"Un ángulo generalizado es una figura plana que consi te en dos lados: uno inicial y otro terminal, con un punto común inicial O; y un lado dirigido de un círculo (con centro en O), cuyos extremos terminan en los dos lados. Este arco puede ser de cualquier longitud, o sea, la que se pued medir directamente, más la que resulte de sumarle n veces l longitud de la circunferencia en una misma dirección."

La medida en grados de este arco, junto con su signo, se define como la medida de un ángulo generalizado. El sig no es positivo, si la circunferencia se recorre en el senti do contrario a las manecillas del reloj, y es negativo, en el caso opuesto.

Desde ahora retiraremos el término "generalizado" y usaremos solo la palabra "ángulo" para referirnos a ambas clases, a los ángulos de la geometría plana y a los ángulos generalizados acabados de definir.

2-3 OTRA FORMA DE DEFINIR LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

a) Radio vector.

En trigonometría, se emplean con frecuencia, las letras del alfabeto griego para representar, de un modo gener el número de grados de un ángulo. Algunas letras griegas son: α (alfa), β (beta), γ (gama), Θ (theta), ϕ (fi), ω (omega).

Supongamos que una recta OB sobre el eje horizontal, tal como se muestra en la figura 2-9, gira en torno de O, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, generará un ángulo positivo Θ (figura 2-10).

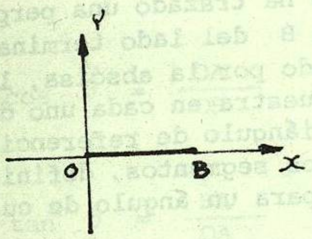


Fig. 2-9.

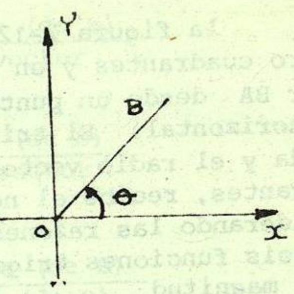


Fig. 2-10.

Desde B, un punto cualquiera del lado terminal, trazamos BA perpendicular al eje horizontal (figura 2-11) de esta manera se forma un triángulo rectángulo en el cual el lado OA es la abscisa del punto B, BA es la ordenada y OB se conoce como la distancia del origen al punto o como "radio vector". Si el punto B se tomara en otra posición, las longitudes de los lados del triángulo variarían, pero las razones de lados homólogos continuarían siendo las mismas, puesto que los triángulos son semejantes para cualquier ángulo dado Θ.

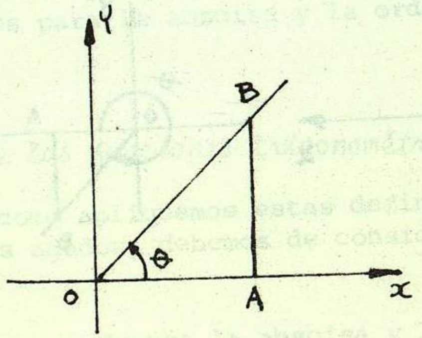


Fig. 2-11.

b) Definición.

la figura 2-12 muestra un ángulo en cada uno de lo cuatro cuadrantes y en cada caso se ha trazado una perpendi cular BA desde un punto cualquiera B del lado terminal, a eje horizontal. El triángulo formado por la abscisa, la or denada y el radio vector, como se muestra en cada uno de lo cuadrantes, recibe el nombre de "triángulo de referencia." Considerando las razones entre dichos segmentos, definiremo las seis funciones trigonométricas para un ángulo de cual- quier magnitud.

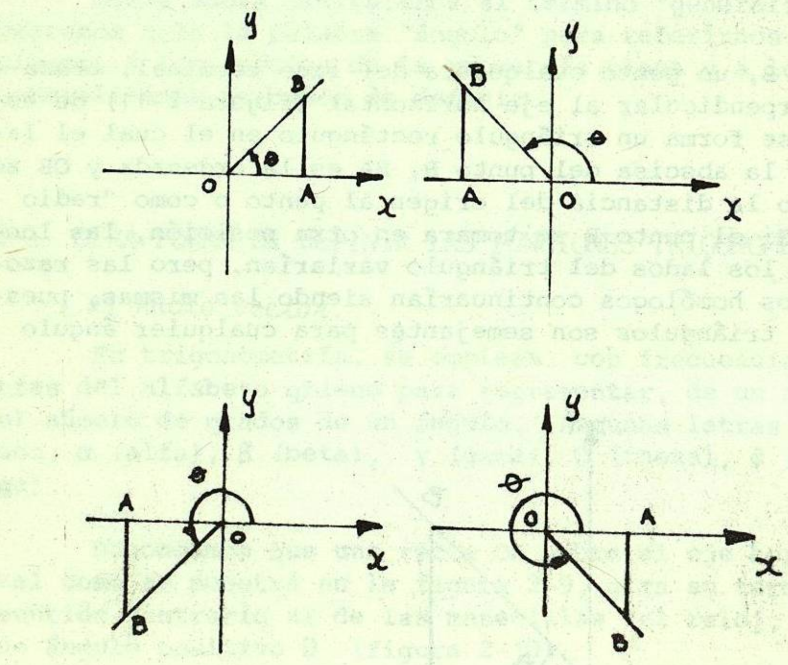


Fig. 2-12.

$$\text{sen } \theta = \frac{BA}{OB} = \frac{\text{ordenada (de B)}}{\text{radio vector}}$$

$$\cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{abscisa (de B)}}{\text{radio vector}}$$

$$\tan \theta = \frac{BA}{OA} = \frac{\text{ordenada (de B)}}{\text{abscisa (de B)}}$$

$$\cot \theta = \frac{OA}{BA} = \frac{\text{abscisa (de B)}}{\text{ordenada (de B)}}$$

$$\sec \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa (de B)}}$$

$$\csc \theta = \frac{OB}{BA} = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada (de B)}}$$

Estas definiciones nos permiten escribir expresiones pa ra las funciones de ángulos de cualquier magnitud, ya que -- cualquiera que sea la posición del radio vector se tendrán los mismos valores para la abscisa y la ordenada.

c) Signos de las funciones trigonométricas.

Tan pronto como apliquemos estas definiciones a ángulos diferentes de los agudos, debemos de considerar los signos ya que:

a) "En el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son ambas positivas."

b) "En el segundo cuadrante la abscisa es negativa y la ordenada es positiva."

c) "En el tercer cuadrante la abscisa y la ordenada son ambas negativas."

d) "En el cuarto cuadrante la abscisa es positiva y la ordenada es negativa."

e) "El radio vector se considera siempre positivo."

Los signos de las seis funciones trigonométricas de θ dependen del cuadrante, en el que el lado terminal de θ cae. Así diremos que "θ está en el segundo cuadrante" si, colocado el lado inicial en el lado positivo de eje x, el lado terminal cae en el segundo cuadrante, y así nos expresaremos para los otros cuadrantes.

Observamos que el sen θ es positivo cuando θ está en el primer o segundo cuadrante, dado que la ordenada es positiva en el primer y en el segundo cuadrante y el radio vector es siempre positivo. En cambio, sen θ es negativo, cuando es un ángulo del tercer o cuarto cuadrante, porque la ordenada es negativa en esos cuadrantes. La situación se resume en la siguiente tabla, que el estudiante puede verificar por sí mismo.

TABLA 2-1.

Cuadrante	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

En la figura 2-13 se muestran los signos del seno, del coseno y de la tangente de ángulos que pertenecen a diferentes cuadrantes. Los signos de la cosecante, secante y de la cotangente serán, naturalmente, los mismos que los de sus correspondientes recíprocas seno, coseno y tangente.

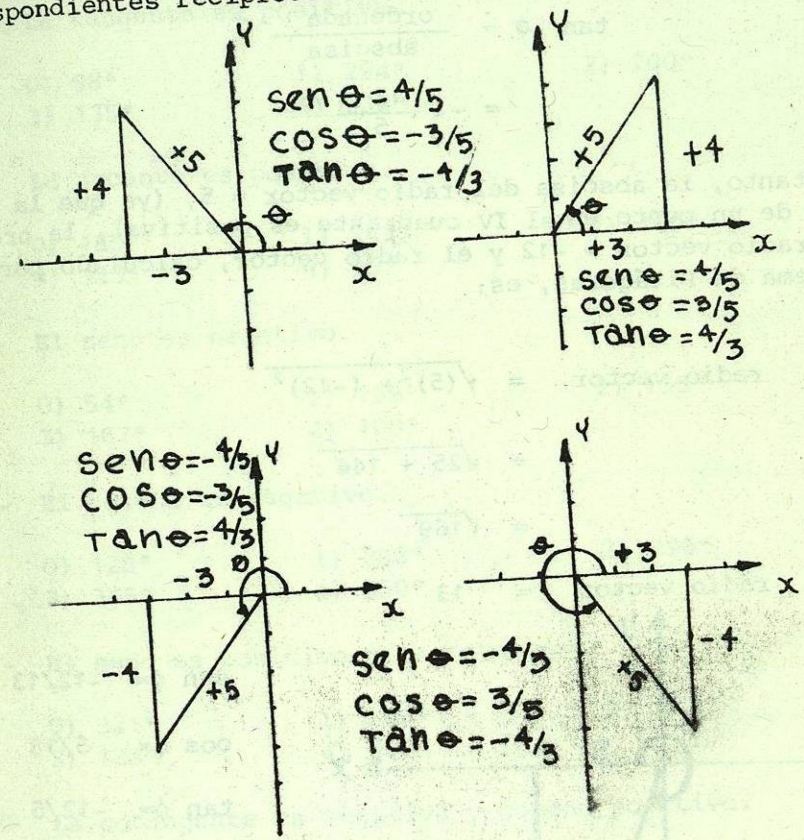


Fig. 2-13.

EJEMPLO.

Si la tan ϕ = - 12/5 y el seno es negativo, ¿en qué cuadrante está ϕ? (Hacer una figura donde se muestre la posición correcta del triángulo de referencia). Calcular el valor de cada una de las cinco funciones restantes de ϕ.

SOLUCIÓN:

El único cuadrante en que la tangente y el seno son negativos es en el IV cuadrante. Y si la

$$\tan \phi = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$$

$$= -\frac{12}{5}$$

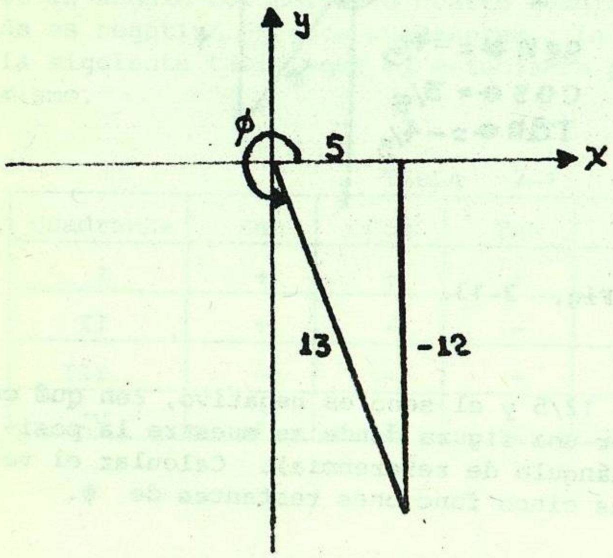
por lo tanto, la abscisa del radio vector = 5, (ya que la abscisa de un punto en el IV cuadrante es positiva), la ordenada del radio vector = -12 y el radio vector, calculado por el teorema de Pitágoras, es:

$$\text{radio vector} = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$\text{radio vector} = 13$$



sen ϕ = -12/13

cos ϕ = 5/13

tan ϕ = -12/5

cot ϕ = -5/12

sec ϕ = 13/5

csc ϕ = -13/12

AUTOEVALUACION 1.

De cada uno de los siguientes conjuntos de ángulos, seleccionar aquel ángulo para el cual:

1.- La tangente es positiva.

0) 98° 1) 294° 2) 200°
3) 135° 4) 332°

2.- La secante es positiva.

0) 185° 1) 243° 2) 169°
3) 325° 4) 95°

3.- El seno es negativo.

0) 54° 1) 198° 2) 135°
3) 167° 4) 100°

4.- El coseno es negativo.

0) 128° 1) 283° 2) 296°
3) 315° 4) 350°

5.- El seno es positivo y la cotangente positiva.

0) 321° 1) 280° 2) 245°
3) 128° 4) 30°

6.- La cotangente es negativa y coseno positivo.

0) 189° 1) 228° 2) 99°
3) 74° 4) 330°

7.- La secante es negativa y la tangente negativa.

0) 85° 1) 138° 2) 190°
3) 250° 4) 324°

8.- La cosecante es negativa y el coseno negativo.

0) 305° 1) -312° 2) 242°
3) 165° 4) 286°

Si tan $\theta = -2/3$ y el coseno es positivo; contesta lo siguiente:

9.- ¿En qué cuadrante está el ángulo ?

0) I 1) II 2) III
3) IV

10.- El valor de la función sen θ.

0) $-2\sqrt{13}/13$ 1) $-2\sqrt{5}/5$ 2) $-3\sqrt{13}/13$
3) $-3\sqrt{5}/5$ 4) $-\sqrt{13}/13$

11.- El valor de la función cos θ.

0) $2\sqrt{13}/13$ 1) $2\sqrt{5}/5$ 2) $3\sqrt{13}/13$
3) $3\sqrt{5}/5$ 4) $\sqrt{13}/13$

12.- El valor de la función cot θ.

0) $-\sqrt{13}/2$ 1) $-3/2$ 2) $-\sqrt{5}/2$
3) $-\sqrt{5}/3$ 4) $-\sqrt{13}/3$

13.- El valor de la función sec θ.

0) $3/2$ 1) $-\sqrt{5}/2$ 2) $\sqrt{5}/3$
3) $-\sqrt{13}/2$ 4) $\sqrt{13}/3$

14.- El valor de la función csc θ.

0) $-\sqrt{13}/3$ 1) $-\sqrt{5}/3$ 2) $-\sqrt{5}/2$
3) $-\sqrt{13}/2$ 4) $-3/2$

2-4 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS DE CUALQUIER MAGNITUD.

Hay muchas identidades importantes en trigonometría, que tendremos que hacer uso de ellas muy a menudo. Y esto se presentará sobre todo cuando los ángulos con los que estamos trabajando sean mayores de 90°. Porque, por ejemplo, las tablas de valores de las funciones trigonométricas, están hechas para ángulos cuyos valores se encuentran entre 0° y 90° solamente. Necesitamos por lo tanto, métodos de reducción de expresiones tales como sen $(180°-\theta)$, tan $(180°+\theta)$, cos $(360°-\theta)$, etc. a formas más sencillas que contengan sólo el ángulo θ y en donde θ es un ángulo mayor de 0° y menor de 90°. $(0° < \theta < 90°)$.

a) *Funciones de ángulos mayores de 90° y menores de 180°.*

Consideremos un giro de OD a fin de determinar un ángulo agudo θ, después, a partir de la posición original, consideremos el giro de OB necesario para formar un ángulo de $(180°-\theta)$, que es un ángulo en el segundo cuadrante. (Véase figura 2-14).

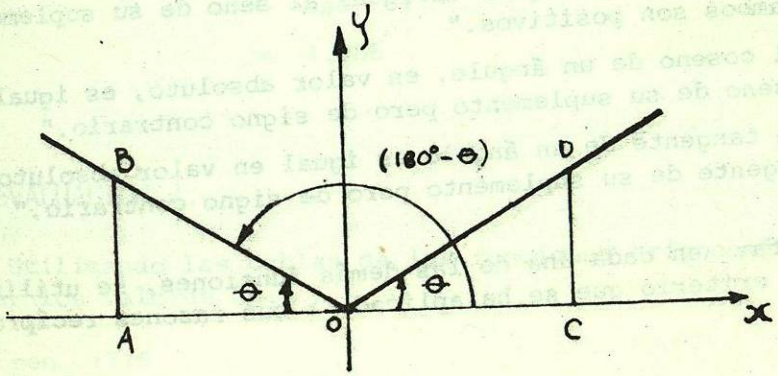


Fig. 2-14.

Fácilmente se puede demostrar que el triángulo ODC y el triángulo OBA son semejantes (algunas veces, pero no necesariamente, congruentes). Por consiguiente, sus lados correspondientes son proporcionales, pero las funciones en las que interviene OA, como es negativo, serán de signo contrario a las otras. Por lo tanto, la figura 2-14, si OA = - OC, se sigue que:

$$\text{sen } (180° - \theta) = \frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \text{sen } \theta$$

$$\cos (180° - \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{-OC}{OD} = -\cos \theta$$

$$\tan (180° - \theta) = \frac{BA}{OA} = -\frac{DC}{OC} = -\tan \theta$$

Lo anterior nos permite obtener el valor numérico de cualquier función trigonométrica para ángulos comprendidos entre 90° y 180°, recurriendo a las tablas de valores numéricos de las funciones de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.

De lo anterior, podemos decir, si $90° < \theta < 180°$, que

a) "El seno de un ángulo es igual al seno de su suplemento y ambos son positivos."

b) "El coseno de un ángulo, en valor absoluto, es igual al coseno de su suplemento pero de signo contrario."

c) "La tangente de un ángulo es igual en valor absoluto, a la tangente de su suplemento pero de signo contrario."

(Nota: en cada una de las demás funciones, se utiliza el mismo criterio que se ha aplicado a sus razones recípro-- cas).

EJEMPLO 1.

Hallar el valor de tan 155°

SOLUCIÓN:

$$155° = 180° - 25°$$

por lo tanto,

$$\tan 155° = \tan (180° - 25°)$$
$$= -\tan 25°$$
$$= -0.4663$$

EJEMPLO 2.

Hallar el valor de csc 113°.

SOLUCIÓN:

$$113° = 180° - 67°$$

por lo tanto,

$$\csc 113° = \csc (180° - 67°)$$
$$= \csc 67°$$
$$= 1.086$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar los valores de:

1.- sen 171°

0) 0.1382	1) 0.1564	2) 0.1478
3) 0.9877	4) 0.9903	

2.- tan 164°

0) 0.2679   1) 0.3057   2) -3.487
3) -3.271   4) -0.2867

3.- cos 148°

0)-0.8480   1) 0.5299   2) -0.5150
3) -0.5381   4) -0.8572

4.- sen 118°

0) 0.4695   1) 0.4540   2) 0.8829
3) 0.8910   4) 0.8746

5.- csc 98°

0) 7.185   1) 1.0098   2) 8.206
3) 0.008   4) 6.392

6.- csc 154°

0) 2203   1) 2.366   2) 1.122
3) 2.2812   4) 1.113

7.- cot 104°

0) 3.732   1) -0.3057   2) -3.487
3) -0.2493   4) -0.2679

8.- tan 112°

0) 12.4751   1) -0.4640   2) -0.3839
3) -2.3839   4) -2.356

9.- cos 160°

0) -0.3256   1) -0.3420   2) -0.9397
3) -0.9455   4) -0.9336

10.- sec 115°

0) -1.095   1) -2.281   2) -2.459
3) -1.103   4) -2.3662

b) Funciones de ángulos mayores de 180° y menores de 270°.

Consideremos un giro de OD para formar un ángulo agudo θ, después, a partir de la posición original, consideremos el giro de OD correspondiente a un ángulo de $(180°+\theta)$, que es un ángulo del tercer cuadrante. (Véase figura 2-15).

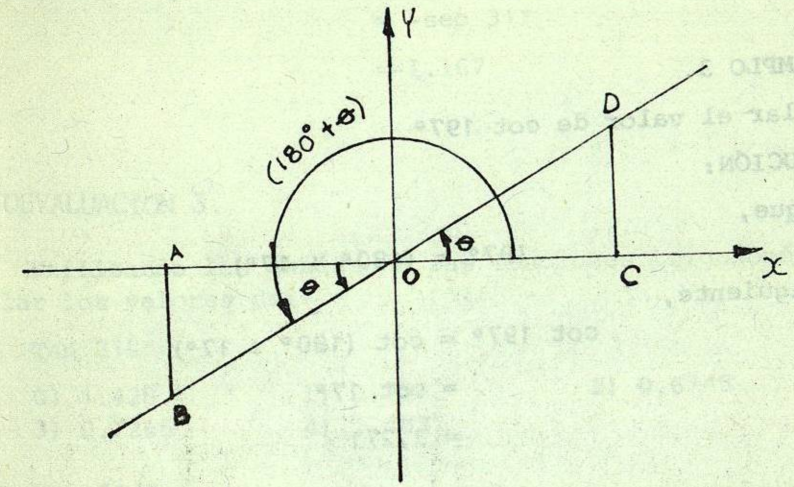


Fig. 2-15.

Se puede demostrar fácilmente que el triángulo ODC y el triángulo OBA de la figura2-15 son semejantes. Por lo tanto, si OA = -OC y BA = -DC, entonces tendremos:

$$\text{sen}\ (180° + \theta) = \frac{BA}{OB} = -\frac{DC}{OD} = -\text{sen}\ \theta$$

$$\cos\ (180° + \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{-OC}{OD} = -\cos\ \theta$$

$$\tan\ (180° + \theta) = \frac{BA}{OA} = \frac{-DC}{-OC} = \tan\ \theta$$

De todo lo anterior, podemos decir que:

"Cualquier función de un ángulo expresado como 180° más (o menos) un ángulo agudo, es igual, en valor absoluto, a la misma función del ángulo agudo, con el mismo signo o con el signo contrario, dependiendo del cuadrante en que se encuentre la función."

EJEMPLO 3.

Hallar el valor de cot 197°.

SOLUCIÓN:

Ya que,

$$197° = (180° + 17°)$$

por consiguiente,

$$\cot 197° = \cot (180° + 17°)$$
$$= \cot 17°$$
$$= 3.271$$

EJEMPLO 4.

Hallar el valor de sen 228°

SOLUCIÓN:

Ya que

$$228° = (180° + 48°)$$

por consiguiente,

$$\text{sen}\ 228° = \text{sen}\ (180° + 48°)$$
$$= -\text{sen}\ 48°$$
$$= -0.7431$$

EJEMPLO 5.

Hallar el valor de sec 149°.

SOLUCIÓN:

Ya que,

$$149° = (180° - 31°)$$

por consiguiente,

$$\sec 149° = \sec (180° - 31°)$$
$$= -\sec 31°$$
$$= -1.167$$

AUTOEVALUACION 3.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar los valores de:

1.- Tan 215°

0) 1.428   1) 0.7002   2) 0.6745
3) 0.7265   4) 1.483

2.- sen 213°

0)-0.5299   1)-0.8480   2)-0.5592
3)-0.5446   4)-0.8387

3.- csc 235°

0)-1.2208   1)-1.743   2)-1.206
3)-1.236   4)-1.788