ÁREA II

Trigonometría Plana

4to. Semestre

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
ALERE FLAMMAM VERITATIS

PREPARATORIA 15
UANL

Preparatoria
Núm. 15

Trigonometría Plana • 4to. Semestre

M A T E M Á T I C A S   IV.

Ing. Miguel Angel Garza Tamez.
Ing. José Luis Guerra Torres.
Ing. Pablo Rivera Carrillo.

Í N D I C E.

		PÁG.
PRÓLOGO.--		I
CONCEPTOS PRELIMINARES.----------------------------------		i
CAP.		
I	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS.	
1-1	Introducción.----------------------------------	1
1-2	Definición de trigonometría.-------------------	2
1-3	Empleo de las tablas trigonométricas.----------	7
1-4	Dado el valor de una función, determinar las restantes.------------------------------------	12
1-5	Relaciones recíprocas.-------------------------	15
1-6	Funciones de ángulos de 30°, 45° y 60°.--------	20
1-7	Aplicación de las funciones trigonométricas.--	23
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo I.---	41
II	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS MAYORES DE 90°.	
2-1	Introducción.----------------------------------	45
2-2	Ángulos.---------------------------------------	46
2-3	Otra forma de definir las funciones trigonométricas.---------------------------------------	54
2-4	Funciones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud.----------------------------------	63
2-5	Variaciones de las funciones trigonométricas.-	90
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo II.--	97

CAP.		PÁG.
III	MEDIDAS CIRCULARES.	
3-1	Introducción.----------------------------------	103
3-2	Definición de radián.--------------------------	104
3-3	Relación entre grados y radianes.--------------	105
3-4	Ángulo central y longitud de un arco.----------	109
3-5	Velocidad angular y velocidad lineal.----------	110
3-6	Área de un sector circular.--------------------	115
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo III.-------------------------------------	119
IV	ECUACIONES IDÉNTICAS Y CONDICIONALES.	
	LECCIÓN 1. Ecuaciones Trigonométricas Idénticas.	
4-1	Introducción.----------------------------------	121
4-2	Ecuaciones.------------------------------------	121
4-3	Identidades trigonométricas fundamentales.----	122
4-4	Empleo de las relaciones fundamentales.-------	128
4-5	Demostraciones de identidades.----------------	136
	Respuestas a las autoevaluaciones de la Lección 1.---------------------------------------	143
	LECCIÓN 2. Ecuaciones Trigonométricas Condicionales.	
4-6	Introducción.----------------------------------	145
4-7	Ecuaciones trigonométricas condicionales.-----	145
	Respuestas a las autoevaluación de la Lección 2.---------------------------------------	155

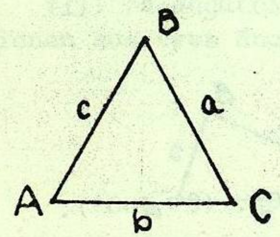
CAP.		PÁG.
V	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.	
5-1	Introducción.----------------------------------	157
5-2	Ley de los senos.------------------------------	159
5-3	Área de un triángulo.--------------------------	160
5-4	Ley de los cosenos.----------------------------	167
5-5	Resolución de los cosenos C y D por medio de triángulos semejantes.-------------------------	172
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo V.--	177
VI	LOS NÚMEROS COMPLEJOS.	
6-1	Introducción.----------------------------------	179
6-2	Los números complejos.-------------------------	180
6-3	Representación gráfica de un número complejo.	182
6-4	Recordando las operaciones con los números complejos.------------------------------------	183
6-5	Las dos formas de representar a un número complejo.--	185
6-6	Multiplicación y división en forma polar.----	190
	Respuestas a las autoevaluaciones del Capítulo VI.---	197
	APÉNDICE.--------------------------------------	199
	TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.------------------------	203
	BIBLIOGRAFÍA.----------------------------------	209

2690

CONCEPTOS PRELIMINARES.

En esta sección veremos algunos conceptos y teoremas que frecuentemente los vamos ha estar usando.

Notación. En cualquier triángulo, sus ángulos se expresarán por medio de letras mayúsculas, o bien, utilizando letras del alfabeto griego como theta (θ), gamma (γ), alfa (α), etc. Los lados del triángulo se denotarán con letras minúsculas.



$\sphericalangle A = \sphericalangle BAC$

$\sphericalangle B = \sphericalangle ABC$

$\sphericalangle C = \sphericalangle BCA$

lado a = al segmento $\overline{BC}$

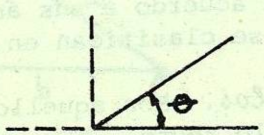
lado b = al segmento $\overline{AC}$

lado c = al segmento $\overline{AB}$

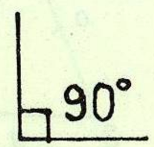
El triángulo de arriba se denota como Δ ABC.

Con respecto a los ángulos, existen los siguientes:

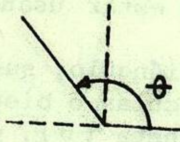
a) *Angulo agudo.* Es el menor que 90° ($\theta < 90°$).



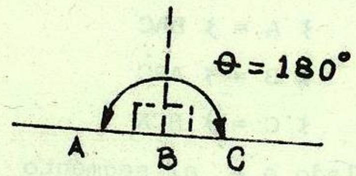
b) *Angulo recto.* Es el igual a 90° ($\theta = 90°$).



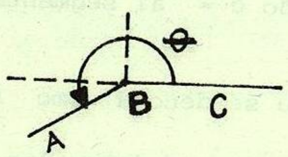
c) *Ángulo obtuso*. Es mayor que 90° pero menor que 180°. ($90° < \theta < 180°$).



d) *Ángulo llano*. Es igual a 180°. ($\theta = 180°$).

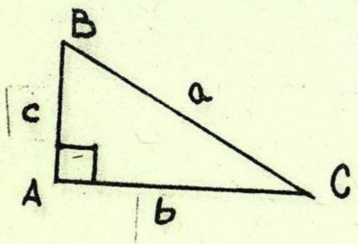


e) *Ángulo Cóncavo*. Es mayor que 180°. ($\theta > 180°$).



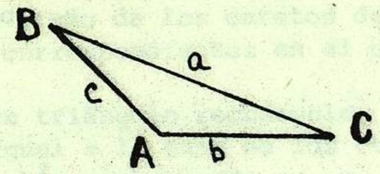
Clasificación de los triángulos. De tal suerte que, los triángulos se clasifican de acuerdo a sus ángulos o sus lados. Con respecto a sus ángulos se clasifican en:

i) *Triángulos rectángulos*. Son aquellos triángulos que tienen uno y sólo uno, ángulo recto.



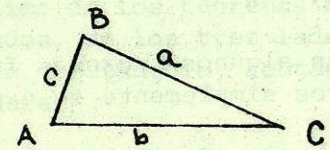
* A es recto

ii) *Triángulos obtusángulos*. Son aquellos triángulos que tienen uno y sólo uno, ángulo obtuso,



* A es obtuso

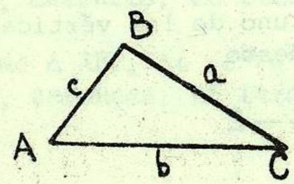
iii) *Triángulos acutángulos*. Son aquellos triángulos que tienen sus tres ángulos agudos.



* A,B y C son agudos

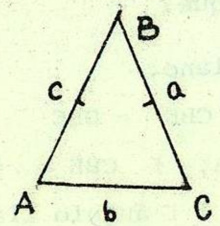
De acuerdo con sus lados, los triángulos pueden ser:

i) *Triángulo escaleno*. Es aquel triángulo que no tiene sus tres lados iguales.



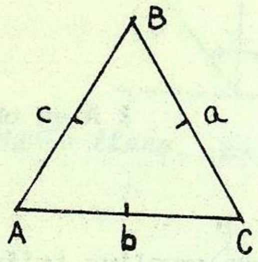
$c \neq a \neq b$

ii) *Triángulo isósceles*. Es aquel triángulo que tiene al menos dos de sus tres lados iguales.



$a = c$

iii) *Triángulo equilátero.* Es aquel triángulo que tiene sus tres lados iguales.



$a = b = c$

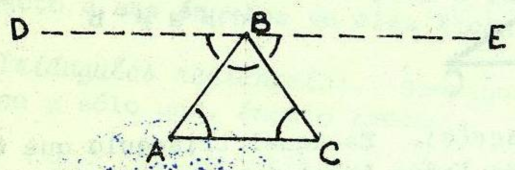
Algunos teoremas fundamentales.

A continuación se enumeran algunos teoremas fundamentales, demostrando algunos y otros simplemente se expondrán.

1) La suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano ($A + B + C = 180°$).

Demostración:

Sea el Δ ABC. Tracemos por uno de los vértices del triángulo la paralela al lado opuesto



De aquí se puede observar que:

a) El $\measuredangle$ DBE = 1 ángulo llano.

b) $\measuredangle$ DBA + $\measuredangle$ ABC + $\measuredangle$ CBE = DBE

Pero como el $\measuredangle$ DBA = $\measuredangle$ A, $\measuredangle$ CBE = $\measuredangle$ C, tenemos que:

$$A + B + C = 1 \text{ ángulo llano}$$
$$A + B + C = 180°$$

2) Si los tres ángulos de un triángulo son iguales a los correspondientes de otro, los dos triángulos son semejantes.

3) **Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de uno de ellos son iguales a sus correspondientes en el otro.**

4) **En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ($a^2 + b^2 = c^2$), siendo $\underline{a}$ y $\underline{b}$ los catetos y $\underline{c}$ la hipotenusa.**

El último de los teoremas nos ayuda a averiguar a partir de datos dados, de los tres lados de un triángulo, cuando es un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo; de la siguiente manera:

a) *Si la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ se cumple para los tres lados de un triángulo, entonces éste es rectángulo; en cambio, si $c^2 \neq a^2 + b^2$, entonces el triángulo no es rectángulo.*

b) *En todo Δ ABC, si $c^2 < a^2 + b^2$, siendo $\underline{c}$ el mayor de los lados, entonces, el triángulo es acutángulo.*

c) *En todo Δ ABC, si $c^2 > a^2 + b^2$, siendo $\underline{c}$ el mayor de los lados, entonces, el triángulo es obtusángulo.*