11.- 1
12.- 3
13.- 1
14.- 4
15.- 4
16.- 1
17.- 2
18.- b,c,f,a

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS PARA ANGULOS EN GENERAL.

En la unidad anterior vimos cómo definir las funciones trigonométricas para ángulos agudos en términos de los lados de triángulos rectángulos y cómo, a través de ellos, podemos resolver diferentes tipos de problemas. Pero la definición de las funciones son un poco vagas ya que se refieren con respecto a triángulos rectángulos.

En esta unidad veremos cómo, en base a las definiciones anteriores, podemos definir las funciones en términos generales a través de un sistema rectangular de coordenadas y, a expresar los valores de funciones de ángulos mayores de 90°. Así mismo, aprenderás cómo varían las funciones cuando los ángulos crecen o decrecen.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Explicar en qué consiste un sistema de coordenadas rectangulares, definiendo cada una de las partes de que conste.

2.- Distinguir claramente los conceptos: radio vector, ángulo conterminal, ángulo positivo y ángulo negativo.

3.- En base a los objetivos anteriores, definir las funciones trigonométricas en términos de ángulos de cualquier magnitud.

4.- Dado al menos el valor de una función y el signo de otra, identificar y expresar el cuadrante, signos y valores de las demás funciones.

5.- Expresar correctamente las funciones de ángulos positivos menores que 360°(180°- θ, 180° + θ, 360° - θ), en términos de ángulos agudos, mostrando su valor por medio de tablas.

6.- Expresar correctamente los valores de las funciones de ángulos mayores de 360° por medio de tablas.

7.- Expresar correctamente los valores de las funciones de ángulos negativos por medio de tablas.

8.- Escribir correctamente los valores de las funciones para los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°.

9.- Resumir, en base al objetivo anterior, las variaciones de las funciones en los cuadrantes cuando el ángulo aumenta y disminuye.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Antes de empezar a contestar o resolver la unidad, es necesario que domines a la perfección las definiciones de las funciones, así como el manejo correcto de las tablas y del teorema de Pitágoras.

2.- Para que resuelvas la unidad satisfactoriamente es necesario que leas y estudies el capítulo II. Para los objetivos 1 y 2 te recomendamos que comprendas cada una de las partes de que se compone un sistema de coordenadas rectangulares y los ángulos positivo, negativo y coterminales, ya que es la base para contestar satisfactoriamente los demás objetivos.

Para el objetivo 3, es imporante que visualices los nombres que toman ahora los lados opuestos, adyacente y la hipotenusa. Si observas detenidamente las gráficas verás que, el ángulo de referencia es siempre con respecto al eje X, y que conforme a este eje, los lados quedan

como:

lado opuesto = ordenada = eje "y"

lado adyacente = abscisa = eje "x"

hipotenusa = radio vector

Una vez definidas las funciones, contesta el objetivo 4, fijándote bien en los datos que den para que, por definición y signo, identifiques en qué cuadrante queda y posteriormente encuentres los valores de las demás funciones.

Para los objetivos 5, 6 y 7 haz uso de las definiciones de las funciones, para que identifiques el signo de la función deseada, dependiendo del ángulo dado, y después por medio de tablas des el valor de la misma.

Para los objetivos 8 y 9, construye una tabla donde - muestres los valores de las funciones para ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360° y luego en base a ella contestes el objetivo 9.

2.- Resuelve, como autoevaluación de esta unidad, la autoevaluación del capítulo. Pregúntale a tu asesor cualquier duda que tengas con referencia a la unidad.

CAPITULO 2.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS MAYORES DE 90°.

2-1 INTRODUCCIÓN.

Una de las cosas importantes de las matemáticas es que nos indica como pensar y razonar correctamente, por eso, algunas veces se le llama "la ciencia del razonamiento puro".

Las matemáticas, al igual que la trigonometría, es una de las ciencias más antiguas. La medida de los ángulos se remonta al tiempo de la escuela de Alejandría, en los principios de la Era Cristiana. Los matemáticos dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, llamadas grados.

En el capítulo anterior, vimos cómo definir las funciones trigonométricas para ángulos agudos. Gracias al sistema de coordenadas rectangulares, nos es posible estudiar hoy las funciones trigonométricas para ángulos mayores que el recto.

2-2 ANGULOS.

a) Coordenadas rectangulares.

Cuando en el siglo XVII, René Descartes estableció la correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y las parejas ordenadas de números reales, las matemáticas dieron un gran paso hacia adelante . Se pudo utilizar la intuición geométrica para la resolución de problemas algebraicos y el aparato algebraico dió la solución a problemas geométricos.

Veamos en qué consiste esta sencilla y poderosa correspondencia:

1.- Tracemos en el plano dos rectas perpendiculares, una horizontal que se llama "eje x" y otra vertical llamada "eje y". El punto de intersección de ambas rectas, se denomina "origen" y lo denotaremos por "O". (Estas dos rectas se conocen hoy bajo el nombre de "coordenadas rectangulares".)

2.- Como los puntos de una recta se pueden identificar con los números reales, en los dos ejes se puede hacer esa identificación: en el "eje x", los puntos a la derecha de "O" corresponden a los reales "positivos", y los puntos a la izquierda de "O", a los reales "negativos". En el "eje y", los puntos arriba de "O" corresponden a los reales "positivos" y los puntos abajo de "O" a los reales "negativos" (véase la fig. 2-1).

3.- A las cuatro regiones en que los dos ejes dividen al plano se les llama "cuadrantes" y es costumbre asignarles los números romanos indicados en la figura 2-1.

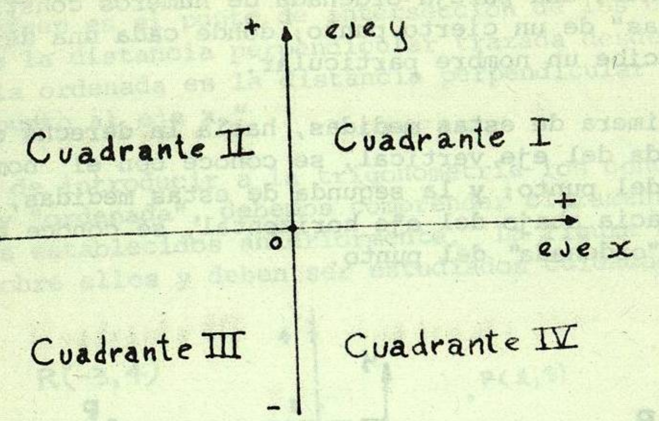

Fig. 2-1.

Obsérvese lo siguiente:

a) "Los cuadrantes se enumeran siempre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj."

b) "Las medidas se consideran positivas cuando se toman hacia la derecha del eje vertical o hacia arriba del eje horizontal."

c) "las medidas se consideran negativas cuando se toman hacia la izquierda del eje vertical o hacia abajo del eje horizontal."

La posición exacta de cualquier punto en el plano se acostumbra indicarlo por medio de dos números reales, precedidos por el signo + o el signo -. Debe sobre-entenderse que el primero de dichos números indica siempre una medida hacia la derecha o hacia la izquierda del eje vertical, mientras que el segundo número indica una medida hacia arriba o hacia

abajo del eje horizontal. Tal como sucede en álgebra, si u
número no va precedido del signo se considera positivo. Co
secuentemente, una pareja ordenada de números constituye la
"coordenadas" de un cierto punto; donde cada una de las coo
denadas recibe un nombre particular.

La primera de estas medidas, hacia la derecha o hacia la izquierda del eje vertical, se conoce con el nombre de "abscisa" del punto; y la segunda de estas medidas, hacia arriba o hacia abajo del eje horizontal, se conoce con el nombre de "ordenada" del punto.

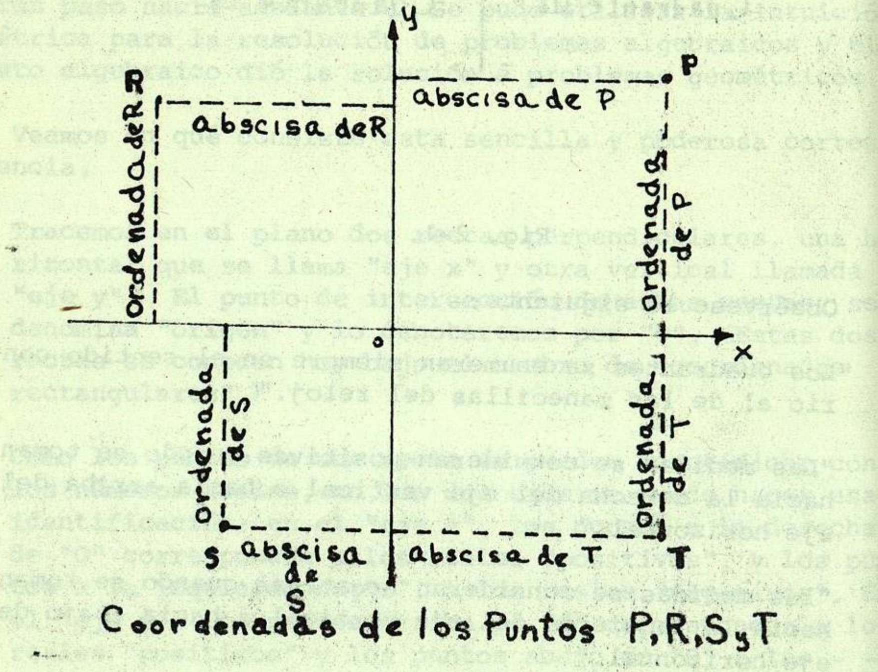

Fig. 2-2. Coordenadas de los puntos P, R, S y T.

En un sistema de coordenadas rectangulares:

"El origen es el punto de intersección de los ejes; la abscisa es la distancia perpendicular trazada desde un punto al eje "y" la ordenada es la distancia perpendicular trazada desde un punto al eje x."

Antes de introducir a la trigonometría los conceptos de "abscisa" y "ordenada", debemos comprender claramente los principios establecidos anteriormente. La figura 2-3 nos ilustra sobre ellos y deben ser estudiados cuidadosamente.

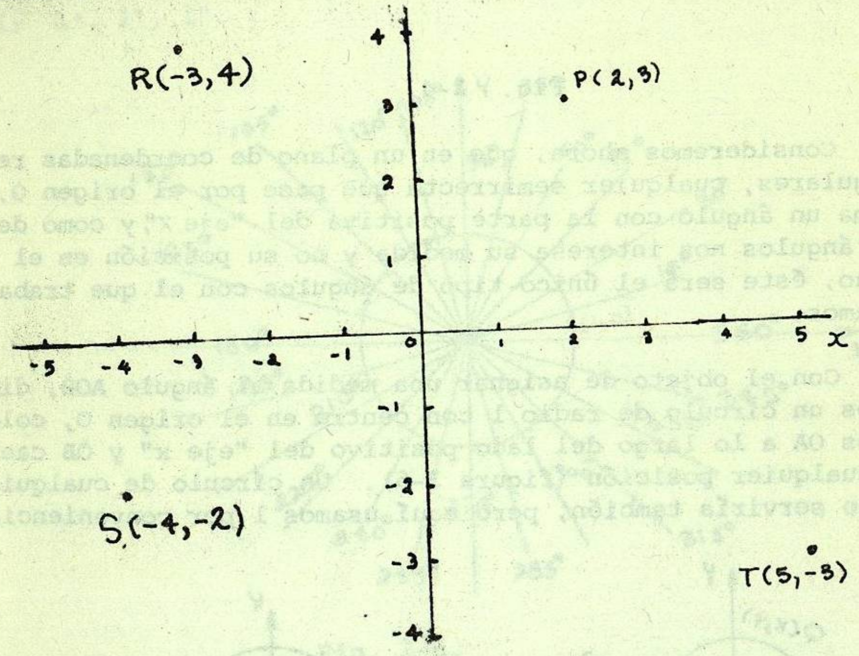

Fig. 2-3.

b) *Angulos positivos y negativos.*

Para una mejor comprensión de la trigonometría, se requiere una definición más amplia de ángulo que la conocida en geometría elemental: " es una figura formada por dos rectas que se cortan en un punto llamado vértice." Por ejemplo:

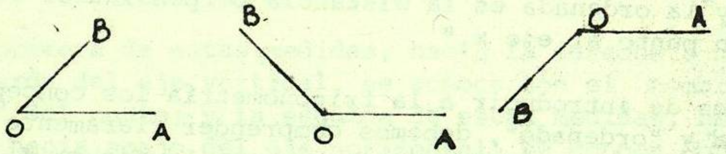

Fig. 2-4.

Consideremos ahora, que en un plano de coordenadas rec tangulares, cualquier semirrecta que pase por el origen O, forma un ángulo con la parte positiva del "eje X", y como de los ángulos nos interesa su medida y no su posición en el - plano, éste será el único tipo de ángulos con el que trabajaremos.

Con el objeto de asignar una medida al ángulo AOB, dibu jamos un círculo de radio 1 con centro en el origen O, colo camos OA a lo largo del lado positivo del "eje x" y OB caerá en cualquier posición (figura 2-5). Un círculo de cualquier radio serviría también, pero aquí usamos 1 por conveniencia.

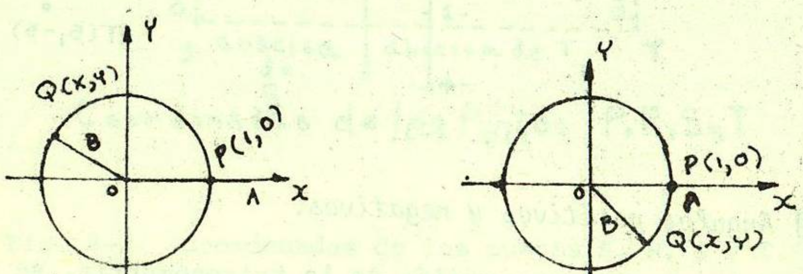

Fig. 2-5.

Cuando el lado OA está en dicha posición, entonces, se dice que el ángulo AOB está en "posición ordinaria". OA corta el círculo en el punto P(1,0) y OB, en el punto que llamamos Q(x,y).

Comúnmente, la circunferencia de un círculo se ha dividido en 360 arcos iguales (aunque no sea posible esta división por medio de la regla y el compás) y cada una de estas partes ha recibido el nombre de "grado". Cada grado a su -- vez, se ha dividido en 60 partes, llamadas "minuto", y cada minuto en otras 60 partes llamadas "segundo". Y se escriben así: 1°, 1', 1".

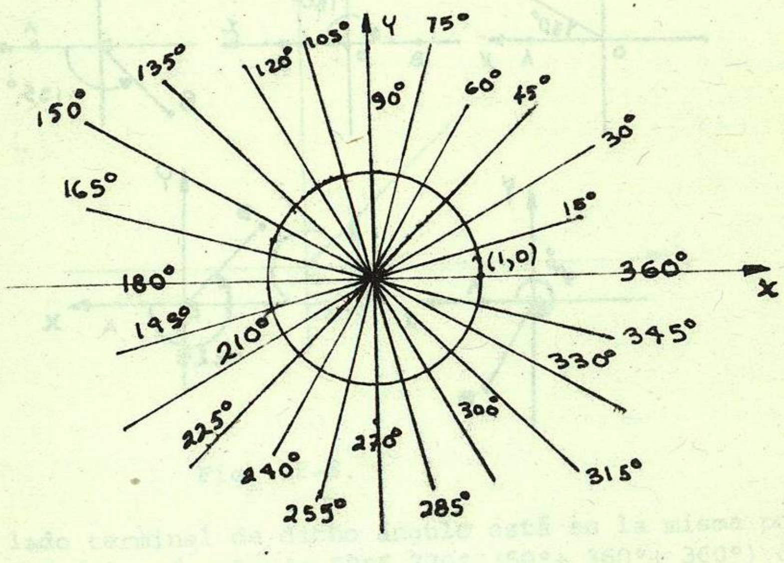

Fig. 2-6.

Tomando estas unidades en arcos de un círculo de radio unitario, podemos ahora definir la medida de los ángulos.

"La medida (en grados) de un ángulo es la medida del arco que él intercepta en el círculo unitario."

Pero en trigonometría necesitamos la noción de cómo van "dirigidos los arcos", Intuitivamente se nos ocurre colocar una flecha en el arco, que determina si el arco se recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, o e el mismo sentido. Y después designaremos que, cuando el gi es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, ángulo es "positivo"; y cuando el giro es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es "negativo" (véase fi 2-7).

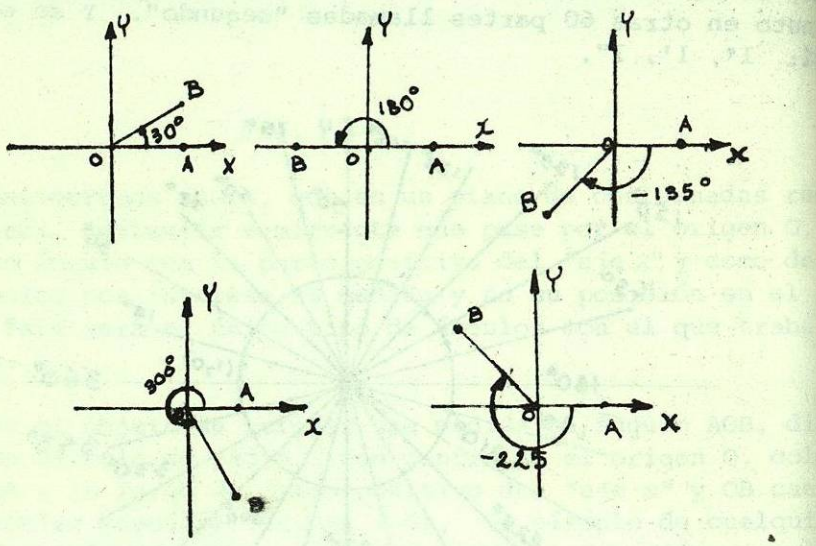

Fig. 2-7.

El lado del ángulo a partir del cual empieza el giro, se llama "lado inicial" (OA en la fig. 2-7). El lado cuyo movimiento genera el ángulo y determina su tamaño por la posi ción que ocupa al detenerse el giro, recibe el nombre de "la- do terminal" (OB en la fig.2-7).

Los ángulos que tienen los mismos lados, inicial y ter- minal se llaman "ángulos coterminales". En un plano de coor- denadas cada punto B, diferente del origen determina un con-

junto infinito de ángulos coterminales, cada uno teniendo al origen como vértice, la parte positiva del eje x como la- do inicial y el lado OB como lado terminal.

Por consiguiente, el lado terminal de cualquier ángulo coincide con el de muchos otros ángulos, ya que en trigonome tría se trabaja con frecuencia con ángulos mayores de una -- vuelta. Consideremos un ángulo de 410° como el de la figura 2-8.

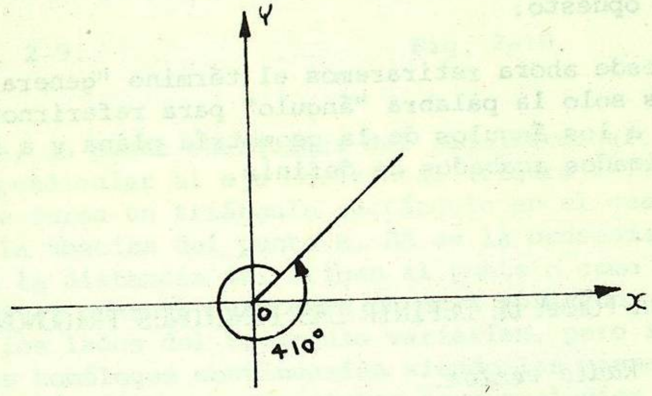

Fig. 2-8.

El lado terminal de dicho ángulo está en la misma posi-- ción que el de un ángulo de 50° ó 770° (50°+ 360°+ 360°) ó 50° más un número cualquiera de revoluciones completas. Se obser vará que, excepto por el total de revoluciones que intervie-- nen en la generación del ángulo, las propiedades de todos los ángulos coterminales son las mismas. Es fácil ver que un án- gulo de -310° es coterminal con los ángulos de 50°, 410° y 770°mencionados arriba.

En vista de la discusión anterior, es natural la siguien te definición de ángulo generalizado: