EJEMPLO

Encontrar el valor de tan 72°30'.

SOLUCIÓN:

Buscamos en la columna derecha (grados) el ángulo dado (72°30'). Luego, buscamos la función tangente en la parte inferior y donde se crucen estas dos líneas, ahí encontramos el valor de tan 72°30' que es 3.172.

Es importante observar que los ángulos cuando sean mayores de 45° están ordenados crecientemente de abajo hacia arriba, por lo que se debe tener cuidado al localizar los minutos, que se deben leer en la parte superior de la columna de los grados dados y no abajo. Observe que en el ejemplo se hizo esto, es decir, una vez que se localizó los grados (72°) se buscó luego la cantidad de minutos arriba de 72° que en este caso fueron 30'.

Frecuentemente ocurre que en lugar de tener que determinar la tangente de un ángulo dado, sea necesario obtener el ángulo al cual corresponda una función dada.

Cuando el valor decimal dado aparece exactamente en una de las columnas de la función dada, ya sea a la cabeza o en su pie, sólo necesitamos leer la intersección de las columnas adecuadas, el ángulo a que corresponde.

EJEMPLO 3.

Si tan A= 3.412; determinar A.

SOLUCIÓN:

Puesto que tan A= 3.412, buscamos en las tablas, en la columna que tiene "tan", en su pie. Entonces leemos a la derecha que A = 73°40'.

Para un mejor manejo de las tablas hay que ver cómo varían los valores de las funciones trigonométricas con respecto al ángulo. Así podemos observar que, mientras el ángulo crece el valor numérico de: a) el seno crece, b) el coseno,

decrece, c) la tangente crece, d) **la cotangente decrece,** e) la secante crece y f) **la cosecante decrece.**

Se deja al alumno la comprobación de lo anterior.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Encuentre los valores numéricos de las funciones siguientes:

1.- sen 30°

2.- cos 60°

3.- tan 30°30'

4.- sec 75°20'

5.- cot 89°50'

6.- csc 13°20'

7.- cos 61°

8.- tan 80°40'

Encontrar el valor del ángulo en los siguientes problemas:

9.- sen C = 0.1478

10.- tan B = 0.4522

11.- cos X = 0.7880

12.- csc θ = 1.1880

13.- cot M= 0.4522

14.- sec X= 1.255

15.- cos A= 0.1478

16.- sen B= 0.9775

1-4 DADO EL VALOR DE UNA FUNCION, DETERMINAR LAS RESTANTES.

Frecuentemente se conoce una función de un ángulo y se desea determinar las demás funciones. Si se utilizan las definiciones es fácil determinar cualquiera de ellas sin necesidad de calcular el ángulo .

Para ello es necesario e importante que al llegar a esta sección, ya tengas bien grabadas las definiciones de las funciones, así como el de identificar ya plenamente los lados - opuesto y adyacente.

EJEMPLO 1.

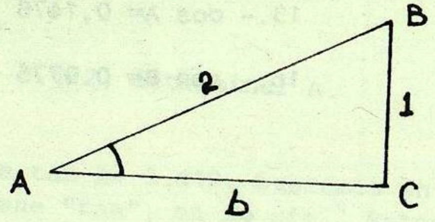
Si sen A= 1/2, determinar las demás funciones de A.

SOLUCIÓN:

Nosotros sabemos que el seno es la razón del cateto - opuesto a un ángulo agudo a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es decir:

$$\text{sen } A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

Ahora, hagamos un triángulo rectángulo de referencia donde se muestre la información dada:



Para encontrar el cateto adyacente al ángulo, hacemos uso del teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$; siendo a y b los lados y c la hipotenusa

$$(2)^2 = (1)^2 + b^2$$

$$4 = 1 + b^2$$

$$4-1 = b^2$$

$$3 = b^2$$

$$b^2 = 3$$

$$b = \sqrt{3} \quad \text{(lado adyacente)}$$

Ahora, con los valores de los lados tenemos:

L.A.= lado adyacente = $\sqrt{3}$
L.O.= lado opuesto = 1
h = hipotenusa = 2

$$\cos A = \frac{L.A.}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan A = \frac{L.O.}{L.A.} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot A = \frac{L.A}{L.O.} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec A = \frac{h}{L.A.} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\csc A = \frac{h}{L.O.} = \frac{2}{1} = 2$$

EJEMPLO 2.

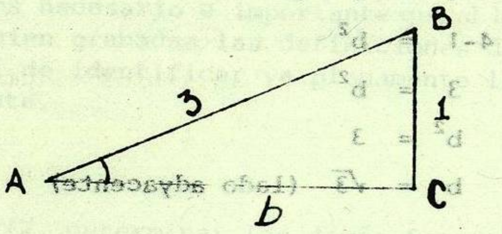
Dado csc A = 3, hallar los valores de las demás funciones de A.

SOLUCIÓN:

Para la cosecante del ángulo, tenemos por definición:

$$sc\ A = \frac{h}{L.O} = \frac{3}{1}$$

Dibujando un triángulo rectángulo de referencia.



Por el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 9 - 1$$

$$= 8$$

$$b = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

Luego, las demás funciones para el ángulo A son:

h= 3 $\qquad$ a= 1 $\qquad$ y $\quad$ b= $2\sqrt{2}$

$$\text{sen } A = \frac{1}{3}$$

$$\cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan A = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot A = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$

$$\sec A = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

AUTOEVALUACION 3.

Hallar en cada uno de los ejemplos siguientes los valores de las demás funciones trigonométricas:

1.- Si tan B = 5/12

2.- Si csc A = 5/3

3.- Si cot C = $\frac{5\sqrt{6}}{12}$

4.- Si sen X = 4/9

5.- sec Y= 17/8

6.- cos Z = $\sqrt{5}/3$

7.- csc A = 2

8.- sen B = y/x

Encuentra lo que se te pida en cada uno de los siguientes problemas:

9.- Si tan A= 4/3, hallar sen A + cos A.

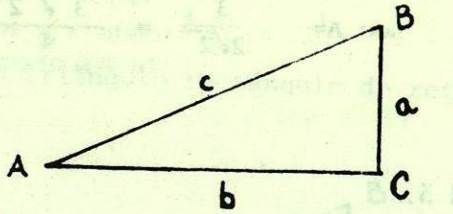
10.- Si cot A = 3/2, hallar sen A.

11.- Si cos Y= 12/13, hallar $\text{sen}^2 y + \cos^2 y$.

12.- Si sen A = y/x, hallar tan A.

1-5 RELACIONES RECIPROCAS Y COFUNCIONES.

Si analizamos detalladamente las seis funciones trigonométricas, veremos que la recíproca de la función seno es la función cosecante para el mismo ángulo; por ejemplo, para el siguiente triángulo:



tenemos que, por definición:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} \qquad y \qquad \csc A = \frac{c}{a}$$

o sea que:

$$\boxed{\text{sen } A = \frac{1}{\csc A}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\csc A = \frac{1}{\text{sen } A}}$$

del mismo modo tenemos que:

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad y \qquad \sec A = \frac{c}{b}$$

o sea:

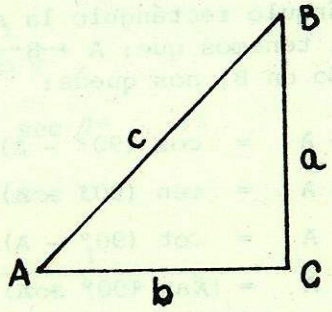
$$\boxed{\cos A = \frac{1}{\sec A}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\sec A = \frac{1}{\cos A}}$$

Es importante recalcar que *las razones recíprocas sólo son válidas respecto al mismo ángulo.*

Funciones y cofunciones.

Si dos cantidades están relacionadas de tal modo que, el valor de la primera determina unívocamente el valor de la segunda, la relación entre ellas recibe el nombre de *función;* y en particular si la segunda de ellas es una razón trigonométrica. Esta definición es válida, puesto que, para cada ángulo agudo le corresponde un valor a la razón tangente y a las demás y sólo uno.

Consideremos ahora el siguiente triángulo rectángulo:



Por definición, tenemos que:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} \qquad \text{sen } B = \frac{b}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \tan B = \frac{b}{a}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} \qquad \cot B = \frac{a}{b}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} \qquad \sec B = \frac{c}{a}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} \qquad \csc B = \frac{c}{b}$$

Si observamos detenidamente ambas funciones para A y B, veremos que:

$$\operatorname{sen} A = \cos B$$
$$\cos A = \operatorname{sen} B$$
$$\tan A = \cot B$$
$$\cot A = \tan B$$
$$\sec A = \csc B$$
$$\csc A = \sec B;$$

pero como en todo triángulo rectángulo la suma de sus ángulos agudos es igual a 90°, tenemos que: A + B = 90°, entonces B= 90° - A, que sustituido en B, nos queda:

$$\operatorname{sen} A = \cos (90° - A)$$
$$\cos A = \operatorname{sen} (90° - A)$$
$$\tan A = \cot (90° - A)$$
$$\cot A = \tan (90° - A)$$
$$\sec A = \csc (90° - A)$$
$$\csc A = \sec (90° - A)$$

De lo anterior, se deduce que, si A es el ángulo complementario de B o viceversa, entonces: *"Cualquier función de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su complemento."*
Así tenemos que:

a) El seno de cualquier ángulo agudo es igual al coseno de su complemento y viceversa.

b) La tangente de un ángulo agudo es igual a la cotangente de su complemento y viceversa.

c) La secante de un ángulo agudo es igual a la cosecante de su complemento y viceversa.

AUTOEVALUACION 4.

Clasificar cada una de las expresiones siguientes como falsa o verdadera:

1.- $\cos 30° = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 60°}$

2.- $\tan X = \cot (90° + x)$

3.- $\sec A \,.\, \cos B = 1$

4.- $\tan 38°14' = \cot 51°\ 46'$

5.- $\sec Y = \dfrac{1}{\cos Y}$

6.- $\csc 83° = \sec 7°$

7.- $\dfrac{1}{\cos C} = \sec C$

8.- $\tan A = \dfrac{1}{\cot (90° - A)}$

9.- $\tan A \,.\, \cot A = 1$

10.- $\cot 18°18' = \tan 71°\ 42'$

Empleando las cofunciones, escribir la equivalente de cada una de las expresiones siguiente:

11.- sen X

12.- tan 31°

13.- csc A

14.- cos (90° - Y)

15.- sen 28°50'

16.- cos 81° 20'

Empleando las relaciones recíprocas, escribir la equivalente de cada una de las expresiones siguientes:

17.- $\sec A \cdot \cos A$

18.- $\dfrac{1}{\cos 29° \; 40'}$

19.- $\dfrac{1}{\cos C}$

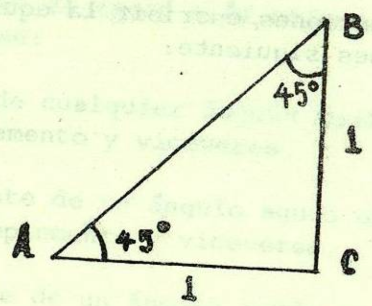
20.- $\tan B \cdot \cot B$

21.- $\sec 83°$

1-6 FUNCIONES DE ÁNGULOS DE 30°, 45° y 60°.

Existen en trigonometría dos triángulos rectángulos muy conocidos que son los de 45° y 30° - 60°. Las funciones para esos ángulos se usan con frecuencia, por lo que se recomienda a los estudiantes estudien con cuidado esta parte.

Comencemos con el triángulo rectángulo isósceles, en el cual los ángulos agudos miden 45° cada uno.



Representando cada lado por medio de la unidad, se dibuja un rectángulo con A y B de 45°. Ahora, por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$c^2 = 1 + 1$$

$$c = \sqrt{2}\,.$$

Una vez encontrados los valores de los lados, procedemos a encontrar las funciones:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

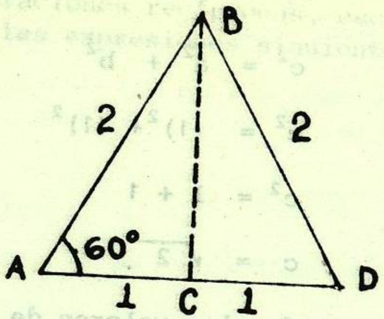
$$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

En este triángulo es donde las funciones seno-coseno, tangente- cotangente, secante-cosecante, tienen el mismo valor y las cofunciones son también iguales.

Para el triángulo rectángulo 30° - 60°, construyamos un triángulo equilátero con un valor de 2 para cada lado.



Como en todo triángulo equilátero sus lados y sus ángulos son iguales, tenemos que:

$$A + B + C = 180°$$

pero como $A = B = D$, entonces:

$$3A = 180°$$

$$A = \frac{180°}{3}$$

$$A = 60°$$

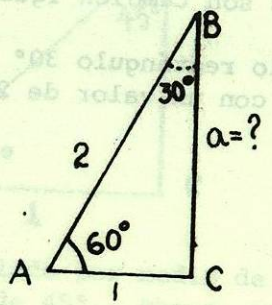
También sabemos por geometría que en todo triángulo equilátero, C es el punto medio de AD, es decir: $AC = CD = 1/2\ (2) = 1$. Para calcular la altura del triángulo equilátero, basta con aplicar el teorema de Pitágoras, ya que la altura divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$A + B + C = 180°$

$60° + B + 90° = 180°$

$B = 180° - 60° - 90°$

$B = 30°$



$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 4 - 1$

$a^2 = 3$

$a = \sqrt{3}$

Conocidos los lados y ángulos, procedemos a encontrar las funciones:

$\text{Sen } 30° = 1/2$	$\text{Sen } 60° = \sqrt{3}/2$
$\text{Cos } 30° = \sqrt{3}/2$	$\text{Cos } 60° = 1/2$
$\text{Tan } 30° = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$	$\text{Tan } 60° = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$

Se deja al estudiante encontrar las funciones restantes como práctica de esta sección.

1-7 APLICACION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Como ya se vió antes, la trigonometría era una herramienta muy útil y se usaba para calcular cantidades no mensurables directamente. En esta sección veremos algunas de las tantas aplicaciones que tienen las funciones. Te recomendamos veas y analices los ejemplos que a continuación se exponen para que luego resuelvas tu autoevaluación.

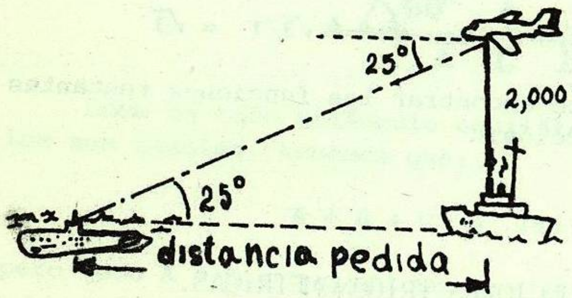
EJEMPLO 1.

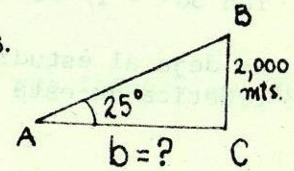
El altímetro de un aeroplano de reconocimiento indica 2000 mts sobre el nivel del mar. Cuando pasa sobre su portaaviones. En el mismo instante se detecta la presencia de un submarino, cuyo ángulo de depresión, desde el aeroplano, es de 25°. ¿Cuál será la distancia entre el submarino y el barco?

SOLUCIÓN:

Angulo de depresión es el ángulo comprendido entre la horizontal que pasa por el ojo del observador y la recta determinada por la vista dirigida hacia un punto que está *por debajo de él.*

Una vez aclarado el concepto, ángulo de depresión, procedamos a contruir un dibujo del problema, para verlo más claramente.





Arriba se muestra el triángulo de referencia, que forma el avión-porta-aviones-submarino.

El siguiente paso es encontrar la función que nos relacione los lados del triángulo. Para ello, vemos que, la Tan A y cot A nos relacionan los lados de los cuales escogemos la cot A.

$$\cot A = \frac{b}{2000}$$

despejando b, tenemos: $b = 2000 \ (\cot A)$

resolviendo: $b = 2000 \ (\cot 25°)$

$b = 2000 \ (2.145)$

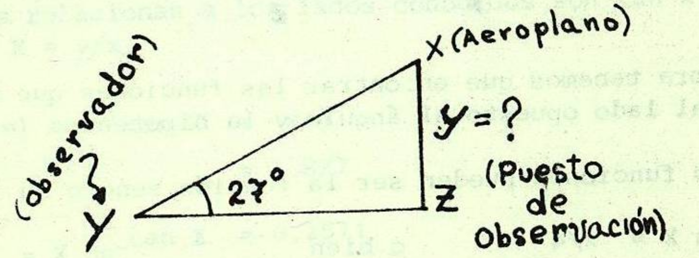
$b = 4290$ m.

EJEMPLO 2.

Se reporta un aeroplano que está precisamente sobrevolando un puesto de observación que se halla a 3000 m de una batería antiaérea. Desde la batería, el ángulo de elevación del avión es de 27°. Determinar la altura del avión.

Angulo de elevación es el ángulo comprendido entre la horizontal que pasa por el ojo del observador y la recta determinada por la vista dirigida hacia un punto que está por *encima de él*.

Haciendo un esquema, donde mostremos los datos y la incógnita:



Escogiendo entre las funciones, aquellas que nos relacionen los lados, tenemos que son la tan Y y cot Y, de las cuales escogemos tan Y.

$$\tan Y = \frac{y}{3,000}$$

$y = 3,000 \ (\tan Y)$

$y = 3,000 \ (\tan 27°)$

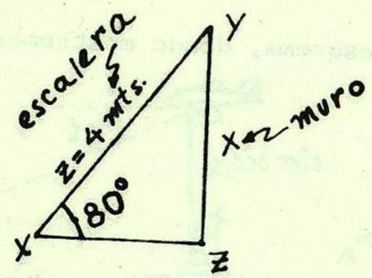
$y = 3,000 \ (0.5095)$

$y = 1528.5$ m

EJEMPLO 3.

Una escalera de 4 m de largo se apoya contra un muro formando un ángulo de 80° con el suelo. ¿A qué altura del muro está apoyada la escalera?

Haciendo un esquema del problema



Ahora tenemos que encontrar las funciones que nos relacionen al lado opuesto al ángulo y la hipotenusa (escalera).

Las funciones pueden ser la función seno o su recíproca.

$\text{sen } X = x/4$ o bien $\csc X = 4/x$

de las cuales la más sencilla de operar es la función seno.

$$\text{sen } X = x/4$$

$$x = 4 \text{ Sen } X$$

$$x = 4\ (0.9848)$$

$$x = 3.9392 \text{ m}$$

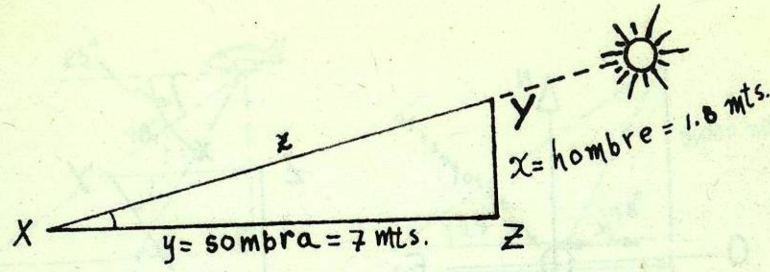
$x \quad 3.94$ (aproximadamente a decimales)

EJEMPLO 4.

Si un hombre de 1.8 m de altura proyecta una sombra de 7 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?

SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema del problema, tenemos:



Para encontrar el ángulo (X), tenemos que, las funciones que nos relacionan a los lados conocidos son tan X = x/y o bien cot X = y/x.

$$\tan X = x/y$$

$$= 1.8/7$$

$$\tan X = 0.2571$$

$$X = \text{arco tan } (0.2571)$$

$$X \approx 14°\ 30'$$

EJEMPLO 5.

Un avión despega de un aeropuerto y vuela 200 Km en dirección S 30°40'O. ¿A qué distancia, al oeste del punto de partida, está el avión en ese instante?

SOLUCIÓN:

A fin de resolver este tipo de problemas, las direcciones que se toman en torno a problemas de navegación estarán referidas usualmente al N (norte) o S (sur), de acuerdo con la que sea más cercana a la dirección que se desea indicar, y estará seguida por el número de grados (menor de 90°) hacia el este (E) u oeste (O) de la dirección principal

En nuestro caso S 30°40' O, indica 30°40' al oeste a partir del sur, cuyo diagrama o esquema es el siguiente: