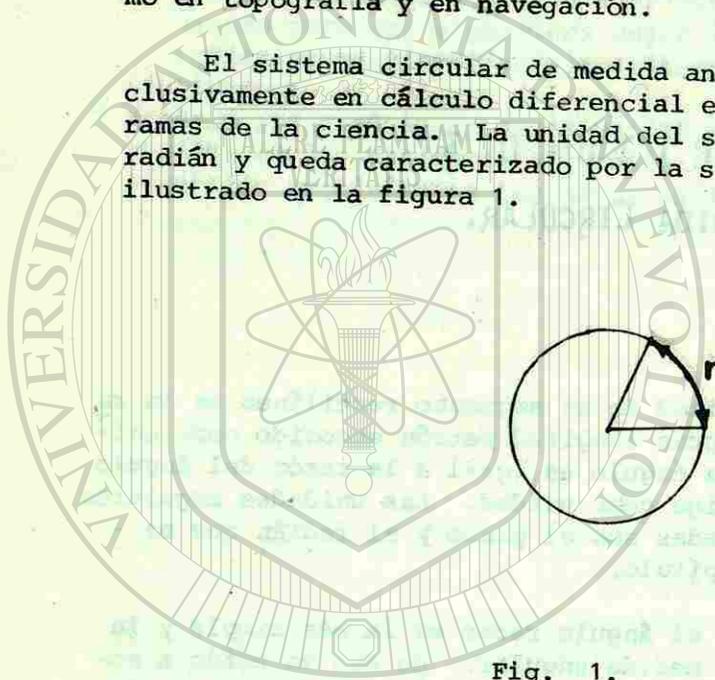


Fig. 1.

3-2 DEFINICIÓN DE RADIÁN.

Un radián es un ángulo tal que si su vértice se coloca en el centro de un círculo intercepta un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

Otras unidades de medida angular empleadas con más o menos frecuencia son la milésima y la revolución.

La milésima es el ángulo de medida empleado en la rama de artillería del ejército de los Estados Unidos, y es el ángulo subtendido por un arco cuya magnitud es $1/6400$ de la circunferencia.

En el sistema inglés de medida, esta unidad tiene la ventaja de que un ángulo central de una milésima intercepta un arco de aproximadamente, una yarda en un círculo de radio 1000 yardas.

La velocidad angular de una rueda en rotación se expresa por lo común en revoluciones por unidad de tiempo, generalmente en revoluciones por minuto (abreviado como r.p.m.). Obviamente, una revolución es igual a 2π radianes ó 360° .

3-3 RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANTES.

Puesto que la longitud de una circunferencia es 2 veces el radio, la circunferencia subtiende un ángulo central de 2 radianes. Por otro lado, la circunferencia subtiende un ángulo central de 360° , por tanto,

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ \quad (1)$$

Lo anterior, es la relación fundamental entre grados y radianes, y por medio de ella se puede pasar de grados a radianes y de radianes a grados.

Por ejemplo, dividiendo cada miembro de la ecuación(1) por 180, se tiene

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

análogamente,

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Los ángulos 30° , 45° y 60° , así como sus múltiplos, son de uso frecuente y se pueden convertir fácilmente en radianes expresándolos como una fracción de 180° y sustituyendo luego 180° por π radianes. De manera análoga se pueden convertir otros ángulos de grados a radianes.

EJEMPLOS.

$$1.- 30^\circ = \frac{180^\circ}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ radianes.}$$

$$2.- 45^\circ = \frac{180^\circ}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ radianes.}$$

$$3.- 120^\circ = \frac{2(180^\circ)}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ radianes.}$$

$$4.- 25^\circ = \frac{25(180^\circ)}{180} = \frac{5\pi}{36} \text{ radianes.}$$

Quando un ángulo está dado en grados, minutos y segundos los minutos y segundos se convierten a fracción decimal de grado y se procede luego como en los ejemplos anteriores.

EJEMPLO 5.

$$\begin{aligned} 25^\circ 36' 48'' &= 25^\circ 2208'' \\ &= 25 \frac{2208}{3600} \text{ grados (puesto que } 3600'' = 1^\circ) \\ &= 25.613^\circ = \frac{25.613}{180} \pi \text{ radianes} \\ &= (0.14229) (3.1416) \text{ radianes} \\ &= 0.44702 \text{ radianes} \end{aligned}$$

Los ángulos expresados en radianes se escriben frecuentemente como raciones de π , por ejemplo, $\pi/6$, $5\pi/3$ y $\pi/12$. Los ángulos así expresados se convierten en grados, sustituyendo π por 180° y simplificando el resultado.

EJEMPLOS.

$$6.- \pi/6 \text{ radianes} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$7.- 5\pi/3 \text{ radianes} = \frac{5(180^\circ)}{3} = 300^\circ$$

$$8.- \pi/12 \text{ radianes} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$$

En los temas que siguen se usarán indistintamente radianes y grados como unidades de medida angular. Cuando sea necesaria una aproximación aceptable a un segundo se hará uso de la equivalencia, $1 \text{ radián} = 57^\circ 17' 45''$, puesto que

$$\begin{aligned} 1 \text{ radián} &= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180}{3.1416} \\ &= 57.2957^\circ \\ &= 57^\circ 17' 45'' \quad (\text{aprox.}) \end{aligned}$$

Cuando un ángulo se expresa en radianes es costumbre omitir la palabra radián. Por ejemplo, se escribe $\pi/4$ y se lee "pi sobre 4 radianes".

AUTOEVALUACIÓN 1.

Convertir a radianes los ángulos de los problemas siguientes:

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| 1.- 60° | 9.- 24° |
| 2.- 18° | 10.- 585° |
| 3.- 240° | 11.- $22^\circ 30'$ |
| 4.- 210° | 12.- $18^\circ 45'$ |
| 5.- 72° | 13.- $7^\circ 52' 30''$ |
| 6.- 108° | 14.- $11^\circ 6' 40''$ |
| 7.- 75° | 15.- 3 ángulos rectos |
| 8.- 16° | 16.- 4 revoluciones |

Convertir a grados, minutos y segundos los ángulos de los problemas siguientes:

- | | |
|---------------|-----------------|
| 17.- $\pi/3$ | 24.- $\pi/16$ |
| 18.- $\pi/9$ | 25.- $\pi/32$ |
| 19.- $4\pi/5$ | 26.- $9\pi/160$ |
| 20.- $3\pi/4$ | 27.- 2.1 rad. |
| 21.- $4\pi/9$ | 28.- 5.7 rad. |
| 22.- $5\pi/6$ | 29.- 0.62 rad. |

23.- $\pi/8$

30.- 3.41 rad.

3-4 ÁNGULO CENTRAL Y LONGITUD DE UN ARCO.

Una de las ventajas del sistema circular de medida angular radica en la facilidad con que puede determinarse la longitud de un arco interceptado por un ángulo central medido en radianes. Por ejemplo, si en un círculo de radio r , un ángulo central de θ radianes intercepta un arco de "a" unidades de longitud, entonces, de acuerdo con la definición del radián,

$$\frac{a}{r} = \theta$$

de donde,

$$a = r \theta \quad (2)$$

Por tanto, para obtener la longitud de un arco, se multiplica el número de radianes del ángulo central por el radio del círculo.

EJEMPLO 1.

En un círculo de 12.6 cm de radio, calcular la longitud del arco interceptado por un ángulo central de 36° .

SOLUCIÓN:

Se expresa primero el ángulo central en radianes. Puesto que,

$$1^\circ = \pi/180$$

entonces, $36^\circ = 36(\pi/180)$ radianes

$$= \pi/5 \text{ rad.}$$

Luego, según la ecuación (2),

$$a = 12.6 (\pi/5)$$

$$= 7.92 \text{ cm (aprox.)}$$

3-5 VELOCIDAD ANGULAR Y VELOCIDAD LINEAL.

Si un rayo gira alrededor de su origen, su velocidad angular es el ángulo que describe en la unidad de tiempo. Por otra parte, la velocidad angular de un cuerpo en rotación, por ejemplo una rueda, la hélice de un avión o el rotor de una turbina, es la velocidad angular de un rayo situado en el cuerpo y perpendicular al eje de rotación. Por lo general, la velocidad angular se expresa en radianes, grados, o revoluciones por unidad de tiempo.

La velocidad lineal de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta es el número de unidades lineales, metros, kilómetros, etc., recorridos por un punto del cuerpo en la unidad de tiempo. La velocidad lineal de un cuerpo en rotación, como por ejemplo, la de una piedra amarrada a una cuerda que se hace girar, es la velocidad que tomaría el cuerpo si cesaran bruscamente las causas que le hacen desplazarse a lo largo de una circunferencia. Si la persona que hace girar la piedra está situada en la superficie de la Tierra y camina en cualquier dirección, la piedra está sujeta a dos velocidades, la velocidad de la persona y la velocidad debida al movimiento de rotación. La primera está referida a la Tierra y la segunda al centro de rotación. La velocidad de un punto situado en un cuerpo que gira con respecto al centro de rotación depende de su distancia a dicho centro. A continuación se explica cómo determinar tal velocidad.

Si ω la letra empleada para representar la velocidad angular de un cuerpo en rotación y v la velocidad lineal de un punto del cuerpo situado a una distancia r del eje de rotación. Puesto que el punto en cuestión se mueve a lo largo de una trayectoria circular, entonces el arco recorrido por el punto, en la unidad de tiempo, es el arco interceptado en el círculo de radio r por un ángulo central de ω radianes. Luego, de acuerdo con la ecuación (2),

$$v = \omega r \quad (3)$$

Si la velocidad angular se expresa en otras unidades angulares diferentes de radianes, tales unidades se deben convertir a radianes antes de aplicar la fórmula (3).

Cuando un cuerpo en rotación se traslada sobre una superficie plana, sin resbalar, se tiene de nuevo el caso en el cual cada punto del cuerpo se encuentra sujeto a dos velocidades. Una es la velocidad de traslación del cuerpo en el plano y la otra es la velocidad lineal de un punto particular del cuerpo con respecto al eje de rotación, y que se debe a la rotación misma. La velocidad de traslación del cuerpo en el plano se conoce como velocidad lineal del cuerpo con respecto al plano, y es igual a la velocidad lineal de un punto de la circunferencia del cuerpo con respecto al eje de rotación.

EJEMPLO 1.

Los neumáticos de un automóvil giran a razón de 374 rpm y su diámetro es de 90 cm. Calcular la velocidad del automóvil con respecto a la Tierra, en Km por hora.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} 374 \text{ rpm} &= 374(2\pi) \\ &= 748\pi \text{ radianes por minuto} \end{aligned}$$

Luego, de acuerdo con la ecuación (3),

$$v = (748\pi)45 \text{ cm por minuto.}$$

Para reducir esta cantidad a Km por hora, se multiplica por 60 (número de minutos en una hora) y se divide entre 100000 (número de centímetros en un kilómetro).

$$\frac{(748\pi) 45 \times 60}{100,000} = 63.448 \text{ Km. por hora (aprox.)}$$

EJEMPLO 2.

Dos ruedas de 30 cm y 120 cm de diámetro, respectivamente, se conectan mediante una banda. La rueda mayor gira a razón de 60 rpm. Determinar la velocidad lineal de la --

banda y la velocidad angular de la rueda menor, en radianes por minuto.

SOLUCIÓN:

Puesto que la velocidad lineal de la banda es igual a la velocidad lineal de la rueda más grande, se puede obtener haciendo uso de la fórmula (3). El radio de la rueda es de 60 cm y su velocidad angular, ω , de $60 \times 2\pi$. En consecuencia $v = 60 \times 60 \times 2\pi = 7200\pi = 22619.45$ cm. por minuto.

Puesto que la velocidad lineal de un punto de la circunferencia de la rueda más pequeña es igual a la velocidad de la banda, y dado que el radio de aquella es 15 cm, de acuerdo con la fórmula (3), se obtiene:

$$\begin{aligned} 22619.45 &= \omega(15) \\ \omega &= \frac{22619.45}{15} \\ &= 1508 \text{ radianes por minuto.} \\ &\quad (\text{aprox.}) \end{aligned}$$

NOTA:

Este resultado se puede verificar como sigue: el radio de la rueda más pequeña es $1/4$ del de la rueda más grande. En consecuencia, su velocidad angular es 4 veces mayor. Esto es, $\omega = 4(120\pi) = 480\pi = 1508$.

AUTOEVALUACION 2.

Calcular la longitud del arco interceptado para los valores del radio y del ángulo central dados en los siguientes problemas:

- | | |
|--------------------|------------------------|
| 1.- 4 rad, 150 cm. | 5.- 76° , 42 m |
| 2.- 1.7 rad, 60 cm | 6.- 225° , 58 m |

3.- 30° , 120 cm

7.- $6^\circ 15'$, 100 cm

4.- 72° , 1.80 m

8.- $33^\circ 45'$, 22.20 cm

Hallar, en radianes y en grados, el ángulo central que corresponde a los valores del arco interceptado y del radio dados en los siguientes problemas. La longitud de arco se da primero. Supóngase que los datos de cada problema son exactos y obténgase el valor del ángulo en radianes con cuatro cifras, y en grados con aproximación de una centésima.

9.- 80 cm, 27.5 cm

10.- 28 m, 13 m

11.- 5 m, 12 m

12.- 3.92 pies, 7.61 pies.

13.- Calcular en radianes, el ángulo que forman las manecillas de un reloj que marca las 5.

14.- ¿Cuántos radianes recorre el minutero de un reloj en 35 minutos?

15.- La manecilla horaria de un reloj es de 4 cm de longitud. ¿Cuál es la distancia recorrida por su punto en 3 horas 30 minutos?

16.- Una curva de una carretera corresponde a un arco de un círculo de radio 450 m, subtendido por un ángulo central de 28° . ¿Cuánto tiempo empleará un automóvil en recorrer la curva si su velocidad es de 72 Km/h?

17.- Las ruedas traseras de un vagón tienen un diámetro de 108 cm. ¿Cuánto avanza el vagón si uno de los rayos de una rueda gira 36° ?

- 18.- ¿Cuántas vueltas completas debe dar una de las ruedas del problema anterior para que el vagón recorra un kilómetro?
- 19.- Un trompo gira a razón de 200 rpm. Si su diámetro máximo es de 10 cm, determinar, en Km por hora, la velocidad lineal de un punto situado en su parte más ancha.
- 20.- Un automóvil marcha a una velocidad de 90 Km por hora. Si el diámetro de los neumáticos es de 70 cm, calcular la velocidad angular, en radianes por segundo.
- 21.- En un taller, una polea de 1.20 m de diámetro está conectada a otra de 30 cm de diámetro mediante una banda. Si la polea mayor gira a razón de 60 rpm, calcular la velocidad de rotación de la más pequeña y la velocidad lineal de la banda.
- 22.- Los centros de dos engranes quedan a 50 cm uno de otro. cuando el menor de ellos se mueve 6 radianes el otro se mueve 4, calcular el radio de cada engrane.
- 23.- El radio de un círculo es de 25 cm. Desde los extremos de un arco de 55 cm de longitud trazar dos tangentes al círculo. Si se prolongan las tangentes hasta que se corten, determinar el ángulo agudo que se forma, con aproximación a 1 grado.
- 24.- En un rectángulo, la longitud de cada uno de sus lados menores es de 27 cm. Si el rectángulo está inscrito en un círculo de 100 cm. de diámetro, determinar la longitud del arco interceptado por cualquiera de los lados menores.
- 25.- Una grúa de 15 m de longitud se eleva hasta formar un ángulo de 60° con la horizontal, y luego se hace girar horizontalmente 72°. ¿Cuál es la distancia recorrida por el extremo superior de la grúa en estas dos operaciones?

5-6 ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR.

En geometría plana sabemos que el área de un sector circular = $1/2 \cdot r \cdot \text{arco}$.

Ahora, sustituyendo el arco por la fórmula que se utiliza para encontrar su longitud, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{área del sector circular} &= 1/2 r \cdot r \cdot \theta \\ &= \frac{r^2 \cdot \theta}{2} \end{aligned}$$

EJEMPLO.

Hallar el área de un sector circular cuyo ángulo central es de 3 radianes y la circunferencia tiene 5 cm de radio.

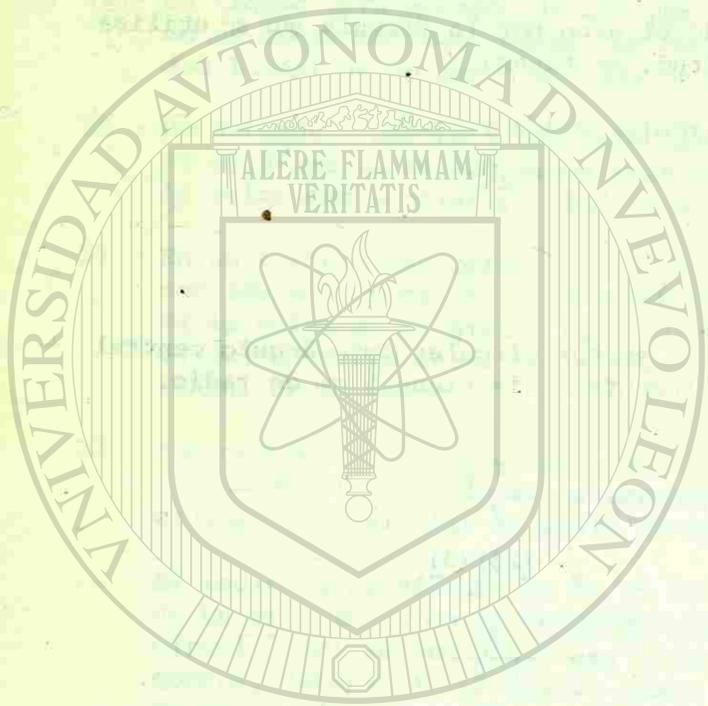
SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{área del sector circular} &= \frac{r^2 \cdot \theta}{2} \\ &= \frac{(25)(3)}{2} \\ &= \frac{75}{2} \\ &= 37.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

- 1.- El radio de una circunferencia es de 5 m y el ángulo de un sector circular es 72°. Determinar el área del sector.
- 2.- Determinar el área de un sector circular en una circunferencia de 16 cm de radio, sabiendo que el ángulo del sector circular es de 2.5 radianes.

- 3.- Determinar el área de un sector circular sabiendo que su ángulo es de 240° y el radio de la circunferencia es de 1 m.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

Subraya la respuesta correcta.

Expresa el siguiente ángulo en radianes con una aproximación de tres cifras decimales:

- 1.- 144°
- 1) 0.251 2) 2.513 3) 5.213
4) 3.1426
- 2.- 0.7854 radianes (sugerencia: usa $\pi/4$).
- 1) 45° 2) 40° 3) 50°
4) $50^\circ 30'$

- 3.- En una circunferencia, ¿cuántas veces está contenida la longitud del radio?

- 1) 2 2) 2π 3) π
4) 4π

Resuelve correctamente los siguientes problemas:

- 4.- Calcular el ángulo central en radianes, si el arco subtendido vale 16 y el radio vale 8.

- 1) 1 2) 3 3) 2
4) 0

- 5.- ¿Cuántos radianes describe la manecilla que señala los minutos de un reloj en 45 minutos?

- 1) 4.7124 2) 3.1416 3) 4.512
4) 5.1417

6.- Si se multiplica la velocidad angular de una rotación por el número de unidades de tiempo empleado en generar dicha rotación, se obtiene:

- 1) cm/seg. 2) rad 3) m/seg.
4) seg/m.

7.- La velocidad angular de una rueda es de 7 radianes por segundo. Si su diámetro es de 15 cm, determinar la velocidad lineal de un punto sobre su periferia en cm por minuto.

- 1) 3150 2) 525 3) 1850
4) 720

8.- Determinar el área de un sector circular, sabiendo que su ángulo es 220° , y el radio de la circunferencia es de 1.8 metros.

- 1) 2π 2) 1.98π 3) 3π
4) 2.14π

9.- Relaciona correctamente los siguientes números, indicando la secuencia correcta:

- a) 2.094 rad. 120°
b) $\pi/2$ rad. circunferencia entre el radio.
c) $\pi/3$ rad.
d) 0.01745 rad. media circunferencia.
e) π rad.
f) $\pi/6$ rad.
g) 2π rad.

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO III.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| 1.- $\pi/3$ | 9.- $2\pi/15$ |
| 2.- $\pi/10$ | 10.- $13\pi/4$ |
| 3.- $4\pi/3$ | 11.- $\pi/8$ |
| 4.- $7\pi/6$ | 12.- $5\pi/48$ |
| 5.- $2\pi/5$ | 13.- $7\pi/160$ |
| 6.- $3\pi/5$ | 14.- $5\pi/81$ |
| 7.- $5\pi/12$ | 15.- $3\pi/2$ |
| 8.- $4\pi/45$ | 16.- 8π |
| 17.- 60° | 24.- $11^\circ 15'$ |
| 18.- 20° | 25.- $5^\circ 37' 30''$ |
| 19.- 144° | 26.- $10^\circ 7' 30''$ |
| 20.- 135° | 27.- $120^\circ 19' 16''$ |
| 21.- 80° | 28.- $326^\circ 35' 9''$ |
| 22.- 150° | 29.- $35^\circ 31' 24''$ |
| 23.- $22^\circ 30'$ | 30.- $195^\circ 22' 43''$ |

AUTOEVALUACIÓN 2.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1.- 600 cm | 5.- $266\pi/15$ m |
| 2.- 102 cm | 6.- 72.5π m |
| 3.- 20π cm | 7.- 10.908 cm |
| 4.- $72\pi/100$ m | 8.- 13.077 cm |

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 9.- 2.9091 rad. 166.68° | 17.- 33.93 cm |
| 10.- 2.1538 rad. 123.41° | 18.- 294.73 |
| 11.- 0.4167 rad. 23.87° | 19.- 3.77 |
| 12.- 0.5151 rad. 29.51° | 20.- 71.429 |
| 13.- $5 \pi/6$ | 21.- 240 rpm, 3.77 m por seg |
| 14.- $7 \pi/6$ | 22.- 30 cm, 20 cm |
| 15.- $7 \pi/3$ cm | 23.- 54° |
| 16.- 11 seg | 24.- 27.339 cm |
| | 25.- 34.558 m. |

AUTOEVALUACIÓN 3.

- 1.- 15.708 m²
- 2.- 320 cm²
- 3.- 2.094 m²

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

- | | |
|-------|-------------|
| 1.- 2 | 6.- 2 |
| 2.- 1 | 7.- 1 |
| 3.- 2 | 8.- 2 |
| 4.- 3 | 9.- a, g, e |
| 5.- 1 | |

CAPITULO 4.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDÉNTICAS.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Las funciones trigonométricas que ya conocemos se correlacionan en distintas formas de gran utilidad. En este capítulo nos familiarizamos con muchas de estas relaciones que son herramienta poderosa para atacar problemas de matemáticas avanzadas y que también sirven para aclarar conceptos básicos en los campos de la física clásica y moderna.

4-2 ECUACIONES.

La palabra "ecuación", como comúnmente se emplea, se refiere a una "ecuación condicional" tal como: $2x + 3 = 7$, en la cual los dos miembros son iguales para ciertos valores de la variable x , pero desiguales para otros; en este caso, son iguales solamente si $x = 2$. Sin embargo, también consideraremos "ecuaciones idénticas" las cuales son siempre ciertas; es decir son ciertas para todos los valores permitibles de la variable.

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| 9.- 2.9091 rad. 166.68° | 17.- 33.93 cm |
| 10.- 2.1538 rad. 123.41° | 18.- 294.73 |
| 11.- 0.4167 rad. 23.87° | 19.- 3.77 |
| 12.- 0.5151 rad. 29.51° | 20.- 71.429 |
| 13.- $5 \pi/6$ | 21.- 240 rpm, 3.77 m por seg |
| 14.- $7 \pi/6$ | 22.- 30 cm, 20 cm |
| 15.- $7 \pi/3$ cm | 23.- 54° |
| 16.- 11 seg | 24.- 27.339 cm |
| | 25.- 34.558 m. |

AUTOEVALUACIÓN 3.

- 1.- 15.708 m²
- 2.- 320 cm²
- 3.- 2.094 m²

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

- | | |
|-------|-------------|
| 1.- 2 | 6.- 2 |
| 2.- 1 | 7.- 1 |
| 3.- 2 | 8.- 2 |
| 4.- 3 | 9.- a, g, e |
| 5.- 1 | |

CAPITULO 4.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDÉNTICAS.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Las funciones trigonométricas que ya conocemos se correlacionan en distintas formas de gran utilidad. En este capítulo nos familiarizamos con muchas de estas relaciones que son herramienta poderosa para atacar problemas de matemáticas avanzadas y que también sirven para aclarar conceptos básicos en los campos de la física clásica y moderna.

4-2 ECUACIONES.

La palabra "ecuación", como comúnmente se emplea, se refiere a una "ecuación condicional" tal como: $2x + 3 = 7$, en la cual los dos miembros son iguales para ciertos valores de la variable x , pero desiguales para otros; en este caso, son iguales solamente si $x = 2$. Sin embargo, también consideraremos "ecuaciones idénticas" las cuales son siempre ciertas; es decir son ciertas para todos los valores permitibles de la variable.

Del álgebra, podemos recordar un ejemplo familiar de identidad, tal como: $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$; esta ecuación es cierta para cualquier valor de x ; entonces también será cierta, cuando x se sustituye por "sen θ "; esto es:

$$(\text{sen } \theta + 1)(\text{sen } \theta - 1) = \text{sen}^2 \theta - 1$$

donde " $\text{sen}^2 \theta$ " significa " $(\text{sen } \theta)^2$ " y se lee "seno cuadrado de θ ".

Una ecuación que contiene al menos una variable que involucra ángulos en posición ordinaria, se llama "ecuación trigonométrica". Una ecuación trigonométrica, tal como $(\text{sen } \theta + 1)(\text{sen } \theta - 1) = \text{sen}^2 \theta - 1$, que es cierta para todos los valores de las variables, para los cuales, ambos miembros están definidos, se llama "ecuación trigonométrica idéntica".

Antes de proceder con ecuaciones trigonométricas idénticas, debemos de aprender algunas relaciones que dependen de las funciones trigonométricas y del álgebra de los números reales, llamadas "identidades trigonométricas fundamentales".

4-3 IDENTIDADES TRIGONÓMETRICAS FUNDAMENTALES.

a) Relaciones en forma de cociente.

En la figura 4-1, θ representa un ángulo cualquiera positivo o negativo, habiéndose colocado en el primer cuadrante casualmente. Supongamos que " a ", " o " y " r " representan la abscisa, la ordenada y el radio vector, respectivamente. Entonces,

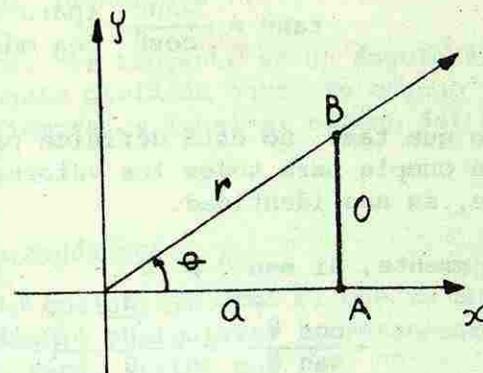


Fig. 4-1.

$$\text{sen } \theta = \frac{o}{r}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{a}{r}$$

Ahora, si $\text{cos } \theta \neq 0$,

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\frac{o}{r}}{\frac{a}{r}}$$

$$= \frac{o}{r} \div \frac{a}{r}$$

$$= \frac{o}{r} \times \frac{r}{a}$$

$$= \frac{o}{a}$$

pero, $\tan \theta = o/a$

Por lo tanto,

$$\tan \theta = \frac{\text{sen} \theta}{\text{cos} \theta} \quad (\text{para cualquier } \theta \text{ que no sea múltiplo impar de } 90^\circ)$$

Puesto que $\tan \theta$ no está definida para 90° y 270° , la igualdad se cumple para todos los valores permisibles, consistentemente, es una identidad.

Análogamente, si $\text{sen} \theta \neq 0$,

$$\frac{\text{cos} \theta}{\text{sen} \theta} = \frac{\frac{a}{r}}{\frac{0}{r}}$$

$$= \frac{a}{r} \div \frac{0}{r}$$

$$= \frac{a}{r} \times \frac{r}{0}$$

$$= \frac{a}{0}$$

pero, $\cot \theta = \frac{a}{0}$

Por lo tanto,

$$\cot \theta = \frac{\text{cos} \theta}{\text{sen} \theta} \quad (\text{para cualquier } \theta \text{ diferente de } 0^\circ \text{ o múltiplo de } 180^\circ)$$

Nuevamente, esta relación se considera como una identidad debido a que es cierta para todos los valores permisibles, ya que cotangente de 0° , 180° , 360° , etc.; no están definidas. Por lo tanto, para todo valor permisible de θ , aceptamos que

$$\tan \theta \equiv \frac{\text{sen} \theta}{\text{cos} \theta}$$

$$\cot \theta \equiv \frac{\text{cos} \theta}{\text{sen} \theta}$$

(el símbolo \equiv se lee "idéntico a").

Por consiguiente, "la tangente de un ángulo siempre es igual al seno del ángulo dividido entre su coseno y la cotangente de un ángulo siempre es igual al coseno del ángulo dividido entre su seno."

b) Relaciones pitagóricas.

Sea θ es un ángulo cualquiera, como el que se muestra en la figura 4-1, u otro ángulo cualquiera; representamos la abscisa, la ordenada y el radio vector por "a", "0" y "r" respectivamente.

Entonces, por el teorema de Pitágoras,

$$0^2 + a^2 = r^2$$

dividiendo entre r^2

$$\frac{0^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} = 1$$

y puesto que

$$\frac{0}{r} = \text{sen} \theta$$

entonces,

$$\frac{0^2}{r^2} = \text{sen}^2 \theta$$

análogamente,

$$\frac{a}{r} = \text{cos} \theta$$

entonces,

$$\frac{a^2}{r^2} = \text{cos}^2 \theta$$

por lo tanto, $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta \equiv 1$.

Por consiguiente, "la suma de los cuadrados del seno y del coseno del mismo ángulo siempre es igual a uno."

Nuevamente, a partir de

$$o^2 + a^2 = r^2$$

y dividiendo entre a^2 ,

$$\frac{o^2}{a^2} + 1 = \frac{r^2}{a^2}$$

pero,

$$\frac{o}{a} = \tan \theta$$

así que,

$$\frac{o^2}{a^2} = \tan^2 \theta$$

y

$$\frac{r}{a} = \sec \theta$$

así que

$$\frac{r^2}{a^2} = \sec^2 \theta$$

por lo tanto,

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

(para todo θ cuya tangente y secante estén definidas).

Por consiguiente, "el cuadrado de la secante de un ángulo siempre es igual a uno más el cuadrado de la tangente de dicho ángulo".

Una vez más:
$$o^2 + a^2 = r^2$$

dividiendo entre o^2 ,

$$1 + \frac{a^2}{o^2} = \frac{r^2}{o^2}$$

pero,

$$\frac{a}{o} = \cot \theta$$

así que,

$$\frac{a^2}{o^2} = \cot^2 \theta$$

y

$$\frac{r}{o} = \csc \theta$$

así que,

$$\frac{r^2}{o^2} = \csc^2 \theta$$

por lo tanto, $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

(para todo θ cuya cotangente y cosecante estén definidas).

Por consiguiente, "el cuadrado de la cosecante de un ángulo siempre es igual a uno más el cuadrado de la cotangente de dicho ángulo."

Del estudio del teorema de Pitágoras en álgebra y geometría, debe recordarse que, frecuentemente, el trabajo se simplifica cuando se usa $a^2 = r^2 - o^2$ o bien $a = \pm \sqrt{r^2 - o^2}$ en lugar de la forma $a^2 + o^2 = r^2$. Del mismo modo resultan útiles algunas de las siguientes formas que tienen las relaciones pitagóricas u otras similares a ellas.

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\sec \theta = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$$

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1$$

$$\cot \theta = \pm \sqrt{\csc^2 \theta - 1}$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\sec \theta = \pm \sqrt{\tan^2 \theta + 1}$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\csc \theta = \pm \sqrt{\cot^2 \theta + 1}$$

c) Relaciones recíprocas.

Anteriormente ya se había hablado de las razones recíprocas. Con frecuencia se hace referencia a ellas como relaciones recíprocas y se emplean casi del mismo modo que las relaciones en forma de cociente o las pitagóricas cuando se trabaja con ecuaciones. Así pues,

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \sin \theta \csc \theta = 1$$

$$\cos\theta \equiv \frac{1}{\sec\theta}, \quad \sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta}, \quad \sec\theta \cos\theta \equiv 1$$

$$\tan\theta \equiv \frac{1}{\cot\theta}, \quad \cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta}, \quad \tan\theta \cot\theta \equiv 1$$

Todas las identidades trigonométricas fundamentales junto con las propiedades de los números reales, nos permiten escribir cualquier expresión que contenga valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ , en términos del valor de $\sin\theta$ o de cualquier otra función trigonométrica de θ .

4-4 EMPLEO DE LAS RELACIONES FUNDAMENTALES.

En el estudio de las identidades trigonométricas y de las ecuaciones condicionales, se presentarán, muchas situaciones en las que habrá necesidad de efectuar sustituciones y simplificaciones en que intervengan las relaciones en forma de cociente, las recíprocas y las pitagóricas.

EJEMPLO 1.

Expresar $\tan\theta \cdot \cos\theta$ en términos de una sola función trigonométrica.

SOLUCIÓN:

Usando la relación $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, sustituyendo y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \tan\theta \cdot \cos\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta \\ &= \sin\theta \end{aligned}$$

por lo tanto, $\tan\theta \cdot \cos\theta \equiv \sin\theta$ (es la respuesta).

EJEMPLO 2.

Expresar $\frac{1}{\sec^2\theta} + \sin^2\theta + \tan^2\theta$ en términos de una sola función trigonométrica.

SOLUCIÓN:

Usando la relación $\frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$, entonces $\frac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$, sustituyendo esto, tenemos:

$$\frac{1}{\sec^2\theta} + \sin^2\theta + \tan^2\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta + \tan^2\theta$$

ahora, usando $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, tenemos:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

y si, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

obtenemos, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sec^2\theta} + \sin^2\theta + \tan^2\theta \equiv \sec^2\theta \text{ (es la respuesta).}$$

EJEMPLO 3.

Encontrar en términos de $\cos\theta$, una expresión equivalente a $(\sec\theta - \tan\theta)(1 + \sin\theta)$.

SOLUCIÓN:

Usando las relaciones $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ y $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ y sustituyendo obtenemos,

$$(\sec\theta - \tan\theta)(1 + \sin\theta) = \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 + \sin\theta)$$

sumando las fracciones que están incluidas en el primer factor,

$$\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 + \sin\theta) = \left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 + \sin\theta)$$

multiplicando los dos factores, nos queda:

$$\left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 + \sin\theta) = \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$$

ahora, usando $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, donde $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, sustituyendo y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} &= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(\sec\theta - \tan\theta)(1 + \sin\theta) \equiv \cos\theta \quad (\text{es la respuesta}).$$

EJEMPLO 4.

Expresar $\tan\theta + \cot\theta$ en términos de $\sin\theta$ y $\cos\theta$.

SOLUCIÓN:

Usando las relaciones $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ y $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, y sustituyendo, queda:

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

sumando las dos fracciones resultantes, obtenemos:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cos\theta}$$

ahora, usando $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y sustituyendo,

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta \cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta \cos\theta}$$

por lo tanto,

$$\tan\theta + \cot\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta \cos\theta} \quad (\text{es la respuesta})$$

AUTOEVALUACION 1.

Expresar, en términos de una sola función trigonométrica o dar una simple expresión en lugar de cada una de las siguientes:

1.- $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

- 0) $\cot\theta$
3) $\csc\theta$

1) $\sec\theta$

2) $\tan\theta$

2.- $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

- 0) 0
3) $\cot^2\theta$

1) 1

2) $\tan^2\theta$

3.- $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

- 0) $\cot\theta$
3) $\cot^2\theta$

1) $\tan\theta$

2) $\tan\theta$

4.- $\frac{1}{\cos\theta}$

- 0) $\cos\theta$
3) $\csc\theta$

1) $\sin\theta$

2) $\sec\theta$

5.- $\frac{1}{\csc^2 \theta}$

- 0) $\sin^2 \theta$ 1) $\sin \theta$ 2) $\sec^2 \theta$
 3) $\cos^2 \theta$

6.- $1 - \cos^2 \theta$

- 0) $\cos^2 \theta$ 1) $\sin^2 \theta$ 2) $-\cos^2 \theta$
 3) $\sec^2 \theta$

7.- $1 + \tan^2 \theta$

- 0) $\cot^2 \theta$ 1) $\tan^2 \theta$ 2) $\sin^2 \theta$
 3) $\sec^2 \theta$

8.- $1 - \sin^2 \theta$

- 0) $-\sin^2 \theta$ 1) $-\tan^2 \theta$ 2) $\cos^2 \theta$
 3) $\tan^2 \theta$

9.- $1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

- 0) $\cot^2 \theta$ 1) $\tan^2 \theta$ 2) $\sec^2 \theta$
 3) $\csc^2 \theta$

10.- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cot^2 \theta$

- 0) $\csc^2 \theta$ 1) $\cot^2 \theta$ 2) $\sec^2 \theta$
 3) $\tan^2 \theta$

11.- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \tan^2 \theta$

- 0) $\csc^2 \theta$ 1) $\sin^2 \theta$ 2) $\tan^2 \theta$
 3) $\sec^2 \theta$

12.- $1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

- 0) 1 1) 0 2) 2
 3) $-\tan^2 \theta$

13.- $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta + \tan^2 \theta$

- 0) $\cot^2 \theta$ 1) $\sec^2 \theta$ 2) $\cos^2 \theta$
 3) $\sin^2 \theta$

14.- $\cot \theta \cdot \sin \theta$

- 0) $\tan \theta$ 1) $\sec \theta$ 2) $\csc \theta$
 3) $\cos \theta$

15.- $\csc \theta \cdot \cos \theta$

- 0) $\cot \theta$ 1) $\sin \theta$ 2) $\tan \theta$
 3) $\sec \theta$

16.- $\tan \theta \cdot \sec \theta \cdot \cos \theta$

- 0) $\cot \theta$ 1) $\csc \theta$ 2) $\tan \theta$
 3) $\sin \theta$

17.- $\csc \theta \cdot \sin \theta \cdot \sec \theta$

- 0) $\sec \theta$ 1) $\tan \theta$ 2) $\cos \theta$ 3) $\cot \theta$

18.- $(\sec^2 \theta - 1) \cdot \csc^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$

- 0) $\cot \theta$ 1) $\csc \theta$ 2) $\tan \theta$
 3) $\sin \theta$

19.- $\tan \theta \cdot \cot \theta - \cos^2 \theta$

- 0) $-\cos^2 \theta$ 1) $\sin^2 \theta$ 2) $-\sin^2 \theta$
 3) $\tan^2 \theta$

20.- $\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta}$

- 0) $\cot \theta$ 1) $\tan \theta$ 2) $\cos \theta$
 3) $\sin \theta$

$$21.- \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)}{\tan \theta}$$

- 0) $\cot \theta$ 1) $\tan^2 \theta$ 2) $\sec^2 \theta$
 3) $\csc \theta$

$$22.- \frac{\sin \theta (\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)}{\cos \theta \sec \theta}$$

- 0) $\cos \theta$ 1) $\tan \theta$ 2) $\sin \theta$
 3) $\cot \theta$

$$23.- \frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sqrt{\csc^2 \theta - 1}}$$

- 0) $\tan \theta$ 1) $\sin^2 \theta$ 2) $\cos^2 \theta$
 3) $\tan^2 \theta$

$$24.- \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

- 0) $\cos \theta$ 1) $\cos^2 \theta$ 2) $\cot^2 \theta$
 3) $\tan^2 \theta$

$$25.- \sin \theta \csc \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta \cot \theta}$$

- 0) $\sec^2 \theta$ 1) $\cos^2 \theta$ 2) $\tan^2 \theta$
 3) $\csc \theta$

Escribir cada una de las siguientes expresiones en términos de $\sin \theta$.

$$26.- \csc \theta$$

- 0) $\sin \theta - 1$ 1) $-\sin \theta$ 2) $1 - \sin^2 \theta$
 3) $1/\sin \theta$

$$27.- \sec^2 \theta$$

- 0) $1 - \sin^2 \theta$ 1) $\frac{1}{1 - \sin^2 \theta}$ 2) $\frac{1}{\sin^2 \theta}$
 3) $-\sin^2 \theta$

$$28.- \sec \theta \tan \theta$$

- 0) $\frac{\sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$ 1) $\frac{1}{1 - \sin^2 \theta}$ 2) $\frac{1}{\sin \theta}$
 3) $-\frac{1}{\sin \theta}$

$$29.- \cot^2 \theta$$

- 0) $\sin \theta$ 1) $-\sin \theta$ 2) $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}$
 3) $\sin^2 \theta - 1$

$$30.- \cos \theta \tan \theta$$

- 1) $1 - \sin \theta$ 1) $\sin \theta$ 2) $1 - \sin^2 \theta$
 3) $-\sin \theta$

$$31.- \tan^2 \theta (\csc^2 \theta - 1) + \tan \theta \cos \theta$$

- 0) $\sin \theta$ 1) $\sin^2 \theta$ 2) $1 - \sin^2 \theta$
 3) $1 + \sin \theta$

Expresar las siguientes funciones de θ en términos de $\sin \theta$ y $\cos \theta$, después de expresar el resultado como una fracción simple reducida a su mínima expresión.

$$32.- \cot \theta \sec \theta$$

- 0) $\frac{1}{\cos \theta}$ 1) $\frac{1}{\sin \theta}$ 2) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 3) $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

33.- $\frac{\text{sen } \theta}{\text{cot } \theta}$

0) $\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$

1) $\frac{\text{sen}^2 \theta}{\text{cos } \theta}$

2) $\frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$

3) $\frac{\text{cos}^2 \theta}{\text{sen } \theta}$

34.- $\tan \theta - \sec \theta$

0) $\cos \theta$

1) $\frac{\text{sen } \theta - 1}{\text{cos } \theta}$

2) $\frac{1 - \text{sen}^2 \theta}{\text{cos } \theta}$

3) $\text{sen } \theta + 1$

35.- $\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

0) $\text{sen}^2 \theta$

1) $\text{sen } \theta$

2) $\frac{\text{sen}^2 \theta}{\text{cos}^2 \theta}$

3) $\frac{\text{cos}^2 \theta}{\text{sen}^2 \theta}$

4-5 DEMOSTRACION DE IDENTIDADES.

La mayor parte del trabajo con identidades consistirá en tratar de demostrar la veracidad de los enunciados dados en forma de ecuación, pero que requieren su comprobación. Un procedimiento sumamente efectivo, en la mayoría de los casos, consiste en trabajar con cualquiera de los miembros de la ecuación, cambiando su forma, mediante simplificaciones o sustituciones, hasta llegar a demostrar que es idéntico al otro miembro.

Consideremos el siguiente ejemplo como ilustración:

EJEMPLO 1.

Demostrar que:

$$\cot \theta + \frac{\text{sen } \theta}{1 + \text{cos } \theta} \equiv \text{csc } \theta$$

SOLUCIÓN:

Se escoge cualquiera de los dos miembros de la ecuación para trabajar con él. Generalmente se recomienda el más complicado ya que suele ser más fácil reducirlo, que tratar de desarrollar el más sencillo. En este caso se eligió el primer miembro de la ecuación:

$$\cot \theta + \frac{\text{sen } \theta}{1 + \text{cos } \theta}$$

En el miembro elegido se sustituyen expresiones equivalentes ya estudiadas en las relaciones fundamentales. Para decidir que sustituciones deben usarse, se estudia la identidad completa. Debe tenerse presente que después de efectuar las sustituciones, el miembro con el cual se está trabajando necesariamente habrá de tomar una forma idéntica a la que tiene el otro miembro. Sustituyendo

$$\cot \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{se tiene: } \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} + \frac{\text{sen } \theta}{1 + \text{cos } \theta}$$

Después se simplifica, teniendo cuidado en observar correctamente las reglas algebraicas. Sumando las fracciones:

$$\frac{\text{cos } \theta + \text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta}{\text{sen } \theta (1 + \text{cos } \theta)}$$

Si es necesario, se repite el proceso de sustituir expresiones equivalentes. Sustituyendo, ahora, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta(1 + \cos\theta)} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

volviendo a simplificar, obtenemos:

$$\frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

Para concluir, se ha empleado la relación recíproca $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, para demostrar que el primer miembro de la ecuación es idéntico al segundo. Por lo tanto,

$$\cot\theta + \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \equiv \csc\theta$$

EJEMPLO 2.

Demostrar que:

$$2 \csc^2\theta \equiv \frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

SOLUCIÓN:

Se escoge el segundo miembro de la ecuación para hacer las transformaciones respectivas y demostrar que es idéntico al primero.

$$\frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

sumando las fracciones de este miembro:

$$\frac{1 - \cos\theta + 1 + \cos\theta}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$

Efectuando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\frac{2}{1 - \cos^2\theta}$$

sustituyendo $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

$$\frac{2}{\sin^2\theta}$$

Sustituyendo ahora $\sin^2\theta = \frac{1}{\csc^2\theta}$

$$\frac{2}{\frac{1}{\csc^2\theta}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $\csc^2\theta$, nos queda:

$$\frac{2 \csc^2\theta}{1}$$

Por lo tanto, la identidad

$$2 \csc^2\theta \equiv \frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

queda demostrada.

Pese a que existen otras formas de verificar identidades, debemos de dominar los procedimientos anteriores con el fin de evitar el error frecuente de suponer que los dos miembros son iguales. Trabajando con cada uno de los miembros por separado, no haremos suposiciones que pudieran invalidar la demostración.

AUTOEVALUACION 2.

Demostrar las siguientes identidades:

- 1.- $\operatorname{sen} \theta \cot \theta \equiv \cos \theta$
- 2.- $\cos \theta \tan \theta \equiv \operatorname{sen} \theta$
- 3.- $\operatorname{sen} \theta \sec \theta \equiv \tan \theta$
- 4.- $\frac{\tan \theta}{\operatorname{sen} \theta} \equiv \sec \theta$
- 5.- $\frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{csc}^2 \theta}{\cos \theta} \equiv \sec \theta$
- 6.- $\frac{\cos \theta \sec \theta}{\tan \theta} \equiv \cot \theta$
- 7.- $\sec^2 \theta \equiv \operatorname{csc} \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\cot^2 \theta}$
- 8.- $\operatorname{csc}^2 \theta \equiv \frac{1}{1 - \cos^2 \theta}$
- 9.- $\cos^2 \theta + \tan^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \equiv \sec^2 \theta$
- 10.- $\sec^2 \theta \cot^2 \theta \equiv \operatorname{csc}^2 \theta$
- 11.- $\frac{1 + \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} - 1 \equiv \operatorname{csc} \theta$
- 12.- $1 - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tan \theta \equiv \cos^2 \theta$
- 13.- $\tan \theta \equiv \frac{\sec \theta}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{1}{\tan \theta}$
- 14.- $\tan \theta \equiv \frac{\operatorname{sen} \theta + \tan \theta}{1 + \cos \theta}$
- 15.- $\cos \theta \equiv \sec \theta - \tan \theta \operatorname{sen} \theta$
- 16.- $\frac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} - \tan \theta \equiv \sec \theta$

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Subraya la respuesta correcta.

- 1.- Una relación del tipo: $\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ se denomina:
- 1) En forma de cociente.
 - 2) Pitagórica.
 - 3) Recíproca.
 - 4) Ninguno.

Simplifica o reduce a su mínima expresión los enunciados siguientes:

- 2.- $\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 B}$
- 1) $\tan^2 B$
 - 2) $\cot^2 B$
 - 3) $(1 - \cos^2 B)$
 - 4) Ninguno.
- 3.- $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A + \cot^2 A.$
- 1) $\sec^2 A$
 - 2) $\operatorname{csc}^2 A$
 - 3) 0
 - 4) Ninguno.
- 4.- $\frac{1 + \tan^2 A}{\operatorname{csc}^2 A}$
- 1) $\tan^2 A$
 - 2) 1
 - 3) $\operatorname{csc}^2 A$
 - 4) Ninguno.
- 5.- $\frac{\operatorname{sen}^2 A - 1}{\cos^2 A}$
- 1) 0
 - 2) -1
 - 3) $\tan^2 A$
 - 4) Ninguno

Selecciona el número de la respuesta correcta que forma con los siguientes enunciados una identidad trigonométrica.

- 6.- $\operatorname{sen} A \cdot \sec A.$
- 1) $\operatorname{csc} A$
 - 2) $\tan A$
 - 3) $\cos A$
 - 4) Ninguno.

$$7.- \frac{1}{\csc A - \cot A} + \frac{1}{\csc A + \cot A}$$

- | | |
|---------------|-------------|
| 1) $\csc A$ | 3) 1 |
| 2) $2 \csc A$ | 4) Ninguno. |

$$8.- \sec A - \tan A \cdot \sin A$$

- | | |
|-------------|-------------|
| 1) $\cos A$ | 2) $\sin A$ |
| 3) 0 | 4) Ninguno. |

9.- Selecciona correctamente los siguientes números, indicando la secuencia correcta.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) 1 | <input type="checkbox"/> | $\sec^2 x \cdot \csc^2 x$ |
| b) $\sec^2 x + \csc^2 x$ | <input type="checkbox"/> | $+ \sqrt{1 - \cos^2 x}$ |
| c) 0 | <input type="checkbox"/> | $\sin^2 x + \cos^2 x$ |
| d) $\sec x$ | <input type="checkbox"/> | 1 |
| e) $\cos^2 x$ | <input type="checkbox"/> | $\cos x$ |
| f) $\sin x$ | <input type="checkbox"/> | $\cos x \cdot \sec x$ |
| g) $\cot x$ | <input type="checkbox"/> | $\tan x$ |

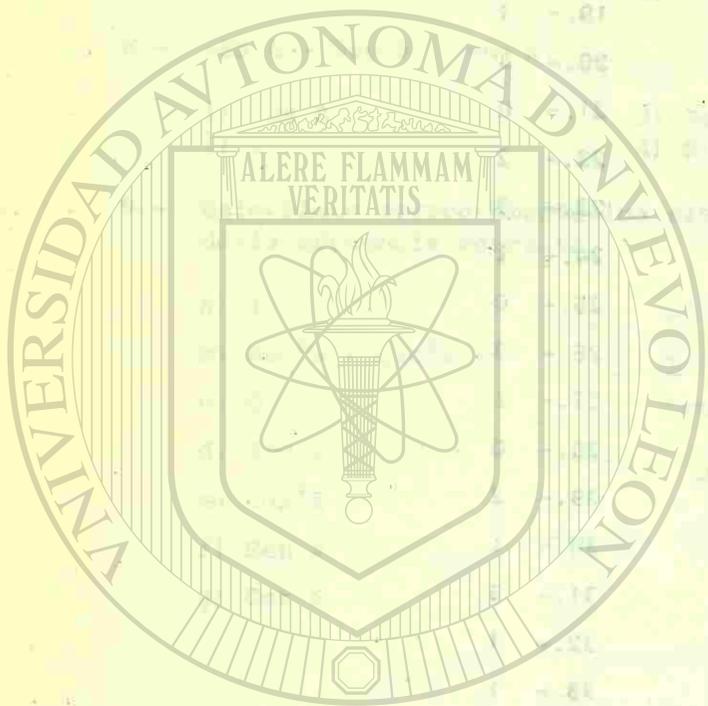
RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- 2	19.- 1
2.- 1	20.- 3
3.- 3	21.- 0
4.- 2	22.- 2
5.- 0	23.- 3
6.- 1	24.- 1
7.- 3	25.- 0
8.- 2	26.- 3
9.- 3	27.- 1
10.- 0	28.- 0
11.- 3	29.- 2
12.- 1	30.- 1
13.- 1	31.- 3
14.- 3	32.- 1
15.- 0	33.- 1
16.- 2	34.- 1
17.- 0	35.- 0
18.- 2	

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

1.- 1	6.- 2
2.- 1	7.- 2
3.- 2	8.- 1
4.- 1	9.- b, f, a, d, g, (en orden descendente).
5.- 2	



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL

40. SEMESTRE.

AREA II.

UNIDAD V.

ECUACIONES CONDICIONALES.

En esta unidad veremos las ecuaciones trigonométricas condicionales. Aprenderás a resolverlas a través de tus conocimientos de álgebra. También aprenderás a graficar dichas soluciones. Al igual que en el álgebra, la comprobación de los resultados debe efectuarse sustituyendo las soluciones encontradas en la ecuación para eliminar las raíces absurdas.

Te deseamos mucho éxito en el aprendizaje de esta unidad ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

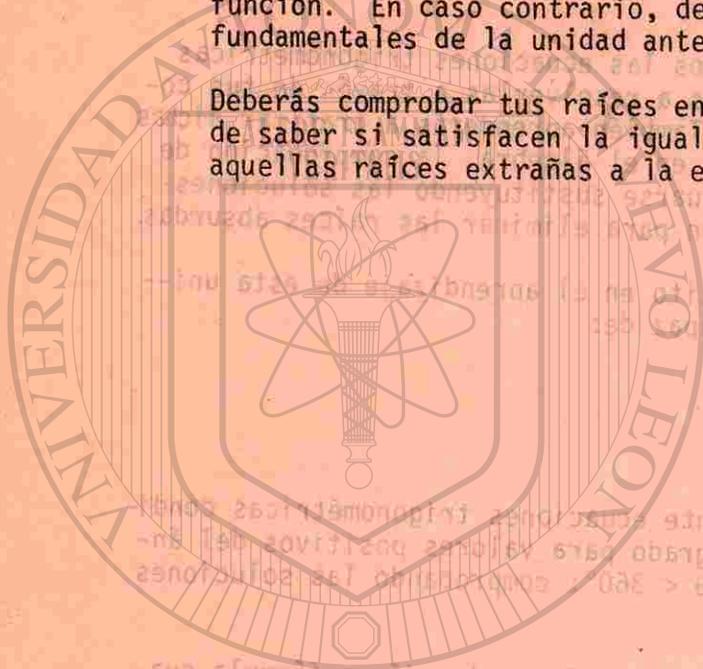
- 1.- Resolver correctamente ecuaciones trigonométricas condicionales de primer grado para valores positivos del ángulo θ , donde $0^\circ < \theta < 360^\circ$; comprobando las soluciones encontradas.
- 2.- A través de los métodos de factorización o fórmula cuadrática, de álgebra, resolver correctamente ecuaciones trigonométricas condicionales cuadráticas, para valores positivos del ángulo θ , donde $0^\circ < \theta < 360^\circ$; comprobando las soluciones encontradas.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Estudia la lección 2 del capítulo IV. Cabe mencionar la importancia del dominio que debes tener en los métodos algebraicos de ecuaciones cuadráticas como lo son el método de factorización o fórmula cuadrática.

Para que resuelvas satisfactoriamente tus objetivos, debes tener presente tus conocimientos de la unidad anterior, puesto que para resolver cualquier ecuación trigonométrica, ésta debe de estar en términos de una sola función. En caso contrario, debes usar las relaciones fundamentales de la unidad anterior.

Deberás comprobar tus raíces encontradas, con el fin de saber si satisfacen la igualdad y a la vez rechazar aquellas raíces extrañas a la ecuación.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE

CAPITULO 4.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS CONDICIONALES.

LECCIÓN 2.

4-6 INTRODUCCIÓN.

Antes de empezar a resolver ecuaciones trigonométricas, cabe mencionar la importancia de dominar los métodos de resolución de las ecuaciones algebraicas (las lineales y las cuadráticas en una variable), por lo que sugerimos, para recordar esos conocimientos, consultar tu libro de álgebra (Gordon Fuller, cap. 8), o cualquier otro que tengas a la mano, ya que nos servirán para resolver ecuaciones trigonométricas. Además, así como en álgebra, las soluciones trigonométricas debes comprobarlas en la ecuación original con el fin de saber si satisfacen la igualdad y poder desechar aquellas raíces extrañas a la ecuación.

4-7 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS CONDICIONALES. ®

Quando hablamos de ecuaciones en álgebra, generalmente nos referimos a ecuaciones condicionales, puesto que las ecuaciones idénticas se denominan identidades. La resolución de ecuaciones trigonométricas depende de los métodos previamente estudiados en álgebra. A fin de recordar los diferentes métodos, a continuación se hace un breve repaso por medio de ejemplos trigonométricos que requieren un procedimiento similar a los algebraicos.

EJEMPLO 1.

Resolver para θ si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ la siguiente ecuación de primer grado:

$$4 \cot \theta - 3 = 2 \cot \theta - 1$$

SOLUCIÓN:

El procedimiento que se sigue es idéntico que para las ecuaciones algebraicas de primer grado. Entonces, reordenando así,

$$4 \cot \theta - 2 \cot \theta = -1 + 3$$

sumando, $2 \cot \theta = 2$

y simplificando $\cot \theta = 1$

Existen dos respuestas para θ que satisfacen la condición de $\cot \theta = 1$, debido a que $\cot 45^\circ = 1$ y $\cot (180^\circ + \theta) = \cot \theta$. Por lo tanto,

$$\theta = 45^\circ, 225^\circ \text{ (es la respuesta)}$$

EJEMPLO 2.

Resolver para θ en radianes si $0 \leq \theta < 2\pi$ la siguiente ecuación de segundo grado.

$$2 \cos^2 \theta - 1 = -\cos \theta$$

SOLUCIÓN:

Una ecuación cuadrática se debe escribir primero en la forma general, es decir, en la forma $ax^2 + bx + c = 0$,

$$2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

Utilizando la fórmula general, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, nos queda:

$$\cos \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

entonces,

$$\cos \theta = 1/2$$

ó

$$\cos \theta = -1$$

Debido a la condición de $\cos \theta = 1/2$, existen dos respuestas: 60° y 300° ; y debido a la otra condición $\cos \theta = -1$, existe una respuesta, 180° . Por lo tanto, estos ángulos expresados en radianes son:

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \text{ (es la respuesta)}$$

(Obsérvese cómo se procedió para interpretar el hecho de que $\cos \theta = 1/2$).

(Se deja al estudiante la comprobación de la resolución de la ecuación anterior por el método de factorización).

Si la ecuación dada está en términos de dos o más funciones, se pueden efectuar sustituciones y simplificaciones de igual manera que en las identidades, hasta transformarla en una ecuación que contenga una sola función. Este proceso no siempre es necesario, así que debe examinarse la ecuación dada antes de transformarla. Por ejemplo $(\tan \theta - 3)(4 \cos \theta - 1) = 0$ puede resolverse fácilmente igualando a cero cada uno de los factores, sin necesidad de transformarla en términos de una sola función.

Tal como sucede en álgebra, la comprobación debe efectuarse sustituyendo en la ecuación original los valores obtenidos. Si alguno de estos valores no satisface la ecuación, recibe el nombre de "valor extraño" y no es una raíz de la ecuación. Las raíces que son imposibles de interpretar en una ecuación reciben el nombre de "raíces absurdas".

EJEMPLO 3.

Resolver para θ la siguiente ecuación si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$:
 $\text{sen } \theta - 1 = 2 \cos^2 \theta$.

SOLUCIÓN:

Haciendo la sustitución de $\cos^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$.

$$\text{sen } \theta - 1 = 2(1 - \text{sen}^2 \theta)$$

$$\text{sen } \theta - 1 = 2 - 2 \text{sen}^2 \theta$$

reordenando los términos y simplificando:

$$2 \text{sen}^2 \theta + \text{sen } \theta - 3 = 0$$

factorizando,

$$(2 \text{sen } \theta + 3)(\text{sen } \theta - 1) = 0$$

igualando a cero cada factor,

$$2 \text{sen } \theta + 3 = 0$$

$$\text{sen } \theta - 1 = 0$$

Si $2 \text{sen } \theta + 3 = 0$, entonces $\text{sen } \theta = -3/2$, lo cual obviamente no es posible interpretar, para valores reales de θ , porque $|\text{sen } \theta| \leq 1$. Por lo tanto, $-3/2$ es una raíz absurda.

Si $\text{sen } \theta - 1 = 0$, entonces $\text{sen } \theta = 1$ y $\theta = 90^\circ$, lo cual se comprueba fácilmente mediante el cálculo mental.

Por lo tanto, 90° es la única raíz que satisface la ecuación.

Obsérvese, ahora, cómo se procede en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 4.

Resolver para θ , si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, la siguiente ecuación: $\cos \theta = -0.766$.

SOLUCIÓN:

Buscamos en las tablas trigonométricas el valor del ángulo cuyo coseno sea 0.766 y encontramos que corresponde para un ángulo de 40° .

Pero la función coseno es negativa en el II como en el III cuadrante, nos queda que los triángulos semejantes son:

$$\theta = (180^\circ - 40^\circ) = 140^\circ$$

$$\text{y } \theta = (180^\circ + 40^\circ) = 220^\circ$$

Por lo tanto, las soluciones para la ecuación $\cos \theta = -0.766$ siendo $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ son:

$$\theta = 140^\circ \text{ y } 220^\circ$$

EJEMPLO 5.

Resolver para θ , si $0 < \theta < 2\pi$, la siguiente ecuación:
 $\text{sen } \theta = \tan \theta$.

SOLUCIÓN:

Haciendo uso de las relaciones fundamentales, buscamos aquella que puede expresar a la ecuación en términos de una sola función. Sustituyendo $\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$ en la ecuación nos queda:

$$\text{sen } \theta = \tan \theta$$

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

multiplicando los dos miembros de la ecuación por $\cos \theta$,

$$\cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$$

removiendo los términos de la ecuación.

$$\cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta = 0$$

factorizando:

$$\operatorname{sen} \theta (\cos \theta - 1) = 0$$

Ahora, como en la ecuación equivalente nos quedó en función de dos factores, tenemos que:

$$\begin{array}{l} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \text{ó} \quad \cos \theta - 1 = 0 \\ \text{o bien,} \quad \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \text{ó} \quad \cos \theta = 1 \\ \text{entonces,} \quad \theta = 0^\circ \text{ y } 180^\circ \quad \text{ó} \quad \theta = 0^\circ \text{ y } 360^\circ \end{array}$$

Pero como las soluciones nos las piden en radianes, (usando la equivalencia $1^\circ = \pi/180$ radianes), nos queda:

$$\begin{array}{l} \theta = 360^\circ \left(\frac{\pi}{180}\right) \quad \theta = 0^\circ \left(\frac{\pi}{180}\right) = 0 \text{ radianes} \\ \theta = 2\pi \text{ rad} \quad \theta = 180^\circ \left(\frac{\pi}{180}\right) = \pi \text{ radianes} \end{array}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} \theta = \tan \theta$ son:

$$\theta = 0 \text{ rad.}$$

$$\theta = \pi \text{ rad.}$$

$$\theta = 2\pi \text{ rad.}$$

EJEMPLO 6.

Resolver para θ , si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, la siguiente ecuación:
 $\cos^2 \theta - 0.25 = 0$.

SOLUCIÓN:

Removiendo los términos de la ecuación y despejando $\cos \theta$, tenemos:

$$\cos^2 \theta - 0.25 = 0$$

$$\cos^2 \theta = 0.25$$

$$\sqrt{\cos^2 \theta} = \pm \sqrt{0.25}$$

$$\cos \theta = \pm 0.5$$

o sea que, $\cos \theta = 0.5$ ó $\cos \theta = -0.5$.

Buscando en las tablas trigonométricas, un ángulo cuyo coseno valga 0.5, encontramos que el ángulo es de 60° .

Debido a $\cos \theta = 0.5$, hay dos ángulos (uno en el cuadrante I y otro en el IV cuadrante), que cumplen esta condición: 60° y 300° , ($360^\circ - 60^\circ$).

Y debido a $\cos \theta = -0.5$, también hay dos ángulos (uno en el II y otro en el III cuadrante), que cumplen con esta condición: 120° , ($180^\circ - 60^\circ$) y 240° , ($180^\circ + 60^\circ$).

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cos^2 \theta - 0.25 = 0$ son: $\theta = 60^\circ$, 120° , 240° y 300° .

EJEMPLO 7.

Resolver para θ , si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, la siguiente ecuación:
 $\cot^2 \theta = \cot \theta$.

SOLUCIÓN:

Removiendo los términos de la ecuación,

$$\cot^2 \theta = \cot \theta$$

$$\cot^2 \theta - \cot \theta = 0$$

factorizando,

$$\cot\theta(\cot\theta - 1) = 0$$

igualando a cero cada factor,

$$\begin{array}{l} \cot\theta = 0 \quad \delta \quad \cot\theta - 1 = 0 \\ \text{o sea que, } \cot\theta = 0 \quad \delta \quad \cot\theta = 1 \end{array}$$

Debido a $\cot\theta = 0$, encontramos dos soluciones: 90° y 270°

Y debido a $\cot\theta = 1$, encontramos las otras dos soluciones: 45° y 225° .

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cot^2\theta = \cot\theta$ son: $\theta = 45^\circ, 90^\circ, 225^\circ$ y 270°

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas para θ , si $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ y rechaza las raíces absurdas.

1.- $\sec^2\theta - 2 \sec\theta = 0$

- 0) $30^\circ, 330^\circ$ 1) $45^\circ, 225^\circ$ 2) $60^\circ, 300^\circ$
3) $80^\circ, 280^\circ$

2.- $\cos^2\theta + 2 \cos\theta - 3 = 0$

- 0) $0^\circ, 300^\circ$ 1) $0^\circ, 360^\circ$ 2) $270^\circ, 330^\circ$
3) $90^\circ, 180^\circ$

3.- $\cot\theta = \tan\theta$

- 0) $30^\circ, 90^\circ, 210^\circ, 325^\circ$ 1) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$
2) $60^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 320^\circ$ 3) $30^\circ, 120^\circ, 210^\circ, 300^\circ$

4.- $3 \cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

- 0) $48^\circ 10', 311^\circ 50', 180^\circ$ 1) $49^\circ 10', 312^\circ 50', 90^\circ$
2) $50^\circ 10', 313^\circ 50', 270^\circ$ 3) $37^\circ 10', 127^\circ 10', 180^\circ$

5.- $\tan\theta = 3.487$

- 0) $74^\circ, 254^\circ$ 1) $38^\circ, 321^\circ$ 2) $106^\circ, 286^\circ$
3) $176^\circ, 196^\circ$

Resuelve las siguientes ecuaciones para θ , si $0 \leq \theta < 2\pi$, y rechaza las raíces absurdas.

6.- $\sin^2\theta = 1$

- 0) $\frac{3}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi$ 1) $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 2) $\pi/2, 3\pi/2$
3) $\pi/4, 5\pi/4$

7.- $2 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$

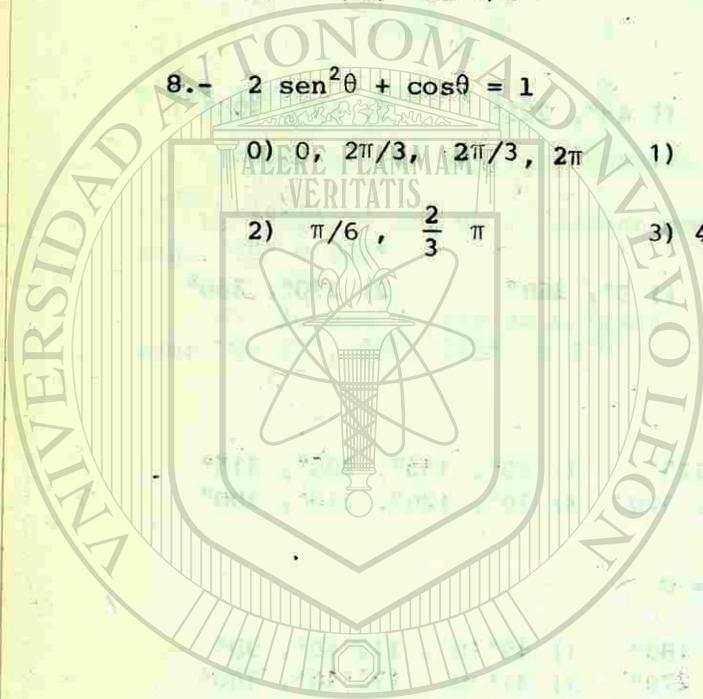
0) $\frac{5}{3} \pi, \frac{6}{5}$ 1) $\frac{7}{3} \pi, \frac{8}{5} \pi$ 2) $\frac{5}{4} \pi, \frac{9}{7} \pi$

3) $7 \pi/6, 11 \pi/6$

8.- $2 \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos} \theta = 1$

0) $0, 2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi$ 1) $\frac{3}{2} \pi, \frac{3}{4} \pi$

2) $\pi/6, \frac{2}{3} \pi$ 3) $4\pi/5, \frac{6}{5} \pi$



RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

1.- 2

2.- 1

3.- 1

4.- 0

5.- 0

6.- 2

7.- 3

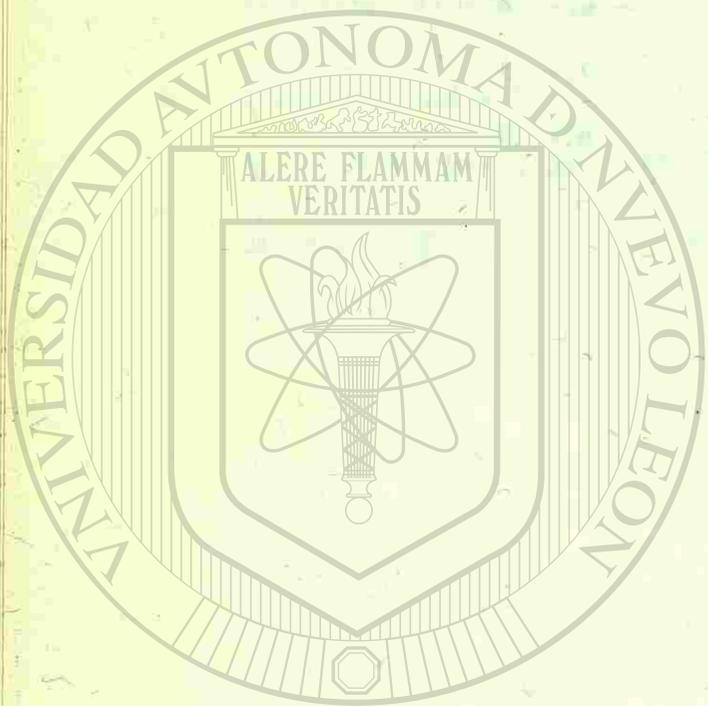
8.- 0

UANL

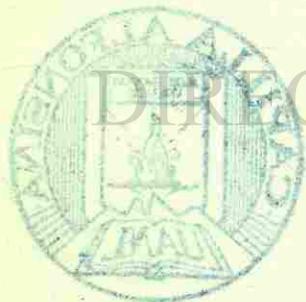
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEACIÓN Y EVALUACIÓN

40. SEMESTRE.

AREA II.

UNIDAD VI.

RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS OBLICUANGULOS.

Al estudiar trigonometría recuerda que debes leer con todo cuidado la teoría y los ejemplos antes de intentar la resolución de los problemas. Las fórmulas y los símbolos deben leerse como si estuvieran expresados en palabras. Los ejemplos debes resolverlos en una hoja aparte hasta alcanzar la certidumbre de haber comprendido cada uno de los pasos que conducen a la solución.

En esta unidad, estudiaremos y aprenderemos a resolver cualquier triángulo oblicuángulo (o sea, conocer todos los lados y ángulos), por las leyes de los senos y cosenos, dependiendo de los datos conocidos.

Al término de esta unidad el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

- 1.- Aplicar correctamente la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos, cuando se conocen:
 - a) Un lado y dos ángulos cualquiera.
 - b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- 2.- Para el inciso b) del objetivo anterior, analizar los datos del triángulo ABC y determinar en cada caso el número de soluciones que presenta, una, dos o ninguna.
- 3.- Aplicar correctamente la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos, cuando se conocen:
 - a) Dos lados y el ángulo que forman.
 - b) Los tres lados.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo V de tu libro de texto. Es importante que, cuando vayas a resolver cualquier triángulo oblicuángulo, tengas presente lo siguiente:

- a) Debes dibujar una figura donde indiques los datos conocidos.
 - b) Determinar el caso a que pertenece, para que escojas la fórmula a emplear y así puedes determinar el número de soluciones posibles.
- 2.- Estudia tus ejemplos antes de resolver las autoevaluaciones que se incluyen dentro del capítulo.
- 3.- Si ya crees dominar los objetivos, resuelve la autoevaluación del capítulo, volviendo a estudiar el objetivo de los problemas en que hayas salido mal.

4o. SEMESTRE.

AREA II.

UNIDAD VII.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Con esta unidad terminamos el estudio de la trigonometría y veremos los números complejos. La matemática, al igual que la trigonometría, es una de las ciencias más antiguas. Como se ha visto, en la mente de los antiguos ya existía la idea de la relación de las longitudes y los ángulos.

En esta unidad aprenderás a representar gráficamente los números complejos y estarás en condición de operar con ellos y a representarlos en sus dos formas.

Aprende a excelencia la unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

- 1.- Definir con tus propias palabras los conceptos: número real, número imaginario puro y número complejo.
- 2.- Definir con tus propias palabras los conceptos: forma rectangular, forma polar, argumento o fase y módulo.
- 3.- Representar gráficamente los números complejos en cualquiera de las dos formas.
- 4.- Transformar correctamente los números complejos de la forma rectangular o algebraica a la forma polar o trigonométrica y viceversa.
- 5.- Efectuar correctamente las 4 operaciones básicas con los números complejos y expresar su resultado en cualquiera de las dos formas conocidas.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Estudia el capítulo VI de tu libro de texto.
Los objetivos 1 y 2 son de suma importancia que trates de comprenderlos, puesto que, en ellos se basa toda la teoría de esta unidad, por lo que te recomendamos leer todo el capítulo.
Para los objetivos 3 y 4, estudia las secciones 3 y 5; resuelve la autoevaluación 2.
Para el objetivo 5 estudia las secciones 4 y 6; resuelve las autoevaluaciones 1 y 3.
- 2.- Como autoevaluación de esta unidad resuelve la autoevaluación del capítulo.

CAPITULO 5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

5-1 INTRODUCCIÓN.

Una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría es la resolución de triángulos oblicuángulos. El físico y el ingeniero se encuentran frecuentemente frente a problemas de este tipo. Se dice que un triángulo queda resuelto cuando se conocen sus lados, sus ángulos y su área. Para resolver un triángulo es necesario conocer tres elementos siendo por lo menos uno de ellos un lado. A continuación, presentaremos diversas fórmulas - útiles para este propósito. Tres elementos de un triángulo, incluyendo por lo menos uno de los lados, pueden ser dados de los siguientes modos:

- Caso A. Dos ángulos y un lado.
- Caso B. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Caso C. Dos lados y el ángulo comprendido.
- Caso D. Tres lados.

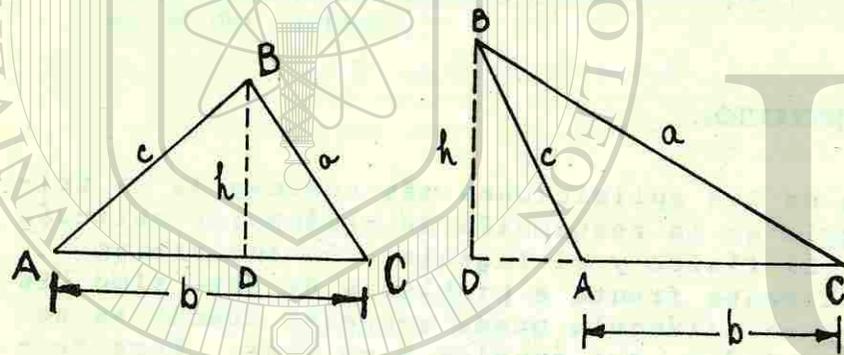


Fig. 1.

Fig. 2.

Debe observarse que el caso A es equivalente a dar tres ángulos y un lado, puesto que el tercer ángulo se puede obtener restando de 180° la suma de los dos ángulos dados.

Para calcular un elemento desconocido de un triángulo, es necesario seleccionar una fórmula que comprenda los tres elementos conocidos y el desconocido.

5-2 LEY DE LOS SENOS.

Consideremos un triángulo de ángulos A, B y C y cuyos lados opuestos son a, b y c respectivamente. Tracemos una perpendicular desde cualquiera de los vértices al lado opuesto, o a la prolongación del lado opuesto y sea D el punto de intersección y h la longitud de la perpendicular. Considerando cualquiera de las figuras 1 y 2 se tiene:

$$\text{sen } C = \frac{h}{a}$$

por tanto,

$$h = a \text{ sen } C$$

Por otro lado, utilizando la figura 2,

$$\text{sen } A = \frac{h}{c}$$

$$h = c \text{ sen } A$$

El ángulo DAB de la fig. 2, es el ángulo relacionado de CAB. En consecuencia, sen A es numéricamente igual a sen DAB. Además ambos tienen el mismo signo puesto que cada uno es positivo y menor de 180°

Luego, haciendo uso de la fig. 2, se tiene:

$$\text{sen } A = \text{sen } DAB$$

$$= \frac{h}{c}$$

por tanto,

$$h = c \text{ sen } A$$

Igualando las dos expresiones del valor de h, se tiene:

$$a \text{ sen } C = c \text{ sen } A$$

Dividiendo por sen A sen C, se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Esta relación entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos puede expresarse en la forma:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad (1)$$

que viene a ser la expresión simbólica de la ley de los senos que damos a continuación.

Ley de los senos.

En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales.

Esta ley también se suele expresar diciendo:

En un triángulo cualquiera los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

La ley de los senos se puede usar cuando se conocen tres de las cantidades comprendidas en cualesquiera dos de las razones.

Debe hacerse notar que dos cualesquiera de las razones de la fórmula (1) comprenden dos lados y sus ángulos opuestos. Por tanto, por medio de esta fórmula se puede resolver un triángulo que se encuentra en cualquiera de los siguientes casos:

Caso A. Dos ángulos y un lado.

Caso B. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

5-3 ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

Sabemos que el área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura. En las figuras 1 y 2, la altura es h y la base es b . Por tanto, una fórmula del área A , de un triángulo es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} bh \\ &= \frac{1}{2} ab \text{ sen } C \end{aligned} \quad (2)$$

Puesto que la notación empleada es general, se tiene:

TEOREMA 1.

El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos cualesquiera de los lados por el seno del ángulo comprendido.

Despejando "a" de la ecuación obtenida, considerando los dos primeros miembros de (1), se tiene:

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

sustituyendo este valor en (2), se tiene:

$$A = \frac{b^2 \text{ sen } A \text{ sen } C}{2 \text{ sen } B} \quad (3)$$

esta fórmula puede expresarse como sigue:

TEOREMA 2.

El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto del cuadrado de uno de los lados por los senos de los ángulos adyacentes, dividido por el seno del ángulo opuesto.

CASO A.

Con el objeto de ilustrar el uso de las fórmulas obtenidas, se resolverá el triángulo en el que $a = 12.30$, $A = 48^\circ 10'$ y $C = 84^\circ 20'$. En estas condiciones es posible aplicar la ley de los senos puesto que se conocen tres de las cuatro cantidades implicadas en ella. Por tanto,

$$\frac{c}{\text{sen } 84^{\circ}20'} = \frac{12.30}{\text{sen } 48^{\circ}10'}$$

de donde:

$$c = \frac{(12.30) (\text{sen } 84^{\circ}20')}{\text{sen } 48^{\circ}10'}$$

$$c = \frac{(12.30) (0.9951)}{0.7451}$$

$$c = 16.427$$

además,

$$B = 180^{\circ} - (48^{\circ}10' + 84^{\circ}20')$$

$$B = 47^{\circ}30'$$

Haciendo uso nuevamente de la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{b}{\text{sen } 47^{\circ}30'} = \frac{12.30}{\text{sen } 48^{\circ}10'}$$

por tanto,

$$b = \frac{(12.30) (\text{sen } 47^{\circ}30')}{\text{sen } 48^{\circ}10'}$$

$$b = \frac{(12.30) (0.7373)}{0.7451}$$

$$b = 12.171$$

Para calcular el área del triángulo se utiliza el teorema 1. Escogiendo b y c como lados, se tiene:

$$A = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A$$

$$A = \frac{(12.171) (16.427) (\text{sen } 48^{\circ}10')}{2}$$

$$A = \frac{(12.171) (16.427) (0.7451)}{2}$$

$$A = 74.485$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Resolver los triángulos cuyos elementos se dan en los siguientes problemas:

1.- $A = 35^{\circ}30'$; $B = 47^{\circ}30'$; $a = 13.24$

2.- $A = 69^{\circ}30'$; $B = 57^{\circ}30'$; $b = 0.6243$

3.- $A = 26^{\circ}20'$; $C = 79^{\circ}40'$; $c = 123.4$

4.- $B = 121^{\circ}$; $C = 17^{\circ}20'$; $b = 0.4273$

5.- $B = 26^{\circ}40'$; $C = 15^{\circ}30'$; $c = 46.13$

6.- $A = 67^{\circ}50'$; $B = 37^{\circ}50'$; $a = 4891$

7.- $A = 76^{\circ}10'$; $C = 23^{\circ}$; $c = 0.04216$

8.- $A = 100^{\circ}40'$; $C = 21^{\circ}10'$; $a = 627.3$

9.- $B = 54^{\circ}40'$; $C = 39^{\circ}30'$; $b = 96.29$

10.- Dos casas A y B quedan a 1200 m una de otra sobre la misma margen de un río, y una tercera casa C queda en la margen opuesta. Si el ángulo CAB = $62^{\circ}20'$ y el ángulo CBA = $36^{\circ}10'$, hallar la distancia de C a A y a B.

11.- Un poste vertical situado en una pendiente que forma un ángulo de 7° con la horizontal, proyecta hacia abajo de

la pendiente una sombra de 36.3 m de longitud. Si el ángulo de elevación del sol es de 26°, calcular la longitud del poste.

12.- Un aeropuerto A queda 560 kilómetros al norte de otro B. Un piloto viaja en la dirección 130° de A a C y luego en la dirección 200° a B. Determinar la distancia total recorrida.

CASO B. UN CASO AMBIGUO.

En geometría plana se demuestra que dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos no siempre es posible construir un triángulo. Por otra parte, tal como se demuestra en la siguiente discusión, según sean los datos, el problema puede tener ninguna, una o dos soluciones.

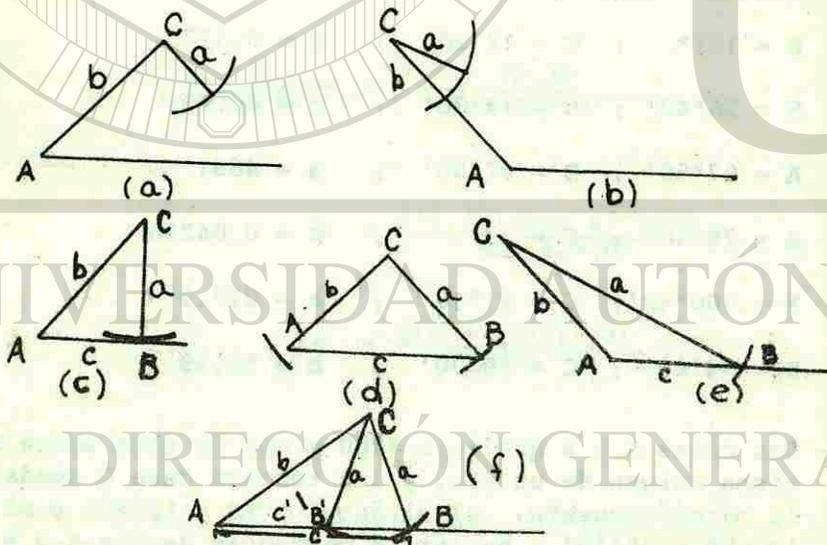


Fig. 3.

Cuando se dan el ángulo A y los lados a y b, el método geométrico para construir el triángulo es: 1) se construye el ángulo A; 2) se traza la distancia AC = b; y 3) con C como centro y con un radio igual a "a" se traza un arco. -- pueden ocurrir los casos siguientes:

- 1) El radio puede ser demasiado corto para intersectar el lado inicial del ángulo A (ver fig. 3 a, b) y en consecuencia no hay triángulo posible.
- 2) El arco puede cortar el lado inicial en un punto o ser tangente a él (fig. 3, c, d, e). En cada uno de estos casos existe solamente un triángulo que satisfaga las -- condiciones.
- 3) El arco puede cortar el lado inicial en dos puntos y tenerse así, dos triángulos (fig. 3, f).

Si los lados dados son a y b, y si el ángulo dado es A, se tiene:

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} \quad (4)$$

de acuerdo con la ley de los senos. Puesto que a, b y A son conocidos, el valor de sen B está determinado. En consecuencia B puede calcularse a partir de la tabla de funciones naturales. Además, $180 - B = B'$ es también un ángulo cuyo seno es igual a sen B. Por tanto, B y B' son las dos posibilidades para el ángulo opuesto al lado b. Se pueden usar cada uno de estos ángulos si,

$$A + B < 180^\circ \quad \text{y} \quad A + B' < 180^\circ$$

Sin embargo, si cualquiera de estas sumas es igual o mayor que 180° , se debe descartar el correspondiente valor de B o B', puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180° .

Si,

$$\begin{aligned} \text{Sen } B &= \frac{b \text{ sen } A}{a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces, $B = 90^\circ$, y en consecuencia,

$$\begin{aligned} 180 - B &= B' \\ B' &= 90^\circ \end{aligned}$$

y existe sólo una solución. Si la ecuación (4) da un valor mayor que 1, se tiene $\text{sen } B > 1$. Por tanto, no existe solución ya que no existe un ángulo cuyo seno sea mayor que la unidad.

No es necesario memorizar las diferentes posibilidades dadas, en virtud de la sencillez con que en todo problema se determina si B ó B' , o ambos, pueden ser ángulos del triángulo que contiene a A .

AUTOEVALUACIÓN 2.

En los problemas 1 a 10, analizar los datos para el triángulo ABC y determinar en cada caso el número de soluciones que presenta una, dos o ninguna.

1.- $B = 30^\circ$, $b = 15$, $a = 20$

2.- $A = 30^\circ$, $b = 20$, $a = 10$

3.- $C = 48^\circ$, $c = 40$, $b = 25$

4.- $A = 118^\circ$, $a = 70$, $c = 82$

5.- $B = 45^\circ$, $c = 18$, $b = 9\sqrt{2}$

6.- $C = 60^\circ$, $c = 22.5$, $b = 30$

7.- $A = 163^\circ$, $a = 97$, $b = 43$

8.- $C = 37^\circ$, $c = 81.4$, $a = 99.6$

9.- $B = 66^\circ$, $b = 73.1$, $c = 71.3$

10.- $A = 30^\circ$, $c = 712$, $a = 356$

5-4 LEY DE LOS COSENOS.

La segunda ley fundamental para la resolución de triángulos oblicuángulos es la ley de los cosenos. Para deducir esta ley consideremos el triángulo ABC de la figura 4.

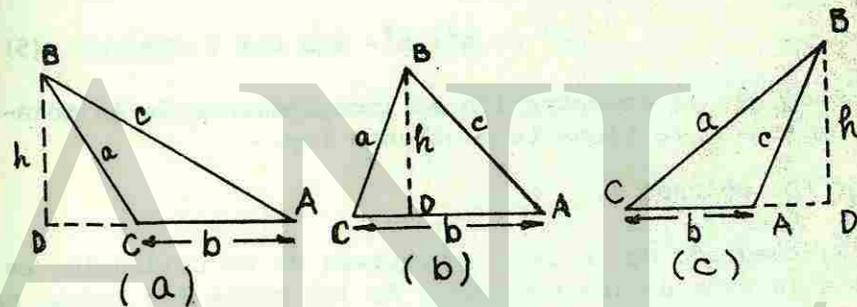


Fig. 4.

A partir de cualquier vértice, B , tracemos una perpendicular al lado opuesto o su prolongación.

Aplicando el teorema de Pitágoras a cada triángulo de la fig. 4 se tiene:

$$(i) \quad c^2 = h^2 + (DA)^2$$

pero, $h = a \text{ sen } C$, puesto que $\text{sen } C = \frac{h}{a}$

además, $DA = b + DC$

$$DA = b - CD, \text{ puesto que } DC = -CD$$

$$= b - a \cos C, \text{ puesto que } \cos C = \frac{CD}{a}$$

Sustituyendo en (i) estos valores de h y de DA , se tiene:

$$c^2 = (a \operatorname{sen} C)^2 + (b - a \cos C)^2$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2 C + b^2 - 2ab \cos C + a^2 \cos^2 C$$

$$= a^2 (\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab \cos C$$

Por tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (5)$$

Dado que la demostración es independiente de la notación empleada, se tiene la siguiente ley.

Ley de los cosenos 1.

El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Si despejamos $\cos C$ de (5) tenemos:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (6)$$

Dado que la demostración es independiente de la notación empleada, se tiene la segunda forma de la ley de los cosenos.

Ley de los cosenos 2.

El coseno de un ángulo cualquiera de un triángulo es igual a una fracción cuyo numerador es la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, menos el cuadrado del tercer lado

do, y cuyo denominador es el doble producto de los lados que forman el ángulo.

El primer miembro de (5) contiene dos de los lados y el ángulo que forman, y permite determinar el tercer lado. La fórmula (6) permite obtener uno de los ángulos cuando se conocen los tres lados. Por tanto, la ley de los cosenos es suficiente para resolver los casos C y D indicados anteriormente.

EJEMPLO 1.

Dados $a = 20$, $b = 30$, $C = 11^\circ$, resolver el triángulo.

SOLUCIÓN:

De acuerdo con la ley de los cosenos, se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= (20)^2 + (30)^2 - 2(20)(30)(\cos 11^\circ)$$

$$= 400 + 900 - 1200(0.9816)$$

$$= 122.047$$

Por tanto, $c = 11.0475$

Para obtener los ángulos A y B, emplearemos la segunda forma de la ley de los cosenos y tendremos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{900 + 122.047 + 400}{662.85}$$

$$= 0.9384$$

de donde,

$$A = 20^\circ 12' 30''$$

además,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{400 + 122.047 - 900}{441.90} \\ &= \frac{-377.953}{441.90} \\ &= -0.8553\end{aligned}$$

de donde, $B = 148^{\circ}47' 30''$

El valor de B se obtuvo fundándose en el hecho de que,

cos ángulo relacionado de $B = 0.8553$

ángulo relacionado de $B = 31^{\circ} 12' 30''$

$$B = 180^{\circ} - 31^{\circ}12' 30''$$

$$B = 148^{\circ}47' 30''$$

Como comprobación se tiene:

$$A + B + C = 20^{\circ}12' 30'' + 148^{\circ}47' 30'' + 11^{\circ} = 180^{\circ}$$

EJEMPLO 2.

Determinar los ángulos del triángulo cuyos lados son:
 $a = 15$, $b = 20$ y $c = 25$.

SOLUCIÓN:

Empleando la segunda forma de la ley de los cosenos, se tiene:

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{(15)^2 + (20)^2 - (25)^2}{2(15)(20)} \\ &= \frac{225 + 400 - 625}{600} \\ &= 0\end{aligned}$$

por tanto,

$$C = 90^{\circ}$$

además,

$$\cos B = \frac{(15)^2 + (25)^2 - (20)^2}{2(15)(25)}$$

$$= \frac{225 + 625 - 400}{750}$$

$$= \frac{450}{750}$$

$$\cos B = 0.6000$$

por tanto,

$$B = 53^{\circ} 7' 48''$$

Análogamente,

$$\cos A = \frac{(20)^2 + (25)^2 - (15)^2}{2(20)(25)}$$

$$= \frac{800}{1000}$$

$$= 0.8000$$

de donde,

$$A = 36^{\circ} 52' 12''$$

y como $90^{\circ} + 53^{\circ}7' 48'' + 36^{\circ}52' 12'' = 180^{\circ}$, queda comprobada la solución.

AUTOEVALUACIÓN 3.

En los siguientes problemas, calcular la longitud del lado que falta.

1.- $a = 20$, $b = 50$, $C = 60^{\circ}$

2.- $b = 8$, $c = 12$, $A = 25^{\circ}$

3.- $a = 200$, $c = 300$, $B = 120^{\circ}$

4.- $a = 130$, $b = 90.0$, $C = 100^{\circ}$

- 5.- Si, $a = 12$, $b = 13$, $c = 20$, hallar A.
- 6.- Si, $a = 500$, $b = 300$, $c = 200$, hallar C.
- 7.- Si, $a = 24$, $b = 60$, $c = 40$, hallar B.
- 8.- Si, $a = 12$, $b = 13$, $c = 20$, hallar C.

Determinar los tres ángulos de los triángulos de los problemas 9 y 10.

- 9.- $a = 15$, $b = 16$, $c = 7$.
- 10.- $a = 600$, $b = 300$, $c = 400$
- 11.- Los puntos B y C quedan en los lados opuestos de un pantano. El punto A, accesible a B y a C queda en una orilla. Se mide AB, AC y el ángulo BAC, obteniéndose: $AB = 2000$ m, $AC = 3000$ m, y el ángulo $BAC = 30^\circ$. Calcular la distancia de B a C.
- 12.- Un piloto viaja con velocidad relativa al aire de 200 millas por hora y rumbo de 225° . El viento sopla proveniente del este a razón de 25 millas por hora. Determinar la velocidad del aeroplano con relación a la Tierra y la dirección del vuelo si no hubiera viento.

5-5 RESOLUCIÓN DE LOS CASOS C Y D POR MEDIO DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Ciertas propiedades de los triángulos semejantes hacen posible la resolución de algunos triángulos por medio de la ley de los cosenos. Debe recordarse que los ángulos de los triángulos semejantes son respectivamente iguales y los lados homólogos son proporcionales.

EJEMPLO 1.

Dados $a = 26$, $c = 39$, $b = 52$, resolver el triángulo ABC.

SOLUCIÓN:

En un triángulo semejante al triángulo dado, $a_1 = 2$, $c_1 = 3$, $b_1 = 4$. Este triángulo se puede resolver fácilmente por la ley de los cosenos y los ángulos que se determinen serán respectivamente iguales a los del triángulo propuesto.

EJEMPLO 2.

Resolver el triángulo ABC, dados $A = 42^\circ 20'$, $b = 63$, $c = 105$.

SOLUCIÓN:

En un triángulo semejante al triángulo dado, $A_1 = 42^\circ 20'$, $b_1 = 3$, $c_1 = 5$.

Los elementos a_1 , B_1 y C_1 se pueden calcular por la ley de los cosenos y por la ley de los senos.

(Al hallar "a", debe tenerse en cuenta la siguiente advertencia):

Advertencia.

Aunque $B = B_1$ y $C = C_1$, $a = 21a_1$, ya que cada lado del triángulo original se dividió entre 21. Este proceso abreviado, frecuentemente es de gran utilidad, pero debe emplearse con mucho cuidado. Siempre que se aplique debe tenerse presente que se está trabajando con un triángulo semejante al triángulo dado.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

Subraya la respuesta correcta.

1.- Dos senos de dos ángulos de cualesquier triángulo tienen la misma razón que los dos lados opuestos a ellos.

- 1) Ley de los senos. 2) Seno inverso.
3) Teorema de Pitágoras. 4) Ley de los cosenos.

2.- Sea ABC un triángulo oblicuángulo y se desea conocer $(b^2 + c^2 - a^2)$. ¿Cuál de los incisos es la respuesta?

- 1) $-2bc \cos A$. 2) $2bc \cos A$.
3) $\sin A$. 4) $\cos A/2bc$.

3.- En dos triángulos semejantes, los lados homólogos son:

- 1) Proporcionales. 2) Iguales.
3) Perpendiculares. 4) Desiguales.

4.- En cualquier triángulo, a mayor lado se opone:

- 1) Mayor coseno. 2) Menor seno.
3) Mayor ángulo. 4) Menor ángulo.

5.- Si en un triángulo ABC se conocen los tres lados, ¿qué fórmula se utiliza?

- 1) Teorema de Pitágoras. 2) Ley de los senos.
3) Ley de los cosenos. 4) Seno inverso.

En los siguientes problemas aplica la ley de los cosenos o bien la de los senos, dependiendo de los datos que se dan.

6.- Si $a=10$, $c=8$, $A=45^\circ$; encuentra $\sin C$.

- 1) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 2) $2\sqrt{2}$
3) $\sqrt{2}/5$ 4) Indeterminado.

7.- Dado $A=120^\circ$, $a=40$, $c=80$; resolver el triángulo ABC.

- 1) $B=24^\circ 40'$ 2) $B=5^\circ 20'$
 $C=35^\circ 20'$ $C=54^\circ 40'$
 $b=19.28$ $b=4.3$
3) $A=4^\circ 20'$ 4) Indeterminado.
 $B=55^\circ 40'$
 $b=3.48$

8.- Dado $A=24^\circ$, $c=8$ cm, $a=6$ cm, resolver el triángulo ABC.

- 0) $B=18^\circ 50'$ 1) $B=123^\circ 9' 37''$
 $C=147^\circ 10'$ $C=32^\circ 50' 29''$
 $b=4.762$ cm $b=12.349$ cm
2) $B=147^\circ 10'$ 3) $B=32^\circ 50'$
 $C=18^\circ 50'$ $C=123^\circ 10'$
 $b=8$ cm $b=4.762$ cm

4) No hay solución para el triángulo.

9.- Un barco zarpa de un muelle y navega 12 millas náuticas hacia el este, después navega en la dirección S 45° E hasta encontrar el punto de cruce con la dirección del muelle formando un ángulo de 30° con ella. ¿A qué distancia está el muelle cuando se encuentra en ese punto?

- 1) $8\sqrt{2}$ 2) $12\sqrt{2}$
3) $10\sqrt{2}$ 4) 5

10.- Si $a=3$, $b=4$, $c=2$; calcula $\cos A$.

- 1) $11/16$ 2) $15/16$
3) $13/16$ 4) $5/16$

11.- Calcula el perímetro del triángulo ABC para el cual $a=9$, $c=6$, $\cos B=1/12$.

- 1) $(15+5\sqrt{3})$ 2) $(15+3\sqrt{3})$
3) $(15+6\sqrt{3})$ 4) $21\sqrt{3}$

12.- Si $a=4$, $b=2$, $c=6$; encuentra el coseno del ángulo menor.

- | | |
|------|------|
| 1) 1 | 2) 0 |
| 3) 2 | 4) 5 |

13.- Relaciona correctamente las columnas:

- | | | |
|------------------------|-------|-----------------------------------|
| a) Menor de 90° | _____ | semi-perímetro del triángulo ABC. |
| b) $(A+B+C)/2$ | _____ | ángulo agudo. |
| c) Mayor de 90° | _____ | a. $\text{Csc } A$. |
| d) $b^2 + c^2 - a^2$ | _____ | un cuarto de circunferencia. |
| e) 90° | _____ | $2bc \text{ Cos } A$. |
| f) $(a+b+c)/2$ | _____ | |
| g) $b/\text{Sen } B$ | _____ | |

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO V.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1.- $b=16.81$, $c=22.63$, $C=97^\circ$ | Área = 110.45 |
| 2.- $a=0.6933$, $c=0.5912$, $C=53^\circ$ | Área = 0.1729 |
| 3.- $a=55.64$, $b=120.58$, $B=73^\circ 60'$ | Área = 3300.2 |
| 4.- $a=0.3314$, $c=0.1485$, $A=41^\circ 40'$ | Área = 0.0211 |
| 5.- $a=115.88$, $b=77.47$, $A=137.50'$ | Área = 1199.5 |
| 6.- $b=3239.4$, $c=5085.1$, $C=74^\circ 20'$ | Área = 7.628×10^6 |
| 7.- $a=0.1048$, $b=0.1065$, $B=80^\circ 50'$ | Área = 2.180×10^{-3} |
| 8.- $b=542.3$, $c=230.5$, $B=58^\circ 10'$ | Área = 61420.1 |
| 9.- $a=117.7$, $c=75.08$, $A=85^\circ 50'$ | Área = 3605.2 |
| 10.- 716.03 m, 1074.6 m. | |
| 11.- 18.97 m | |
| 12.- 669.34 Km | |

AUTOEVALUACIÓN 2.

- | | |
|--------------|--------------|
| 1.- Dos. | 6.- Ninguna. |
| 2.- Una. | 7.- Una. |
| 3.- Una. | 8.- Dos. |
| 4.- Ninguna. | 9.- Una. |
| 5.- Una. | 10.- Una. |

AUTOEVALUACIÓN 3.

- | | |
|----------------|----------------------------|
| 1.- $c=43.59$ | 7.- $B=137^\circ 52' 25''$ |
| 2.- $a=5.83$ | 8.- $C=106^\circ 11' 29''$ |
| 3.- $b=435.89$ | 9.- $A=69^\circ, 4' 31''$ |
| | $B=85^\circ 4' 58''$ |
| | $C=25^\circ 50' 31''$ |

4.- $c = 170.48$

5.- $A = 35^\circ 11' 2''$

6.- $C = 0^\circ$

10.- $A = 117^\circ 16' 47''$

$B = 26^\circ 23' 3''$

$C = 36^\circ 20' 10''$

11.- 1614.84 m

12.- 218.39 millas por hora,
 $229^\circ 38' 34''$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

1.- 1

2.- 2

3.- 1

4.- 3

5.- 3

6.- 1

7.- 4

8.- 1

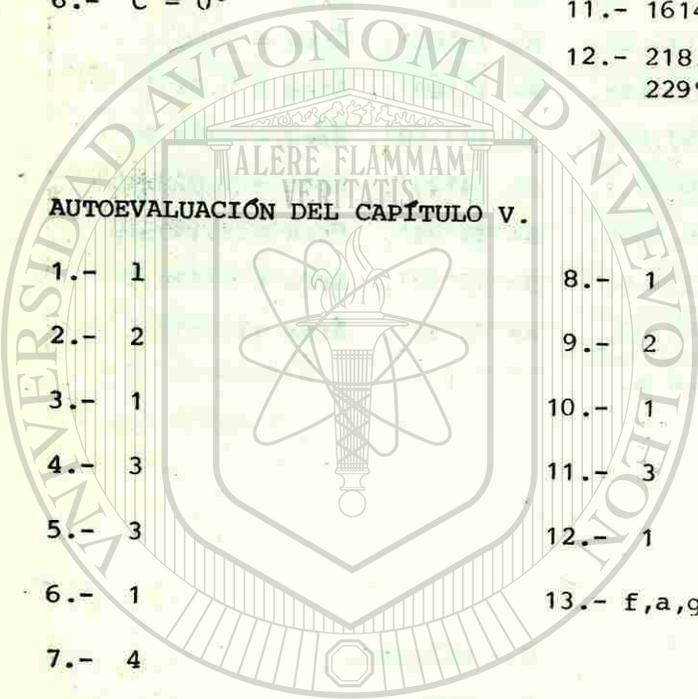
9.- 2

10.- 1

11.- 3

12.- 1

13.- f, a, g, e, d



CAPITULO 6. LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

6-1 INTRODUCCIÓN.

En la antigüedad, los matemáticos no consideraban a los números negativos. La razón era simple, puesto que en aquellos tiempos, los únicos números que habían eran los números naturales (enteros positivos) y los usaban para contar sus pertenencias, propiedades, etc. Posteriormente, a través de la idea de dirección nacen los números enteros negativos. Así, después vinieron el nacimiento de los números fraccionarios y los números que no podían ser expresados como una decimal exacta y que su resultado no era un número periódico (números irracionales). Al final todos estos números se unieron para formar el conjunto de "LOS NÚMEROS REALES".

4.- $c = 170.48$

5.- $A = 35^\circ 11' 2''$

6.- $C = 0^\circ$

10.- $A = 117^\circ 16' 47''$

$B = 26^\circ 23' 3''$

$C = 36^\circ 20' 10''$

11.- 1614.84 m

12.- 218.39 millas por hora,
 $229^\circ 38' 34''$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

1.- 1

2.- 2

3.- 1

4.- 3

5.- 3

6.- 1

7.- 4

8.- 1

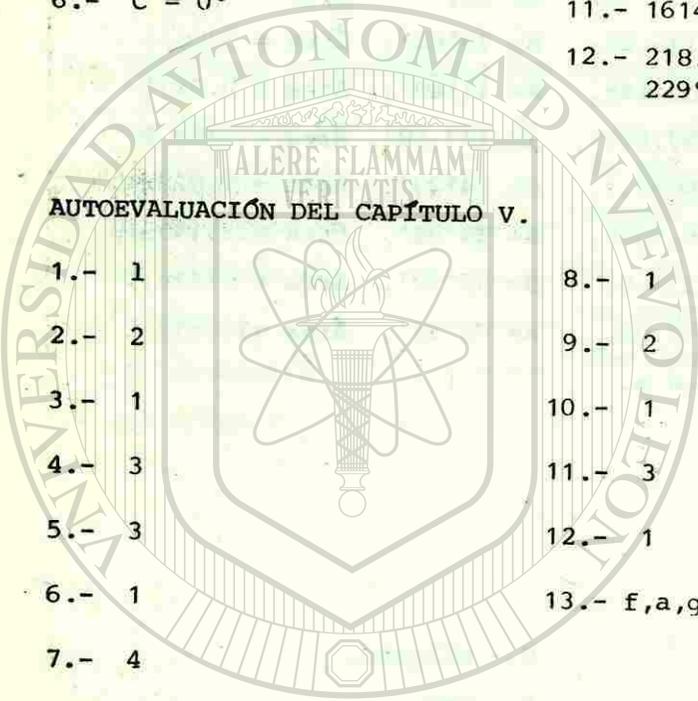
9.- 2

10.- 1

11.- 3

12.- 1

13.- f, a, g, e, d



CAPITULO 6. LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

6-1 INTRODUCCIÓN.

En la antigüedad, los matemáticos no consideraban a los números negativos. La razón era simple, puesto que en aquellos tiempos, los únicos números que habían eran los números naturales (enteros positivos) y los usaban para contar sus pertenencias, propiedades, etc. Posteriormente, a través de la idea de dirección nacen los números enteros negativos. Así, después vinieron el nacimiento de los números fraccionarios y los números que no podían ser expresados como una decimal exacta y que su resultado no era un número periódico (números irracionales). Al final todos estos números se unieron para formar el conjunto de "LOS NÚMEROS REALES".

La invención de los números negativos dió lugar a un nuevo problema para los matemáticos antiguos, y era que, había ecuaciones que no podían ser investigadas en el campo de los números reales, tales como por ejemplo, la ecuación: $x^2 + 1 = 0$. Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales ya que, al resolverla, tenemos que:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm \sqrt{-1} ; \end{aligned}$$

vemos que, el cuadrado de cualquier número real nunca es negativo, y en nuestro caso si lo es. Incluso el gran matemático René Descartes, dijo que tales raíces eran imaginarias, puesto que habría que considerarlas sobre la escala numérica. Cincuenta años después de la muerte de Descartes, la invención de una nueva clase de números hizo posible trabajar con aquellos números conocidos como "imaginarios".

Por último, al estudiar estos conjuntos de números conjuntamente surgió el estudio de "LOS NÚMEROS COMPLEJOS".

6-2 LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Antes de ver cómo se representan los números complejos, daremos las siguientes definiciones:

Números imaginarios puros. La raíz cuadrada de un número negativo, como por ejemplo $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-9}$; recibe el nombre de número imaginario puro.

La forma de representar a las raíces cuadradas de números negativos, se hace mediante el símbolo i , que significa $\sqrt{-1}$. Así, por definición, tenemos que, en los ejemplos anteriores:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i$$

Esta forma de adoptar a las raíces cuadradas de números negativos es la normal para expresar a estos números.

La propiedad del símbolo i , es que al elevarla a la segunda, tercera y cuarta potencia, tenemos que:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = (\sqrt{-1})^2 \sqrt{-1} = (-1)(\sqrt{-1}) = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1$$

Si nosotros siguiéramos elevando a otras potencias, se repetirían los mismos valores i , -1 , $-i$, 1 .

El operar correctamente con esta forma, a estos números imaginarios, nos evita la posibilidad de cometer ciertos errores comunes. Así,

$$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = (\sqrt{-1})(\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}) = i\sqrt{36} = 6i,$$

pero $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} \neq \sqrt{36}$;

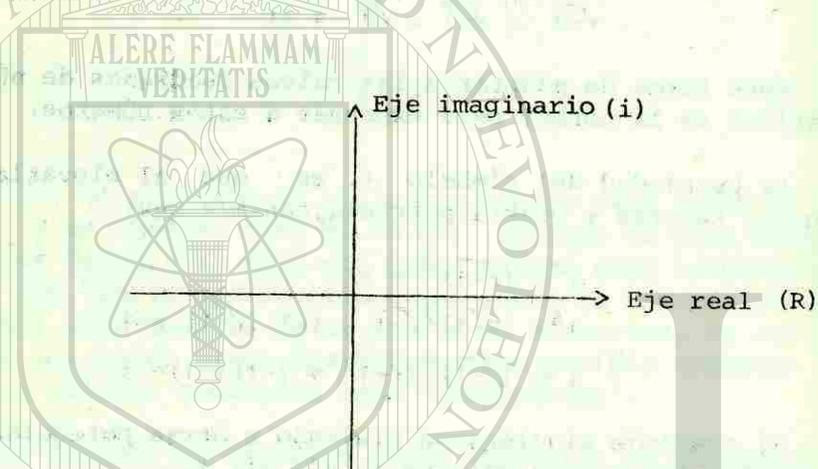
lo correcto es: $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}) = i^2 \sqrt{36} = -6$

Los números complejos. Un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, recibe el nombre de número complejo; donde el primer término es la parte real (a), y el segundo término es la parte imaginaria pura (bi).

6-3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO.

La forma de graficar los números complejos es análoga a la que se utiliza para graficar parejas ordenadas (x,y) en un sistema rectangular de coordenadas.

Los números complejos se representan por la pareja ordenada (a,b) .



En la figura, el eje horizontal representa a los números reales o eje real; el eje vertical representa a los números imaginarios o eje imaginario y el plano que forman los dos ejes, se le denomina plano complejo.



En la figura anterior, tenemos el punto P que representa la gráfica del número complejo $6 + 4i$. En el punto 0 se encuentran las coordenadas $(0,0)$ y representa al número complejo $0 + 0i$. Todos los puntos situados en el eje horizontal tienen coordenadas de la forma $(a,0)$ y corresponden a los números reales $a + 0i = a$; por esta razón al eje horizontal se le llama eje real. Todos los puntos situados sobre el eje vertical, tienen coordenadas de la forma $(0,b)$ y corresponden a los números imaginarios puros $0 + bi = bi$.

6-4 RECORDANDO LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Como ya se vió anteriormente en un curso de álgebra las operaciones con los números complejos, veremos en esta sección un repaso general de dichas operaciones con el fin de que el estudiante las recuerde.

Adición. Para sumar dos números complejos, se suman, separadamente, sus partes reales y sus partes imaginarias puras.

EJEMPLO 1.

$$\begin{aligned}(3+2i)+(5-4i) &= (3+5)+(2-4)i \\ &= 8 - 2i\end{aligned}$$

Sustracción. Para restar dos números complejos, se restan, separadamente sus partes reales y sus partes imaginarias puras.

EJEMPLO 2.

$$\begin{aligned}(8+4i)-(3-2i) &= (8-3)+[4-(-2)]i \\ &= 5 + (4+2)i \\ &= 5 + 6i\end{aligned}$$

Multiplicación. Para multiplicar dos números complejos, se efectúa la multiplicación como si fueran dos binomios algebraicos corrientes, y se sustituye el valor de i^2 por su correspondiente que es -1 .

EJEMPLO 3.

$$\begin{aligned}(5+2i)(-3-2i) &= (5)(-3) + (5)(-2i) + (2i)(-3) + (2i)(-2i) \\ &= -15 - 10i - 6i - 4i^2 \\ &= -15 - 10i - 6i + 4 \\ &= -11 - 16i\end{aligned}$$

División. Para dividir dos números complejos, se multiplican el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

EJEMPLO 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} \\ &= \frac{1+2i-1}{1-(-1)} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i\end{aligned}$$

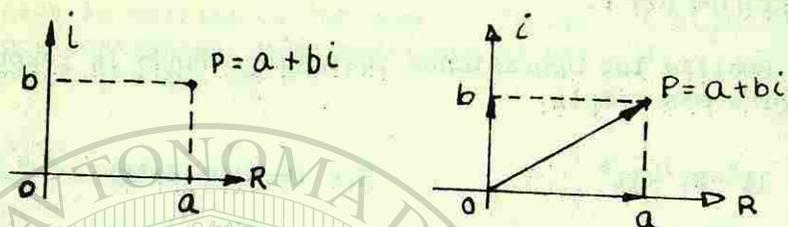
AUTOEVALUACIÓN 1.

Realiza las operaciones indicadas, dando la respuesta en su forma más simple.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1.- $3i^8 - 2i^3 - 4i^6$ | 9.- $(6-2i) + (2+3i)$ |
| 2.- $\sqrt{-4}$ | 10.- $(4-2i) - (2+3i)$ |
| 3.- $\sqrt{-11}$ | 11.- $\frac{3-2i}{3-4i}$ |
| 4.- $6i^3 + 2i^{16} - 6i^{23}$ | 12.- $(2-i)^2$ |
| 5.- $(3+4i) + (5-3i)$ | 13.- $(2+\sqrt{-5})(3-2\sqrt{-4})$ |
| 6.- $(5+7i) - (6+3i)$ | 14.- $(1+2\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3})$ |
| 7.- $4i(6i-7)$ | 15.- $(2+3i)(3+2i)$ |
| 8.- $(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)$ | 16.- $2i(3+4i)$ |
| | 17.- $\frac{2+3i}{1+i}$ |
| | 18.- $(1+i)^2(2+3i)$ |

6-5 LAS DOS FORMAS DE REPRESENTAR A UN NÚMERO COMPLEJO.

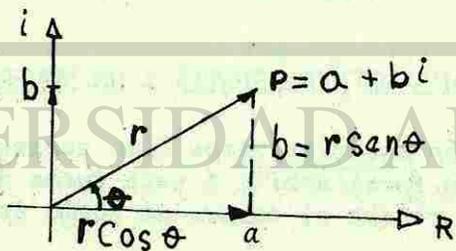
En la sección anterior vimos cómo representar a un número complejo de la forma $a+bi$. A esta forma de representar al número complejo, recibe el nombre de *forma rectangular*.



Todo número complejo se puede representar en el plano complejo no solamente mediante un punto P, como lo muestra la figura de la izquierda, sino también mediante un segmento de recta dirigida o vector OP, como lo muestra la figura de la derecha.

Bajo este nuevo sistema, $a+bi$ no representa la longitud del vector, sino indica los dos movimientos rectangulares necesarios para localizar el punto extremo del vector. Así pues, en este sistema, un número complejo está representado por un vector, no solamente por la longitud de dicho vector, sino por su longitud y dirección, determinados por los dos movimientos en ángulo recto.

Ahora, consideremos el número complejo $a+bi$ representado por el vector OP.



para determinar la longitud del vector "r", hacemos uso del teorema de Pitágoras, quedándonos:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

También observamos que, por trigonometría, la forma de relacionar los lados a y b y el radio vector, es mediante las funciones seno, coseno y tangente para el ángulo θ .

$$\text{Sen}\theta = b/r, \quad \text{Cos}\theta = a/r, \quad \text{Tan}\theta = b/a;$$

entonces, podemos determinar las partes real e imaginaria en términos del radio vector r y θ , quedándonos:

$$a = r \text{Cos}\theta, \quad b = r \text{Sen}\theta;$$

luego un número complejo de la forma $a+bi$, lo podemos representar también en otra forma donde intervienen "r" y θ :

$$\begin{aligned} a+bi &= (r \text{Cos}\theta) + (r \text{Sen}\theta) i \\ &= r(\text{Cos}\theta + i \text{Sen}\theta) \end{aligned}$$

La expresión $r(\text{Cos}\theta + i \text{Sen}\theta)$ se denomina la forma polar o trigonométrica, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el módulo y θ es llamado argumento o fase, se escoge generalmente, como el menor ángulo positivo tal que, $\tan \theta = b/a$.

Por consiguiente, conociendo a y b siempre se pueden determinar r y θ y viceversa. Llamaremos a "r" y " θ " las coordenadas polares del punto para distinguirlas de las coordenadas rectangulares.

A continuación se resuelven varios problemas para que el estudiante visualice un tanto mejor las dos formas de representar a un número complejo.

EJEMPLO 1.

Expresar el número complejo $1 - i\sqrt{3}$ en forma polar.

SOLUCIÓN:

Nótese que éste es un complejo de la forma $a+bi$, donde $a=1$, y $b=-\sqrt{3}$. Ahora, puesto que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, tenemos que:

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$r = \sqrt{1 + 3}$$

$$r = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \text{ (ya que el radio vector siempre es positivo)}$$

Para calcular θ , primero hagamos la gráfica del número complejo a fin de determinar el cuadrante al que pertenece.

La gráfica muestra que el ángulo pertenece al cuarto cuadrante. Por $\tan\theta = b/a$, tenemos que:

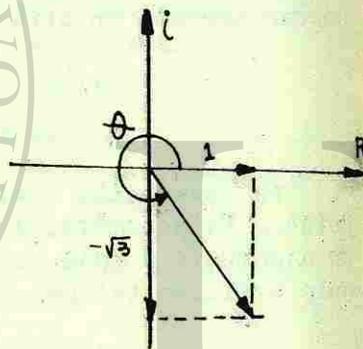
$$\tan\theta = -\sqrt{3}/1$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\theta = \text{arc. tan}(-\sqrt{3})$$

$$\theta = 360^\circ - 60^\circ$$

$$\theta = 300^\circ$$



Sustituyendo estos valores de "r" y " θ " en $a = r \cos\theta$ y $b = r \sin\theta$, se tiene:

$$a = 2 \cos 300^\circ$$

$$b = 2 \sin 300^\circ$$

después, sustituyendo estos valores en $a+bi$, se tiene:

$$a + bi = r (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

EJEMPLO 2.

Expresar el número complejo $8(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ en forma rectangular.

SOLUCIÓN:

Nótese que este es un número complejo de la forma $r(\cos\theta + i \sin\theta)$, donde el módulo es $r=8$ y el argumento es $\theta = 210^\circ$. Graficando vemos que nos queda en el tercer cuadrante.

Ahora, encontremos los valores de las partes real e imaginaria por $a = r \cos\theta$ y $b = r \sin\theta$.

$$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ$$

$$= -\sqrt{3}/2$$

entonces:

$$a = 8 \cos 210^\circ$$

$$a = 8(-\sqrt{3}/2)$$

$$a = -4\sqrt{3}$$

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$$

$$= -1/2$$

entonces:

$$b = 8 \sin 210^\circ$$

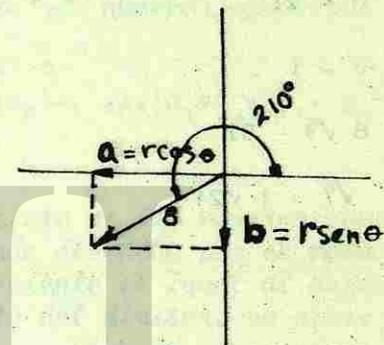
$$b = 8(-1/2)$$

$$b = -4$$

Sustituyendo estos valores de "a" y "b" en la forma $a+bi$, nos queda:

$$r(\cos\theta + i \sin\theta) = a + bi$$

$$8(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -4\sqrt{3} - 4i$$



AUTOEVALUACIÓN 2.

Expresar cada uno de los siguientes problemas ya sea en forma polar o rectangular, según sea el caso.

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1.- $1 + i$ | 8.- $-2 + i$ |
| 2.- $4 + 0i$ | 9.- $-7 - 24i$ |
| 3.- $2 - 2i\sqrt{3}$ | 10.- $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ |
| 4.- $0 + 2i$ | 11.- $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ |
| 5.- $0 - i$ | 12.- $5(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ |
| 6.- $8\sqrt{3} - 8i$ | 13.- $6(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ |
| 7.- $\sqrt{7} - i\sqrt{21}$ | 14.- $\cos 128^\circ + i \sin 128^\circ$ |

6-6 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR.

En esta sección veremos las demostraciones de la multiplicación y división de números complejos en forma polar.

Multiplicación. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos y el argumento del producto es la suma de sus argumentos, es decir:

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración.

Sean los números complejos $(a+bi)$ y $(c+di)$ de tal manera que:

$$a+bi = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$c+di = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

efectuando la multiplicación de los números complejos, tendremos:

$$\begin{aligned} (a+bi)(c+di) &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Del mismo modo, el producto de "n" números complejos es tá dado por:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots r_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

División. El módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido por el módulo del divisor, y el argumento del cociente es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor, es decir:

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demostración.

Partimos de considerar que:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)}$$

si multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, que es $(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$, nos queda:

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} =$$

$$= \frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2 (\cos^2 \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2)}$$

reordenando y sustituyendo el valor de i^2 por -1 , nos queda:

$$\frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}$$

pero, por identidades, nos queda:

$$\frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)}{r_2 (1)}$$

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Si aplicamos estos principios, la multiplicación y división de números complejos expresados en forma polar puede efectuarse a simple vista.

AUTOEVALUACIÓN 3.

Realiza las siguientes operaciones en forma polar.

1.- $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \cdot 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

2.- $\frac{4}{3\sqrt{3} - 3i}$

3.- $3i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

4.- $(3 - 3i)(4 - 4i)$

5.- $\frac{21 (\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)}{3 (\cos 93^\circ + i \sin 93^\circ)}$

6.- $\frac{6 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)}{3 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}$

7.- $(4/3)^i$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

1.- Un número de la forma $a + bi$ se denomina:

- 1) Número real. 2) Número complejo.
3) Número ficticio. 4) Número imaginario.

Desarrolla las operaciones indicadas, dando el resultado en la forma $a + bi$.

2.- $(4 + \sqrt{-1}) - (6 + \sqrt{-2})$

- 1) $\sqrt{3} - 3i$ 2) $3 + i\sqrt{3}$
3) $3 - i\sqrt{3}$ 4) $-2 + (1 - \sqrt{2})i$

3.- $(5 + \sqrt{-12}) + (2 + \sqrt{-27})$

- 1) $7 + 5i\sqrt{3}$ 2) $3 - i\sqrt{3}$
3) $7 + i\sqrt{3}$ 4) $7 - i\sqrt{3}$

4.- $\frac{4 + 6i}{2}$

- 1) $\frac{8 + 6i}{4}$ 2) $2 + 3i$

- 3) $\frac{4 + 12i}{4}$ 4) $8 + 12i$

5.- $(5 + 4i)(-4i + 5)$

- 1) $-40 + 41i$ 2) $40 + 41i$
3) 41 4) $41 - 40i$

Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

6.- $3 + 4i$

- 1) $(\cos 53^\circ 10' + i \operatorname{sen} 53^\circ 10')$
2) $5(\cos 36^\circ 50' + i \operatorname{sen} 36^\circ 50')$
3) $5(\cos 53^\circ 7' 48'' + i \operatorname{sen} 53^\circ 7' 48'')$
4) $(\cos 36^\circ 50' + i \operatorname{sen} 36^\circ 50')$

7.- $2\sqrt{3} - 2i$

- 1) $4(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$
2) $4(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)$
3) $2(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$
4) $\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ$

8.- Expresa en forma rectangular el siguiente número complejo: $8(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$

- 1) $2 + 2i\sqrt{3}$ 2) $1 + i\sqrt{3}$
3) $4 + 4i\sqrt{3}$ 4) $5 - \sqrt{3}i$

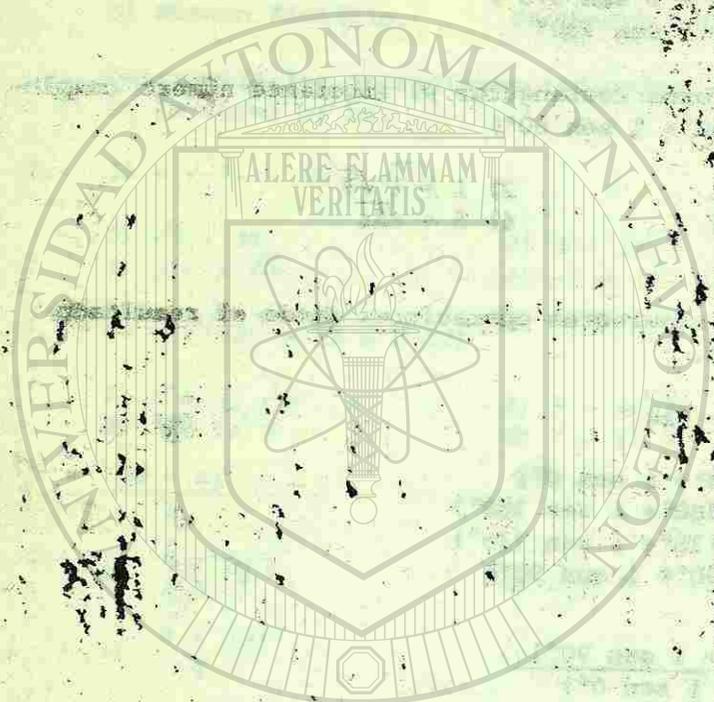
Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado en la forma polar.

9.- $(3 + 4i)(3 - 4i)$

- 1) $25(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$
2) $5(\cos 360^\circ + i \operatorname{sen} 360^\circ)$
3) $18(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$
4) $25(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

10.- $\frac{4(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)}{2(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)}$

- 1) $2(\cos -90^\circ - i \operatorname{sen} 90^\circ)$
2) $2(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$
3) $2(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$
4) $\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO VI.

AUTOEVALUACIÓN 1.

- | | |
|------------------|--|
| 1.- $7 + 2i$ | 10.- $2 - 5i$ |
| 2.- $2i$ | 11.- $17/25 + (6/25)i$ |
| 3.- $i\sqrt{11}$ | 12.- $3 - 4i$ |
| 4.- 2 | 13.- $(6+4\sqrt{5}) + (3\sqrt{5} - 25)i$ |
| 5.- $8 + i$ | 14.- $8 + (3\sqrt{3})i$ |
| 6.- $-1 + 4i$ | 15.- $13i$ |
| 7.- $-24 - 28i$ | 16.- $-8 + 6i$ |
| 8.- 11 | 17.- $5/2 + (1/2)i$ |
| 9.- $8 + i$ | 18.- $-6 + 4i$ |

AUTOEVALUACIÓN 2.

- $\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
- $4 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$
- $4 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- $2 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$
- $(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$
- $16 (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$
- $2\sqrt{7} (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- $\sqrt{5} (\cos 153^\circ 26' 6'' + i \sin 153^\circ 26' 6'')$
- $25 (\cos 253^\circ 44' 23'' + i \sin 253^\circ 44' 23'')$
- $\sqrt{3} + i$
- $-1 + i$
- $-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$
- $-6i$

$$14.- -0.6157 + 0.7880 i$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

- 1.- $6 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
- 2.- $2/3 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- 3.- $12 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
- 4.- $24 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$
- 5.- $7 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- 6.- $2 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
- 7.- $4/3 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

- | | |
|-------|--------|
| 1.- 2 | 6.- 3 |
| 2.- 4 | 7.- 2 |
| 3.- 1 | 8.- 3 |
| 4.- 3 | 9.- 1 |
| 5.- 3 | 10.- 2 |

A P É N D I C E.

RESUMEN DE FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

Fórmulas para un ángulo.

$$\sin A = \frac{1}{\csc A} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A \qquad \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$$

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A \qquad \sin(90^\circ + A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A \qquad \cos(90^\circ + A) = -\sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A \qquad \tan(90^\circ + A) = -\cot A$$

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A \qquad \sin(180^\circ + A) = -\sin A$$

$$\cos(180^\circ - A) = -\cos A \qquad \cos(180^\circ + A) = -\cos A$$

$$\tan(180^\circ - A) = -\tan A \qquad \tan(180^\circ + A) = \tan A$$

$$\sin(270^\circ - A) = -\cos A \qquad \sin(-A) = -\sin A$$

$$\cos(270^\circ - A) = -\sin A \qquad \cos(-A) = \cos A$$

$$\tan(270^\circ - A) = \cot A \qquad \tan(-A) = -\tan A$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$$

$$14.- -0.6157 + 0.7880 i$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

- 1.- $6 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$
- 2.- $2/3 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- 3.- $12 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$
- 4.- $24 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$
- 5.- $7 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- 6.- $2 (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$
- 7.- $4/3 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

- | | |
|-------|--------|
| 1.- 2 | 6.- 3 |
| 2.- 4 | 7.- 2 |
| 3.- 1 | 8.- 3 |
| 4.- 3 | 9.- 1 |
| 5.- 3 | 10.- 2 |

A P É N D I C E.

RESUMEN DE FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

Fórmulas para un ángulo.

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\operatorname{csc} A} \qquad \operatorname{csc} A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

$$\operatorname{cos} A = \frac{1}{\operatorname{sec} A} \qquad \operatorname{sec} A = \frac{1}{\operatorname{cos} A}$$

$$\operatorname{tan} A = \frac{1}{\operatorname{cot} A} \qquad \operatorname{cot} A = \frac{1}{\operatorname{tan} A}$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cos} A} = \operatorname{tan} A \qquad \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A} = \operatorname{cot} A$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ - A) = \operatorname{cos} A \qquad \operatorname{sen}(90^\circ + A) = \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{cos}(90^\circ - A) = \operatorname{sen} A \qquad \operatorname{cos}(90^\circ + A) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{tan}(90^\circ - A) = \operatorname{cot} A \qquad \operatorname{tan}(90^\circ + A) = -\operatorname{cot} A$$

$$\operatorname{sen}(180^\circ - A) = \operatorname{sen} A \qquad \operatorname{sen}(180^\circ + A) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{cos}(180^\circ - A) = -\operatorname{cos} A \qquad \operatorname{cos}(180^\circ + A) = -\operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{tan}(180^\circ - A) = -\operatorname{tan} A \qquad \operatorname{tan}(180^\circ + A) = \operatorname{tan} A$$

$$\operatorname{sen}(270^\circ - A) = -\operatorname{cos} A \qquad \operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{cos}(270^\circ - A) = -\operatorname{sen} A \qquad \operatorname{cos}(-A) = \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{tan}(270^\circ - A) = \operatorname{cot} A \qquad \operatorname{tan}(-A) = -\operatorname{tan} A$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{cos}^2 A = 1$$

$$\operatorname{sec}^2 A = 1 + \operatorname{tan}^2 A$$

$$\operatorname{csc}^2 A = 1 + \operatorname{cot}^2 A$$

$$\operatorname{sen} A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}$$

$$\operatorname{sec} A = \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan A = \pm \sqrt{\operatorname{sec}^2 A - 1}$$

$$\operatorname{csc} A = \pm \sqrt{1 + \cot^2 A}$$

$$\cot A = \pm \sqrt{\operatorname{csc}^2 A - 1}$$

El signo es + ó -, según el cuadrante en que se halle A.

Valores numéricos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos.

ÁNGULO	SENO	COSENO	TANGENTE
0°	0	1	0
30°	1/2	(1/2)√3	(1/3)√3
45°	(1/2)√2	(1/2)√2	1
60°	(1/2)√3	1/2	√3
90°	1	0	no definido

Fórmulas para la resolución de triángulos planos.

Ley de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Ley de los cosenos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Medidas angulares.

Medida sexagesimal. 60 segundos (") = 1 minuto (')

60 minutos = 1 grado (°)

90 grados = 1 ángulo recto.

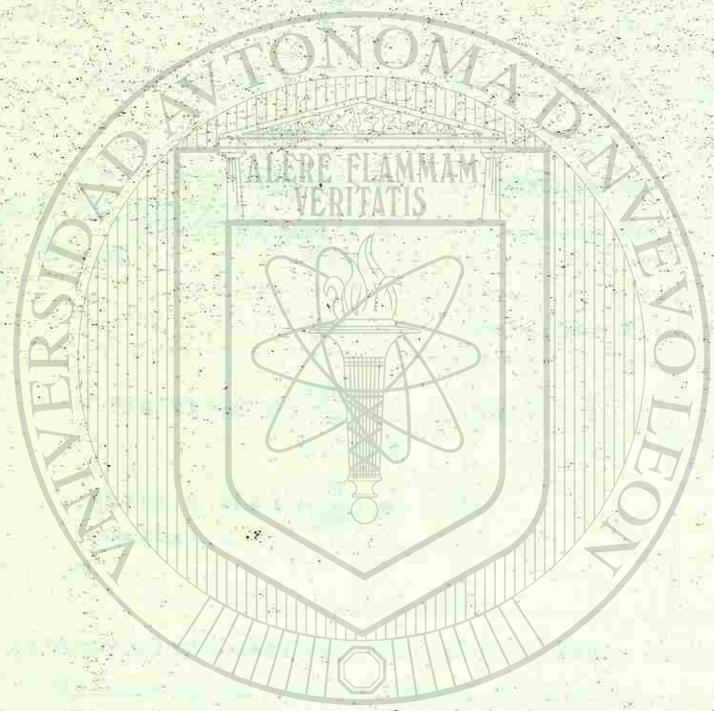
Medida en radianes. π radianes = 180°

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.01745 \text{ radianes}$$

Signos y valores numéricos de las funciones trigonométricas.

Cuadrante en el que se halla el ángulo	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Funciones (y sus recíprocas) que son positivas	todas	sen	tan	cos



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DIRECCIÓN GENERAL D

I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE RADIANES

Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
0° 0'	.0000	.0000	—	.0000	—	1.0000	1.0000	1.5708	90° 0'
10'	.029	.029	343.8	.029	343.8	.000	.000	679	50'
20'	.058	.058	171.9	.058	171.9	.000	.000	650	40'
30'	.087	.087	114.6	.087	114.6	1.000	1.0000	1.5621	30'
40'	.116	.116	85.95	.116	85.94	.000	.09999	593	20'
50'	.145	.145	68.75	.145	68.75	.000	.999	563	10'
1° 0'	.0175	.0175	57.30	.0175	57.29	1.000	.9998	1.5533	89° 0'
10'	.204	.204	49.11	.204	49.10	.000	.998	504	50'
20'	.233	.233	42.98	.233	42.96	.000	.997	473	40'
30'	.262	.262	38.20	.262	38.19	1.000	.9997	1.5446	30'
40'	.291	.291	34.38	.291	34.37	.000	.996	447	20'
50'	.320	.320	31.26	.320	31.24	.001	.995	388	10'
2° 0'	.0349	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	1.5359	88° 0'
10'	.378	.378	26.45	.378	26.43	.001	.993	330	50'
20'	.407	.407	24.56	.407	24.54	.001	.992	301	40'
30'	.0436	.0436	22.93	.0437	22.90	1.001	.9990	1.5272	30'
40'	.465	.465	21.49	.466	21.47	.001	.989	243	20'
50'	.495	.494	20.23	.495	20.21	.001	.988	213	10'
3° 0'	.0523	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	1.5184	87° 0'
10'	.553	.552	18.10	.553	18.07	.002	.985	153	50'
20'	.582	.581	17.20	.582	17.17	.002	.983	126	40'
30'	.0611	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981	1.5097	30'
40'	.640	.640	15.64	.641	15.60	.002	.980	068	20'
50'	.669	.669	14.96	.670	14.92	.002	.978	039	10'
4° 0'	.0698	.0698	14.34	.0699	14.30	1.002	.9976	1.5010	86° 0'
10'	.727	.727	13.76	.729	13.73	.003	.974	1.4981	50'
20'	.756	.756	13.23	.758	13.20	.003	.971	952	40'
30'	.0785	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969	1.4923	30'
40'	.814	.814	12.29	.816	12.25	.003	.967	803	20'
50'	.844	.843	11.87	.846	11.83	.004	.964	664	10'
5° 0'	.0872	.0872	11.47	.0873	11.43	1.004	.9962	1.4835	85° 0'
10'	.902	.901	11.10	.904	11.06	.004	.959	706	50'
20'	.931	.929	10.76	.934	10.71	.004	.957	777	40'
30'	.0960	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954	1.4748	30'
40'	.980	.9787	10.13	.982	10.08	.005	.951	719	20'
50'	.1018	.1016	9.839	.1022	9.788	.005	.948	690	10'
6° 0'	.1045	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	1.4661	84° 0'
10'	.076	.074	9.309	.080	9.255	.006	.942	632	50'
20'	.105	.103	9.065	.110	9.010	.006	.939	603	40'
30'	.1134	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936	1.4573	30'
40'	.164	.161	8.614	.169	8.556	.007	.932	544	20'
50'	.193	.190	8.405	.198	8.345	.007	.929	515	10'
7° 0'	.1219	.1219	8.206	.1228	8.144	1.008	.9925	1.4486	83° 0'
10'	.251	.248	8.016	.257	7.953	.008	.922	457	50'
20'	.280	.276	7.834	.287	7.770	.008	.918	428	40'
30'	.1309	.1305	7.661	.1317	7.596	1.009	.9914	1.4399	30'
40'	.338	.334	7.496	.346	7.429	.009	.911	370	20'
50'	.367	.363	7.337	.376	7.269	.009	.907	341	10'
8° 0'	.1392	.1392	7.185	.1405	7.115	1.010	.9903	1.4312	82° 0'
10'	.425	.421	7.040	.435	6.968	.010	.899	283	50'
20'	.454	.449	6.900	.465	6.827	.011	.894	254	40'
30'	.1484	.1478	6.765	.1495	6.691	1.011	.9890	1.4224	30'
40'	.513	.507	6.636	.524	6.561	.012	.886	195	20'
50'	.542	.536	6.512	.554	6.435	.012	.881	166	10'
9° 0'	.1564	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.4137	81° 0'
		Cot	Sec	Cot	Tan	Cot	Sen	Radianes	Grados

I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE RADIANES

Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	Radianes	Grados
9° 0'	1.571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.571	81° 0'
10'	600	593	277	614	197	013	872	108	50'
20'	629	622	166	644	6.084	013	868	079	40'
30'	.1658	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30'
40'	687	679	5.955	703	871	014	858	1.4021	20'
50'	716	708	855	733	769	015	853	1.3992	10'
10° 0'	1.745	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	1.3963	80° 0'
10'	774	765	665	793	576	016	843	934	50'
20'	804	794	575	823	485	016	838	904	40'
30'	.1833	.1822	5.487	.1853	5.396	1.017	.9833	1.3875	30'
40'	862	851	403	883	309	018	827	846	20'
50'	891	880	320	914	226	018	822	817	10'
11° 0'	1.920	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	1.3803	79° 0'
10'	949	937	164	1074	5.066	019	811	759	50'
20'	978	965	089	1004	4.989	020	805	730	40'
30'	.2007	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799	1.3701	30'
40'	036	.2022	4.945	065	843	021	793	672	20'
50'	065	051	876	095	773	022	787	643	10'
12° 0'	2.093	.2079	4.810	.2126	4.705	1.022	.9781	1.3603	78° 0'
10'	123	108	745	156	638	023	775	584	50'
20'	153	136	682	186	574	024	769	555	40'
30'	.2182	.2164	4.680	.2217	4.511	1.024	.9763	1.3526	30'
40'	211	193	560	247	449	025	757	497	20'
50'	240	221	502	278	399	026	750	468	10'
13° 0'	2.276	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	1.3403	77° 0'
10'	298	278	390	339	275	027	737	410	50'
20'	327	306	326	370	219	028	730	381	40'
30'	.2356	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724	1.3352	30'
40'	385	363	232	432	113	029	717	323	20'
50'	414	391	182	462	061	030	710	294	10'
14° 0'	2.443	.2419	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	1.3203	76° 0'
10'	473	447	086	524	3.962	031	696	235	50'
20'	502	476	4.039	555	914	032	689	206	40'
30'	.2531	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681	1.3177	30'
40'	560	532	950	617	821	034	674	148	20'
50'	589	560	906	648	776	034	667	119	10'
15° 0'	2.611	.2588	3.864	.2679	3.732	1.035	.9659	1.3003	75° 0'
10'	647	616	822	711	689	036	652	061	50'
20'	676	644	782	742	647	037	644	032	40'
30'	.2705	.2672	3.742	.2773	3.606	1.038	.9636	1.2974	30'
40'	734	700	703	805	566	039	628	945	20'
50'	763	728	665	836	526	039	621	915	10'
16° 0'	2.794	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	1.2803	74° 0'
10'	822	784	592	899	450	041	605	886	50'
20'	851	812	556	931	412	042	596	857	40'
30'	.2880	.2840	3.521	.2962	3.376	1.043	.9588	1.2828	30'
40'	909	868	487	2994	340	044	580	799	20'
50'	938	896	453	3026	305	045	572	770	10'
17° 0'	2.970	.2924	3.420	.3057	3.271	1.046	.9563	1.2654	73° 0'
10'	996	952	388	089	237	047	555	712	50'
20'	.3025	.2979	3.266	.3153	3.172	1.048	.9537	1.2654	40'
30'	.3054	.3007	3.326	.3153	3.172	1.048	.9537	1.2654	30'
40'	083	035	295	185	140	049	528	625	20'
50'	113	062	265	217	108	050	520	595	10'
18° 0'	3.142	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	1.2506	72° 0'
10'	1042	1000	300	1074	871	051	513	566	50'
20'	1071	1028	266	1104	833	052	506	537	40'
30'	.3229	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483	1.2479	30'
40'	258	201	124	378	960	056	474	450	20'
50'	287	228	098	411	932	057	465	421	10'
19° 0'	3.316	.3256	072	.3443	2.904	1.058	.9455	1.2392	71° 0'
10'	345	283	46	476	877	059	446	363	50'
20'	374	311	3.021	508	850	060	436	334	40'
30'	.3403	.3338	2.996	.3541	2.824	1.061	.9426	1.2305	30'
40'	432	365	971	574	798	062	417	275	20'
50'	462	393	947	607	773	063	407	246	10'
20° 0'	3.491	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	1.2217	70° 0'
10'	520	448	901	673	723	065	387	188	50'
20'	549	475	878	705	699	066	377	159	40'
30'	.3578	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367	1.2130	30'
40'	607	529	833	772	651	069	356	101	20'
50'	636	557	812	805	628	070	346	072	10'
21° 0'	3.669	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	1.2043	69° 0'
10'	694	611	769	872	583	072	325	1.2014	50'
20'	723	638	749	906	560	074	315	1.1985	40'
30'	.3752	.3665	2.729	.3939	2.539	1.075	.9304	1.1956	30'
40'	782	692	709	3973	517	076	293	926	20'
50'	811	719	689	4006	496	077	283	897	10'
22° 0'	3.847	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	1.1868	68° 0'
10'	869	773	650	074	455	080	261	839	50'
20'	898	800	632	108	434	081	250	810	40'
30'	.3927	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239	1.1781	30'
40'	956	854	595	176	394	084	228	752	20'
50'	985	881	577	210	375	085	216	723	10'
23° 0'	4.024	.3907	2.559	.4245	2.356	1.086	.9205	1.1694	67° 0'
10'	1043	934	542	279	337	088	194	665	50'
20'	1072	961	525	314	318	089	182	636	40'
30'	.4102	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	.9171	1.1606	30'
40'	1131	1014	491	383	282	092	159	577	20'
50'	1160	1041	475	417	264	093	147	548	10'
24° 0'	4.201	.4067	2.459	.4445	2.246	1.095	.9135	1.1519	66° 0'
10'	1218	1094	443	487	229	096	124	490	50'
20'	1247	120	427	522	211	097	112	461	40'
30'	.4276	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100	1.1432	30'
40'	1305	1173	396	592	177	100	083	403	20'
50'	1334	1200	381	628	161	102	075	374	10'
25° 0'	4.378	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	1.1345	65° 0'
10'	1392	1253	352	699	128	105	051	316	50'
20'	1422	1279	337	734	112	106	038	286	40'
30'	.4451	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026	1.1257	30'
40'	1480	1331	309	806	081	109	013	228	20'
50'	1509	1358	295	841	066	111	.9001	199	10'
26° 0'	4.556	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	1.1170	64° 0'
10'	1567	1410	268	913	035	114	075	141	50'
20'	1596	1436	254	950	020	116	062	112	40'
30'	.4625	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949	1.1083	30'
40'	1654	1488	228	1022	1.991	119	036	054	20'
50'	1683	1514	215	1059	977	121	023	1.1025	10'
27° 0'	4.734	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0996	63° 0'

II. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE RADIANES

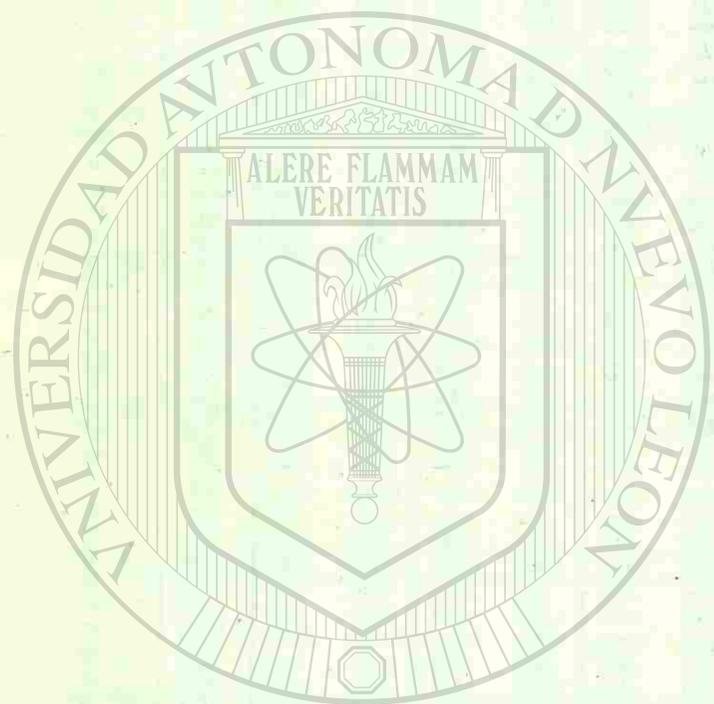
Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos	Radianes	Grados
9° 0'	1.571	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	1.571	81° 0'
10'	600	593	277	614	197	013	872	108	50'
20'	629	622	166	644	6.084	013	868	079	40'
30'	.1658	.1650	6.059	.1673	5.976	1.014	.9863	1.4050	30'
40'	687	679	5.955	703	871	014	858	1.4021	20'
50'	716	708	855	733	769	015	853	1.3992	10'
10° 0'	1.745	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	1.3963	80° 0'
10'	774	765	665	793	576	016	843	934	50'
20'	804	794	575	823	485	016	838	904	40'
30'	.1833	.1822	5.487</						

I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE RADIANES

Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
27° 0'	.4712	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	1.0000	63° 0'
10'	741	566	190	132	949	124	897	966	50'
20'	771	592	178	169	935	126	884	937	40'
30'	.4800	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870	1.0908	30'
40'	829	643	154	243	907	129	857	879	20'
50'	858	669	142	280	894	131	843	850	10'
28° 0'	.4887	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	1.0821	62° 0'
10'	916	720	118	354	868	134	816	792	50'
20'	945	746	107	392	855	136	802	763	40'
30'	.4974	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788	1.0734	30'
40'	.5003	.797	085	467	829	140	774	705	20'
50'	032	823	074	505	816	142	760	676	10'
29° 0'	.5061	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	1.0647	61° 0'
10'	091	874	052	581	792	145	732	617	50'
20'	120	899	041	619	780	147	718	588	40'
30'	.5149	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704	1.0559	30'
40'	178	950	020	656	756	151	689	530	20'
50'	207	.4975	010	735	744	153	675	501	10'
30° 0'	.5236	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	1.0472	60° 0'
10'	265	025	1.990	812	720	157	646	443	50'
20'	294	050	980	851	709	159	631	414	40'
30'	.5323	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616	1.0385	30'
40'	352	100	961	930	686	163	601	356	20'
50'	381	125	951	.5969	675	165	587	327	10'
31° 0'	.5411	.5150	1.942	.6009	1.664	1.167	.8572	1.0297	59° 0'
10'	440	175	932	048	653	169	557	268	50'
20'	469	200	923	088	643	171	542	239	40'
30'	.5498	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526	1.0210	30'
40'	527	250	905	168	621	175	511	181	20'
50'	556	275	896	208	611	177	496	152	10'
32° 0'	.5585	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	1.0123	58° 0'
10'	614	324	878	289	590	181	465	094	50'
20'	643	348	870	330	580	184	450	065	40'
30'	.5672	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434	1.0036	30'
40'	701	398	853	412	560	188	418	1.0007	20'
50'	730	422	844	453	550	190	403	.9977	10'
33° 0'	.5760	.5446	1.836	.6494	1.540	1.192	.8387	.9948	57° 0'
10'	789	471	828	536	530	195	371	919	50'
20'	818	495	820	577	520	197	355	890	40'
30'	.5847	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339	.9861	30'
40'	876	544	804	661	501	202	323	832	20'
50'	905	568	796	703	492	204	307	803	10'
34° 0'	.5934	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	.9774	56° 0'
10'	963	616	781	787	473	209	274	745	50'
20'	992	640	773	830	464	211	258	716	40'
30'	.6021	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241	.9687	30'
40'	050	688	758	916	446	216	225	657	20'
50'	080	712	751	.6959	437	218	208	628	10'
35° 0'	.6109	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	.9599	55° 0'
10'	138	760	736	046	419	223	175	570	50'
20'	167	783	729	089	411	226	158	541	40'
30'	.6196	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141	.9512	30'
40'	225	831	715	177	393	231	124	483	20'
50'	254	854	708	221	385	233	107	454	10'
36° 0'	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	54° 0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Radianes	Grados

I. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y DE RADIANES

Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
36° 0'	.6283	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	.9425	54° 0'
10'	312	901	695	310	368	239	073	396	50'
20'	341	925	688	355	360	241	056	367	40'
30'	.6370	.5948	1.681	.7400	1.351	1.244	8039	.9338	30'
40'	400	972	675	445	343	247	021	308	20'
50'	429	.5995	668	490	335	249	.8004	279	10'
37° 0'	.6458	.6018	1.662	.7536	1.327	1.252	.7986	.9250	53° 0'
10'	487	041	655	581	319	255	969	221	50'
20'	516	065	649	627	311	258	951	192	40'
30'	.6545	.6088	1.643	.7673	1.303	1.260	.7934	.9163	30'
40'	574	111	636	720	295	263	916	134	20'
50'	603	134	630	766	288	266	898	105	10'
38° 0'	.6632	.6157	1.624	.7813	1.280	1.269	.7880	.9076	52° 0'
10'	661	180	618	860	272	272	862	047	50'
20'	690	202	612	907	265	275	844	.9018	40'
30'	.6720	.6225	1.606	.7954	1.257	1.278	.7826	.8988	30'
40'	749	248	601	.8002	250	281	808	959	20'
50'	778	271	595	850	242	284	790	930	10'
39° 0'	.6807	.6293	1.589	.8098	1.235	1.287	.7771	.8901	51° 0'
10'	836	316	583	146	228	290	753	872	50'
20'	865	338	578	195	220	293	735	843	40'
30'	.6894	.6361	1.572	.8243	1.213	1.296	.7716	.8814	30'
40'	923	383	567	292	206	299	698	785	20'
50'	952	406	561	342	199	302	679	756	10'
40° 0'	.6981	.6428	1.556	.8391	1.192	1.305	.7660	.8727	50° 0'
10'	7010	450	550	441	185	309	642	698	50'
20'	039	472	545	491	178	312	623	668	40'
30'	.7069	.6494	1.540	.8541	1.171	1.315	.7604	.8639	30'
40'	098	517	535	591	164	318	585	610	20'
50'	127	539	529	642	157	322	566	581	10'
41° 0'	.7156	.6561	1.524	.8693	1.150	1.325	.7547	.8552	49° 0'
10'	185	583	519	744	144	328	528	523	50'
20'	214	604	514	796	137	332	509	494	40'
30'	.7243	.6626	1.509	.8847	1.130	1.335	.7490	.8465	30'
40'	272	648	504	899	124	339	470	436	20'
50'	301	670	499	.8952	117	342	451	407	10'
42° 0'	.7330	.6691	1.494	.9004	1.111	1.346	.7431	.8378	48° 0'
10'	359	713	490	057	104	349	412	348	50'
20'	389	734	485	110	098	353	392	319	40'
30'	.7418	.6756	1.480	.9163	1.091	1.356	.7373	.8290	30'
40'	447	777	476	217	085	360	353	261	20'
50'	476	799	471	271	079	364	333	232	10'
43° 0'	.7505	.6820	1.466	.9325	1.072	1.367	.7314	.8203	47° 0'
10'	534	841	462	380	066	371	294	174	50'
20'	563	862	457	435	060	375	274	145	40'
30'	.7592	.6884	1.453	.9490	1.054	1.379	.7254	.8116	30'
40'	621	905	448	545	048	382	234	087	20'
50'	650	926	444	601	042	386	214	058	10'
44° 0'	.7679	.6947	1.440	.9657	1.036	1.390	.7193	.8029	46° 0'
10'	709	967	435	713	030	394	173	.7999	50'
20'	738	.6988	431	770	024	398	153	970	40'
30'	.7767	.7009	1.427	.9827	1.018	1.402	.7133	.7941	30'
40'	796	030	423	884	012	406	112	912	20'
50'	825	050	418	.9942	006	410	092	883	10'
45° 0'	.7854	.7071	1.414	1.000	1.000	1.414	.7071	.7854	45° 0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Radianes	Grados



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

BIBLIOGRAFIA

Anforii Agustín.
TRIGONOMETRIA RECTILINEA
Editorial Progreso, S.A.
México, D.F. 1973.

Alendoerfer y Oakley.
FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS UNIVERSITARIAS.
2a. Edición
Editorial Mc. Graw Hill.
México, D.F. 1975.

Arturo F. Ramírez.
TRIGONOMETRIA
1a. Edición
C.E.C.S.A.
México, D.F. 1977

Barnett Rich.
GEOMETRIA PLANA CON COORDENADAS (SERIE SCHAUM)
Editorial Mc. Graw Hill.
México, D.F. 1971.

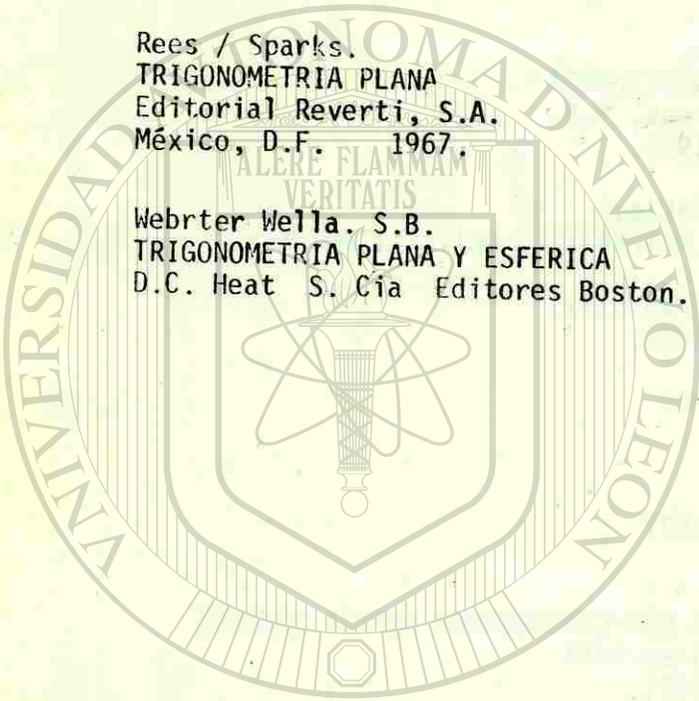
Frank Aynes Jr.
TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA (SERIE SCHAUM)
Editorial Mc. Graw Hill.
México, D.F. 1967

Hooper Griswold
TRIGONOMETRIA.
2a. Edición
Publicaciones Culturales, S.A.
México, D.F. 1967



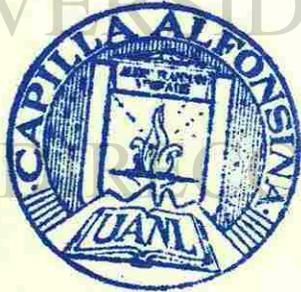
Rees / Sparks.
TRIGONOMETRIA PLANA
Editorial Reverti, S.A.
México, D.F. 1967.

Webrter Wella. S.B.
TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA
D.C. Heat S. Cia Editores Boston.



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



CIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS





U A N L

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECA