

## FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS.

Con esta unidad comenzamos el estudio de la Trigonometría. La palabra trigonometría se deriva de los vocablos griegos "tri-gonos-metron", que significa "tres-ángulos-medicación". De esta suerte, en Trigonometría, se estudia la medición o resolución de triángulos dados tres elementos que no sean los tres ángulos.

En esta unidad veremos las funciones trigonométricas de ángulos agudos y aprenderás a definir las y a aplicarlas en la resolución de triángulos rectángulos y en problemas expresados en palabras. Además, veremos los valores de ángulos conocidos como lo son los de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .

Al término de esta unidad el estudiante estará en condición de:

## OBJETIVOS:

- 1.- Definir correctamente el concepto TRIGONOMETRIA PLANA.
- 2.- Definir correctamente las funciones trigonométricas para cualquier ángulo agudo.
- 3.- Usar correctamente las tablas trigonométricas para encontrar el valor numérico de cualquier función, dado el ángulo y viceversa.
- 4.- Sin usar tablas, encontrar los valores numéricos de las funciones, dado al menos el valor de una de ellas.
- 5.- Aplicar correctamente las razones recíprocas y las cofunciones a las funciones trigonométricas.

- 6.- Sin usar tablas, encontrar los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .
- 7.- Aplicar los conocimientos de trigonometría en la solución de problemas verbales que los involucren.

#### PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Antes de que empieces a resolver la unidad, te recomendamos que leas los conceptos preliminares, para que visualices la nomenclatura que vamos a usar a través del curso. Así mismo, para que logres distinguir los diferentes triángulos dependiendo de los lados o ángulos y los teoremas que vamos a aplicar.
- 2.- Para que resuelvas satisfactoriamente la unidad, estudia el capítulo I. Es importante el hecho de que sepas definir el concepto trigonometría y trates de comprenderlo. Al final del libro vienen las tablas trigonométricas que te ayudarán a resolver el objetivo 3. Ten cuidado en la forma de localizar valores de ángulos mayores de  $45^\circ$ .

Para el objetivo 4, usa el teorema de Pitágoras y un triángulo de referencia, para que coloques tus datos conocidos y encuentres el lado que falta. Te recomendamos, sepas distinguir claramente los lados opuestos y adyacentes al ángulo, para que des el valor correcto de las demás funciones por definición.

Para el objetivo 5, te recomendamos distingamos las cofunciones de las recíprocas y en particular cuida el ángulo, ya que, mientras que en las recíprocas no cambia, en las cofunciones sí. Para el objetivo 6 es cuestión que te graves los valores de los lados.

Para el objetivo 7, te recomendamos leas los pasos que se sugieren que vienen al final de la sección 7.

- 3.- Resuelve como autoevaluación de esta unidad la autoevaluación del capítulo. En caso de tener alguna duda, favor de consultarla con tu asesor.

## CAPÍTULO I.

### FUNCIÓNES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS.

#### 1-1 INTRODUCCIÓN.

El estudio de la trigonometría nació hasta el siglo XVI, como el deseo del hombre de investigar los misterios y maravillas del universo. Había servido, desde los primitivos babilónicos hasta justamente antes de Descartes, como un auxiliar puramente práctico de la agrimensura, la astronomía y la navegación. Esta ciencia les permitía calcular distancias no medibles, aplicando ciertas reglas básicas acerca de las relaciones entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo, por grande o pequeño que fuera.

Hacia el año 150 A.C., el matemático y astrónomo griego Hiparco, catalogó y localizó más de 800 estrellas, a través de esta ciencia. Más después, Menelao escribió un tratado de Trigonometría esférica. Estos dos matemáticos consideraron la trigonometría como una herramienta útil para el estudio de la astronomía.

Hacia el año 50 D.C., el astrónomo egipcio Ptolomeo en astronomía, matemática y la astronomía y trigonometría esférica un tratado llamado "Almagesto". Hasta ese momento la trigonometría se consideró como parte de la astronomía, y centró su interés en los triángulos esféricos más bien que en triángulos planos.

Hacia el año 1,500 D.C., cuando la trigonometría se in-

Resuelva como función de esta unidad la función del capítulo. En caso de tener alguna duda, consulte con el profesor.

### PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Antes de que empieces a resolver el problema, te recomendamos que leas los conceptos preliminares para que tengas una idea de los símbolos que se usarán a través de la unidad. Así mismo, para que logres distinguir los diferentes tipos de triángulos dependiendo de los lados o ángulos y soluciones que vienen a ser.
- 2.- Para que avances satisfactoriamente la unidad, estudia el capítulo 1. El importante es el hecho de que sepas distinguir el concepto de trigonometría y trata de comprender lo que se dice en el libro y cuando las tablas trigonométricas se te presenten a resolver el objetivo 3. Ten cuidado con la forma de localizar valores de ángulos mayores de 90°.
- 3.- Para el objetivo 4, usa el teorema de Pitágoras y un triángulo de referencia para que coloques tus datos conocidos y encuentres el lado que falta. Te recomendamos que dibujes claramente los lados opuestos y adyacentes al ángulo, para que encuentres el valor correcto de los datos faltantes por definición.
- 4.- Para el objetivo 5, te recomendamos distinguir los cofunciones de las razones y en particular el seno y el ángulo, ya que, mientras que en las razones no cambia, en las cofunciones sí. Para el objetivo 6 es cuestión que te graves los valores de los lados.
- 5.- Para el objetivo 7, te recomendamos leer los pasos que se sugieren que vienen al final de la sección 7.

produce en la literatura y parte considerablemente en la literatura científica. La trigonometría es una de las ciencias que más ha contribuido al progreso de la ciencia y el arte. La trigonometría contribuye al progreso de la ciencia y el arte. La trigonometría contribuye al progreso de la ciencia y el arte.

## CAPITULO 1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS.

### 1-1 INTRODUCCIÓN.

El estudio de la trigonometría nació hasta el siglo XVI, como el deseo del hombre de investigar los misterios y maravillas del universo. Había servido, desde los primitivos babilonios hasta justamente antes de Descartes, como un auxiliar puramente práctico de la agrimensura, la astronomía y la navegación. Esta ciencia les permitía calcular distancias no mensurables, aplicando ciertas reglas básicas acerca de las relaciones entre los lados y los ángulos de cualquier triángulo, por grande o pequeño que fuera.

Hacia el año 150 A.C., el matemático y astrónomo griego Hiparco, catalogó y localizó más de 800 estrellas, a través de esta ciencia. Más después, Menelao escribió un tratado de Trigonometría esférica. Estos dos matemáticos consideraron la trigonometría como una herramienta útil para el estudio de la astronomía.

Hacia el año 150 D.C., el astrónomo egipcio Ptolomeo en Alejandría, dieron a la astronomía y trigonometría esférica un tremendo impulso. Hasta ese momento la trigonometría se consideró como parte de la astronomía, y centró su interés en los triángulos esféricos más bien que en triángulos planos.

Hacia el año 1,500 D.C., cuando la trigonometría se in-

introduce en Inglaterra y particularmente en Alemania, las funciones trigonométricas se consideraron como razones, en vez de tomarse como segmentos rectilíneos y las aplicaciones de la trigonometría a la topografía vinieron a ser muy importantes. La trigonometría contribuyó al progreso de toda clase de instrumentos de medida, notablemente el teodolito y el sextante.

Hacia el siglo XVIII, la trigonometría que empezó como herramienta de la astronomía y más tarde de la topografía, llegó a ser una rama de la matemática por derecho propio.

## 1-2 DEFINICIÓN DE TRIGONOMETRÍA.

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia la medida de los tres ángulos y lados de un triángulo.

También se le ha definido a la trigonometría como la ciencia de la medida indirecta, ya que, por medio de ésta pueden ser calculadas distancias que no se pueden medir directamente, como la profundidad de un precipicio o la altura de una montaña o la distancia de la tierra a la luna.

La palabra trigonometría proviene de tres vocablos griegos que significan "tres - ángulos - medida", e indican que su tema principal de estudio está relacionado con las medidas de un triángulo

La trigonometría plana, que es la que estudiaremos en este libro, se limita a los triángulos contenidos en los planos. La trigonometría esférica estudia ciertos ángulos trazados sobre esferas.

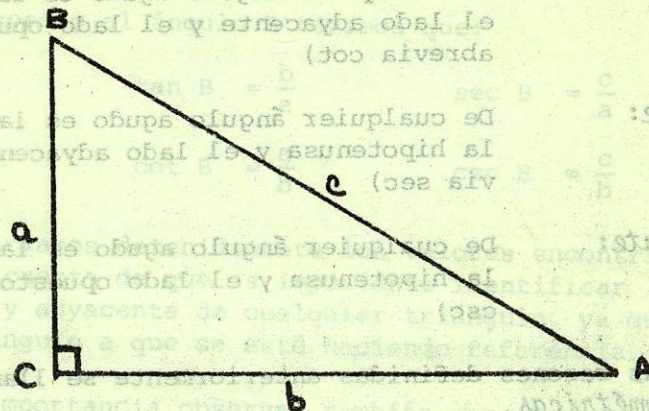
La trigonometría se originó del estudio de las relaciones de los lados de los triángulos rectángulos y luego se extendió a una variedad de triángulos.

## El triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas.

Ya conocemos el triángulo rectángulo. Sabemos que sus catetos son los lados que forman el ángulo recto, y que la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos, y conocemos el teorema de Pitágoras ( $a^2 + b^2 = c^2$ ).

Ahora veamos cómo se relacionan los lados y ángulo de un triángulo rectángulo.

Dado un triángulo rectángulo.



tenemos que, la forma en que se relacionan los lados son:

$$\frac{c}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{c}{a}$$

Cada una de estas razones recibe un nombre en especial dependiendo al ángulo que se esté haciendo referencia. Los nombres son: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Cada uno de estos nombres se definen a continuación:

**Seno:** De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado opuesto (L.O.) y la hipotenusa. (Se abrevia sen)

**Coseno:** De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado adyacente (L.A.) y la hipotenusa. (Se abrevia cos)

**Tangente:** De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado opuesto y el adyacente. (Se abrevia tan)

**Cotangente:** De cualquier ángulo agudo es la razón entre el lado adyacente y el lado opuesto. (Se abrevia cot)

**Secante:** De cualquier ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el lado adyacente. (Se abrevia sec)

**Cosecante:** De cualquier ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el lado opuesto. (Se abrevia csc)

Las razones definidas anteriormente se llaman *funciones trigonométricas*.

Por ejemplo, en el  $\Delta ABC$ , con respecto al ángulo A, tenemos que las funciones son:

$$\text{sen } A = \frac{\text{L.O. del ángulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } A = \frac{\text{L.A. del ángulo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{L.O. del ángulo}}{\text{L.A. del ángulo}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{L.A. del ángulo}}{\text{L.O. del ángulo}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{L.A. del ángulo}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{csc } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{L.O. del ángulo}} = \frac{c}{a}$$

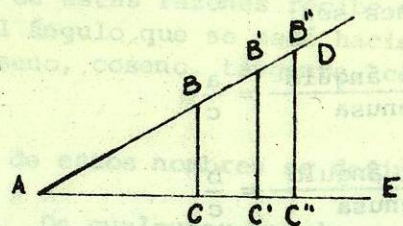
Con respecto al ángulo B tenemos que:

$$\text{sen } B = \frac{b}{c} \qquad \text{tan } B = \frac{b}{a} \qquad \text{sec } B = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos } B = \frac{a}{c} \qquad \text{cot } B = \frac{a}{b} \qquad \text{csc } B = \frac{c}{b}$$

Si observamos detenidamente los valores encontrados, nos daremos cuenta de que es importante identificar los lados opuesto y adyacente de cualquier triángulo, ya que, dependen del ángulo a que se esté haciendo referencia.

Es de importancia observar también que, los valores de las funciones trigonométricas dependen solamente de la magnitud del *ángulo*, y son completamente independientes de la longitud de los lados del triángulo rectángulo que lo contienen.



Sean B, B', B'', puntos sobre la recta AD y C, C', C'', puntos sobre la recta AE, de tal manera que las rectas BC, B'C', B''C'', sean perpendiculares a la recta AE, formando así triángulos rectángulos. Por definición, tenemos:

$$\text{sen } A = \frac{BC}{AB} ; \quad \text{sen } A = \frac{B'C'}{AB'} \quad \text{y} \quad \text{sen } A = \frac{B''C''}{AB''}$$

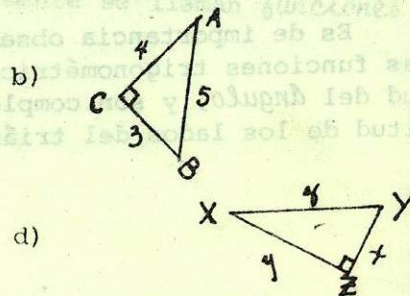
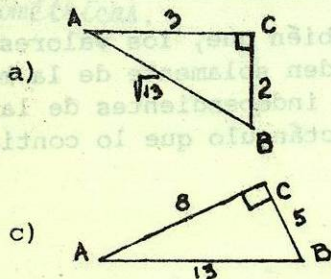
Pero como los triángulos rectángulos ABC, AB'C' y AB''C'' son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales, esto es:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}$$

Lo anterior nos dice que, los valores obtenidos para sen A son iguales.

#### AUTOEVALUACION 1.

1.- En cada uno de los siguientes triángulos, encuentra las funciones trigonométricas para los dos ángulos agudos.



### 1-3 EMPLEO DE LAS TABLAS TRIGONOMETRICAS.

En la sección anterior definimos las funciones trigonométricas en términos de sus lados, para cualquier triángulo rectángulo. Ahora, en esta sección veremos el uso y manejo de las tablas trigonométricas que nos sirven para:

- 1.- Encontrar el valor numérico de cualquier función, dado el ángulo.
- 2.- Encontrar el ángulo dado el valor numérico de la función trigonométrica.

Las tablas trigonométricas contienen los valores de las funciones de ángulos comprendidos entre 0° y 90° con intervalos regulares de diez minutos. (ver tabla al final del libro).

La forma de usar las tablas es la siguiente:

a) Si el ángulo es menor de 45°, se localiza el ángulo en la columna izquierda. Luego que se localiza el ángulo deseado se recorre la línea con la vista hasta la columna en cuya parte superior aparece la función deseada. Ahí encontrará el valor de la función deseada.

#### EJEMPLO 1.

Encontrar el valor de sen 40°10'.

SOLUCIÓN:

Buscamos primero el ángulo de 40°10' del lado izquierdo de las tablas hasta localizarlo.

Grados	Radianes	Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos
0°0'							
10'							
20'							
30'							
40'							
50'							
1°0'							
.							
.							
.							
.							
40°0'							
*10'							
20'							
30'							
40'							
50'							

Luego, siguiendo con la vista la línea del ángulo, buscamos la columna que contenga los valores de la función "seno" y donde se intersecten ambas líneas (columna de la función y línea del ángulo), ahí encontremos el valor de la función.

Grados	Radianes	*Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos
0° 0'							
10'		↓					
20'		↓					
30'		↓					
40'		↓					
50'		↓					
1° 0'		↓					
.		↓					
.		↓					
.		↓					
.		↓					
40°0'							
*10'	→	.6450					

de donde  $\text{Sen } 40^\circ 10' = 0.6450$ .

Es importante observar que en la mayor parte de las veces, la primera cifra del valor de cada función está impresa sólo para cada medio grado, por lo que, cuando se omite, debe buscarse (arriba) hasta encontrar la línea en la que la primera cifra está impresa. Dicha cifra debe incluirse en el valor determinado.

b) Si el ángulo es mayor de  $45^\circ$ , se localiza el ángulo en la columna derecha. Luego que se localiza el ángulo, se recorre la línea con la vista (de derecha a izquierda) hasta la columna en cuya parte inferior aparece la función deseada. Ahí, donde se intersectan ambas líneas, encontrará el valor numérico de la función.