4.- cot 218°

0) 0.7813 1) 1.327 2) 1.2799
3) 0.7536 4) 1.235

5.- cos 188°

0) -0.1392 1) -0.9925 2) -0.9877
3) -0.1219 4) -0.9903

6.- sen 263°

0) -0.9925 1) -0.1392 2) -0.1219
3) -0.9877 4) -0.9903

7.- tan 195°

0) 3.732 1) 0.2493 2) 0.2679
3) 0.2867 4) 4.011

8.- sec 259°

0) -1.019 1) -0.1908 2) -5.759
3) -1.022 4) -5.2408

9.- cos 201°

0) -0.9327 1) -0.9336 2) -0.9272
3) -0.3584 4) -0.3420

10.- cot 244°

0) 2.050 1) 0.4663 2) 2.145
3) 0.4877 4) 0.5995

c) Funciones de ángulos mayores de 270° y menores de 360°.

Consideremos un giro de OD para formar un ángulo agudo θ , después, a partir de la posición original, consideremos el giro de OD correspondiente a un ángulo de $(360° - \theta)$, que es un ángulo del cuarto cuadrante. (Véase figura 2-16).

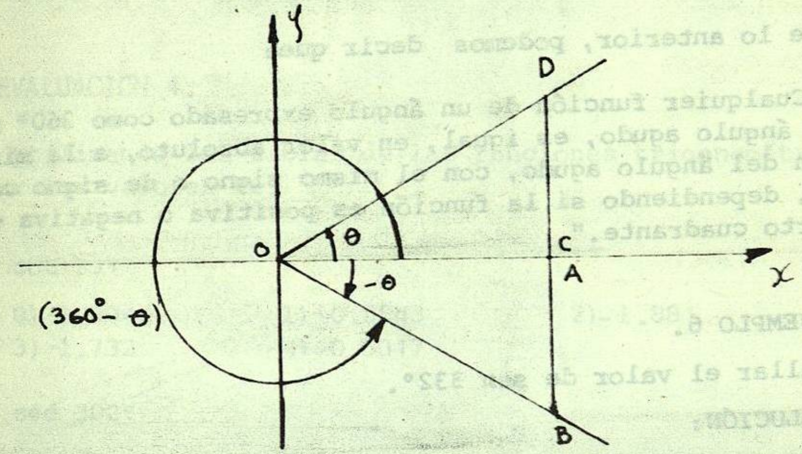

Fig. 2 - 16.

Análogamente se puede demostrar que el triángulo ODC y el triángulo OBA de la figura 2-16 son semejantes.

En dicha figura observamos que $(360° - \theta)$ es coterminal con el ángulo agudo $(-\theta)$ y, por lo tanto, las relaciones establecidas anteriormente también serán válidas para las funciones de $(-\theta)$.

Por lo tanto, si BA = -DC, tendremos:

$$\operatorname{sen}\ (360° - \theta) = \frac{BA}{OB} = \frac{-DC}{OD} = -\operatorname{sen}\ \theta$$

$$\cos\ (360° - \theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \cos\ \theta$$

$$\tan\ (360° - \theta) = \frac{BA}{OA} = \frac{-DC}{OC} = -\tan\ \theta$$

De lo anterior, podemos decir que:

"Cualquier función de un ángulo expresado como 360° menos el ángulo agudo, es igual, en valor absoluto, a la misma función del ángulo agudo, con el mismo signo o de signo contrario, dependiendo si la función es positiva o negativa en el cuarto cuadrante."

EJEMPLO 6.

Hallar el valor de sen 332°.

SOLUCIÓN:

Ya que, $332° = (360° - 28°)$

por lo tanto, $\operatorname{sen} 332° = \operatorname{sen}\ (360° - 28°)$

$= -\operatorname{sen} 28°$

$= -0.4695$

EJEMPLO 7.

Hallar el valor de cos 298°.

SOLUCIÓN:

Ya que, $298° = (360° - 62°)$

por consiguiente, $\cos 298° = \cos\ (360° - 62°)$

$= \cos 62°$

$= 0.4695$

EJEMPLO 8.

Hallar el valor de cot 322°.

SOLUCIÓN:

Ya que, $322° = (360° - 38°)$

por lo tanto, $\cot 322° = \cot\ (360° - 38°)$

$= -\cot 38°$

$= -1.28$

AUTOEVALUACIÓN 4.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar los valores de:

1.- cot 331°

0) -1.8040 1) -0.5543 2) -1.881
3) -1.732 4) -0.5317

2.- sec 302°

0) 1.179 1) 0.5299 2) 1.8871
3) 1.942 4) 1.167

3.- sen 323°

0) -0.7986 1) -0.6018 2) -0.5878
3) -0.8090 4) -0.7880

4.- tan 314°

0) -0.9657 1) -1.072 2) -0.9325
3) -1.0355 4) -0.9942

5.- csc 351°

0) -1.012 1) -6.314 2) -6.3925
3) -7.185 4) -1.010

6.- cos 274°

0) 0.9976 1) 0.0872 2) 0.9962
3) 0.0523 4) 0.0698

7.- sen 348°

0)-0.9781 1)-0.2079 2)-0.2250
3)-0.1908 4)-0.9816

8.- sec 283°

0) 1.022 1) 4.810 2) 0.2250
3) 1.026 4) 4.4454

9.- cot 341°

0)-2.9042 1)-0.3443 2)-0.3249
3)-2.747 4)-3.078

10.- cos 294°

0) 0.3907 1) 0.4226 2) 0.9205
3) 0.4067 4) 0.9135

d) Funciones de ángulos de un cuadrante (0°, 90°, 180° y 270°).

Cuando el radio vector OB está en la posición que se muestra en la figura 2-17 y no ha iniciado su giro, entonces $\theta = 0°$, la abscisa de B = OB y la ordenada de B = 0.

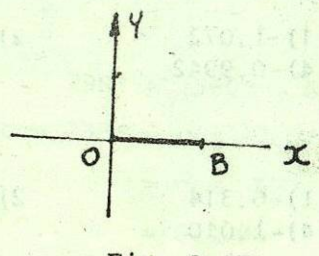

Fig. 2-17.

Por consiguiente,

$$\text{sen } 0° = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{radio vector}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\cos 0° = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{radio vector}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

$$\tan 0° = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{abscisa de B}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\cot 0° = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{ordenada de B}} = \frac{OB}{0} = *$$

$$\sec 0° = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa de B}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

$$\csc 0° = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada de B}} = \frac{OB}{0} = *$$

*La cot 0° y la csc 0° se dice que "no están definidas" ya que la división entre cero no tiene significado.

Podemos decir que a medida que el ángulo tiende a 0° la contangente y cosecante tienden a un número infinitamente grande o crecen indefinidamente. O sea que, para θ mayor de 0°, cuando θ tiende a 0°, la $\cot\theta$ tiende a ∞.

Cuando se emplea el "símbolo de infinito" debe entenderse claramente que "no representa ningún número definido".

Se puede ver que a medida que un ángulo tiende a 0°, la longitud de la ordenada disminuye continuamente, mientras que la función que tiene a la ordenada, como denominador, crece en valor, indefinidamente.

Si el numerador de cualquier fracción permanece constante y el denominador se hace, sucesivamente, más pequeño, el

valor de la fracción se hace cada vez más grande. Así, a
dida que un ángulo positivo tiende a 0°, los valores de su
cotangente y cosecante se harán cada vez más grandes, ten-
diendo hacia infinito.

Consideremos, ahora, la figura 2-18 donde la recta OB, de la figura 2-17, da un giro de 90°. Entonces $\theta = 90°$, la abscisa de B = 0 y la ordenada de B = OB.

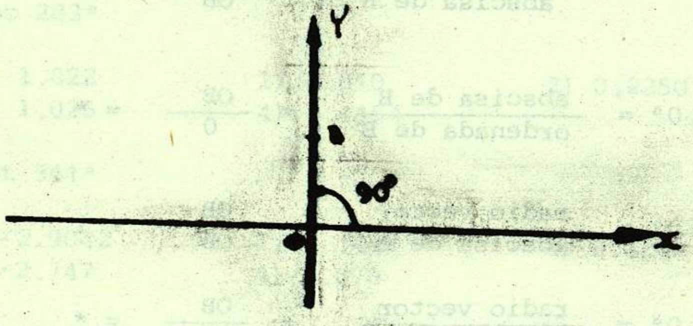

Fig. 2-18.

Por consigui[illegible],

$$\text{sen } 90° = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{radio vector}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{radio vector}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{\text{ordenada de B}}{\text{abscisa de B}} = \frac{OB}{0}\text{, no está definida}$$

$$\cot 90° = \frac{\text{abscisa de B}}{\text{ordenada de B}} = \frac{0}{OB} = 0$$

$$\sec 90° = \frac{\text{radio vector}}{\text{abscisa de B}} = \frac{OB}{0}\text{, no está definida}$$

$$\csc 90° = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada de B}} = \frac{OB}{OB} = 1$$

Si la recta OB, de la figura 2-17, da un giro de 180°, entonces $\theta = 180°$, la abscisa de B = - OB y la ordenada de B = 0. (Véase figura 2-19).

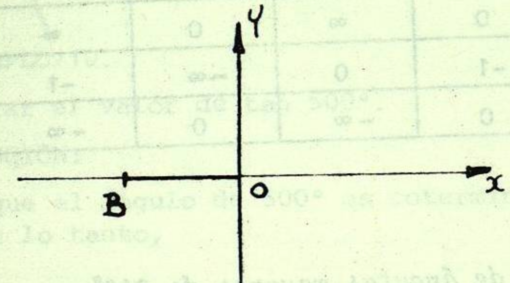

Fig. 2-19.

Por consiguiente,

sen 180° = 0	cot 180°, no está definida
cos 180° = -1	sec 180° = - 1
tan 180° = 0	csc 180°, no está definida

Y si OB da un giro de 270°, se verá que:

sen 270° = -1	cot 270° = 0
cos 270° = 0	sec 270°, no está definida
tan 270°, no está definida	csc 270° = -1

Puesto que un ángulo de 360° es coterminal de 0°, sus funciones tienen los mismos valores que las correspondientes a 0°.

Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla:

TABLA 2 - 2.

θ	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
0°	0	1	0	∞	1	∞
90°	1	0	∞	0	∞	1
180°	0	-1	0	$-\infty$	-1	∞
270°	-1	0	$-\infty$	0	$-\infty$	-1

e) Funciones de ángulos mayores de 360°.

Hemos visto que las funciones de un ángulo comprendido entre 0° y 360°, se pueden expresar en términos de un ángulo agudo. Cualquier ángulo mayor de 360° puede sustituirse por otro menor, restándole el mayor número de vueltas completas para convertirlo en un ángulo coterminal (ya que, todas las propiedades de ángulos coterminales son las mismas).

En virtud de que la posición de la recta generatriz determina tanto el valor numérico como el signo de cualquier función trigonométrica del ángulo que genera, vemos que los valores de dichas funciones pasan periódicamente por todos los valores pósitivos y negativos repitiéndose a intervalos de 360°, o de una vuelta. Así, por ejemplo, las seis funciones de 130° tendrán el mismo valor numérico y el mismo signo que el de las funciones correspondientes a 490° (360°+ 130°). Lo mismo es cierto para las funciones de 330° y 690°. Debido a esta repetición periódica, cada función trigonométrica recibe el nombre de "función periódica".

EJEMPLO 9.

Hallar el valor de sen 392°.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de 392° es coterminal del ángulo de 32°, por lo tanto,

$$\text{sen } 392° = \text{sen } 32° = 0.5299$$

EJEMPLO 10.

Hallar el valor de tan 500°.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de 500° es coterminal del ángulo de 140°, por lo tanto,

$$\tan 500° = \tan 140° = \tan(180° - 40°) = -\tan 40° = -0.8391$$

EJEMPLO 11.

Hallar el valor de cos 706°.

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de 706° es coterminal del ángulo de 346°, por lo tanto,

$$\cos 706° = \cos 346° = \cos(360° - 14°) = \cos 14° = 0.9703$$

AUTOEVALUACION 5.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas hallar el valor de:

1.- sen 393°

0) 0.8387 1) 0.5299 2) 0.5446
3) 0.8480 4) 0.5592

2.- cot 938°

0) 1.235 1) 0.7536 2) 1.327
3) 0.7813 4) 1.2799

3.- sen 1177°

0) 0.1392 1) 0.9925 2) 0.1219
3) 0.9877 4) 0.9903

4.- sec 641°

0) 1.022 1) 5.759 2) 0.1908
3) 5.2408 4) 1.019

5.- cot 836°

0) -0.4877 1) -2.050 2) -0.4663
3) -2.145 4) -0.5095

6.- sec 1382°

0) 1.167 1) 1.942 2) 0.5299
3) 1.8871 4) 1.179

7.- tan 406°

0) 0.9942 1) 1.0355 2) 0.9657
3) 1.072 4) 0.9325

8.- cos 986°

0) -0.0523 1) -0.9962 2) -0.0698
3) -0.9976 4) -0.0872

9.- sec 1157°

0) 1.022 1) 4.810 2) 0.2250
3) 1.026 4) 4.4454

10.- cos 474°

0) -0.4067 1) -0.9135 2) -0.3907
3) -0.4226 4) -0.9205

f) Funciones de ángulos negativos.

Consideremos un giro de OB necesario para formar un ángulo θ pero en sentido de las manecillas del reloj a fin de que el ángulo sea negativo.

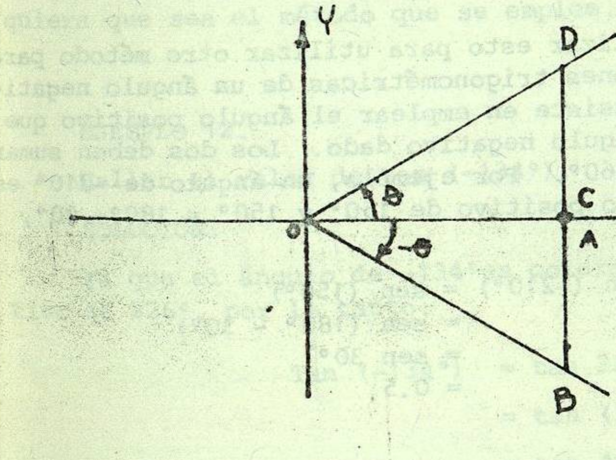

Fig. 2-20.

Nuevamente tenemos los triángulos semejantes ODC y O
con lados correspondientes iguales en magnitud, pero BA =
Procediendo en forma similar a los casos anteriores,

$$\text{sen } (-\theta) = \frac{BA}{OB} = \frac{-DC}{OD} = -\text{ sen } \theta$$

$$\cos (-\theta) = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \cos \theta$$

$$\tan (-\theta) = \frac{BA}{OA} = \frac{-DC}{OC} = -\tan \theta$$

$$\cot (-\theta) = \frac{OA}{BA} = \frac{OC}{-DC} = -\cot \theta$$

$$\sec (-\theta) = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \sec \theta$$

$$\csc (-\theta) = \frac{OB}{BA} = \frac{OD}{-DC} = -\csc \theta$$

tal como sucedió para las funciones (360° - θ).

Podemos generalizar esto para utilizar otro método pa
encontrar las funciones trigonométricas de un ángulo negat
vo. Este método consiste en emplear el ángulo positivo qu
es coterminal del ángulo negativo dado. Los dos deben sum
en valor absoluto, 360°. Por ejemplo, un ángulo de -210° e
coterminal del ángulo positivo de 150° y 150° = 180°- 30°,
así que:

$$\begin{aligned} \text{sen } (-210°) &= \text{sen } (150°) \\ &= \text{sen } (180° - 30°) \\ &= \text{sen } 30° \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (-210°) &= \cos (150°) \\ &= \cos (180° - 30°) \\ &= -\cos 30° \\ &= -0.8660 \end{aligned}$$

Obsérvese que si se han obtenido dichos valores haciendo uso de sen (- θ) = - sen θ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen } (-210°) &= -\text{sen } (210°) \\ &= -(-\text{sen } 30°) \\ &= -(-0.5) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (-210°) &= \cos (210°) \\ &= -\cos 30° \\ &= -0.8660 \end{aligned}$$

de tal suerte que los resultados deben ser iguales a cual--
quiera que sea el método que se emplee.

EJEMPLO 12.

Hallar el valor de tan (-134°).

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de -134°es coterminal del ángulo positivo de 226°, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \text{Tan } (-134°) &= \tan 226° \\ &= \tan (180° + 46°) \\ &= \tan 46° \\ &= 1.036 \end{aligned}$$

EJEMPLO 13.

Hallar el valor de csc (-327°).

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de -327° es coterminal del ángulo positivo de 33°, por lo tanto:

$$\csc(-327°) = \csc 33°$$
$$= 1.836$$

EJEMPLO 14.

Hallar el valor de sen (-25°).

SOLUCIÓN:

Ya que el ángulo de -25° es coterminal del ángulo positivo de 335° y 335° = 360° - 25°, por lo tanto:

$$\text{sen}(-25°) = \text{sen } 335°$$
$$= \text{sen}(360° - 25°)$$
$$= -\text{sen } 25°$$
$$= -0.4226$$

AUTOEVALUACIÓN 6.

Utilizando las tablas de las funciones trigonométricas, hallar el valor de:

1.- tan (-215°)

0) -0.7002 1) -1.428 2) -0.6745
3) -0.7265 4) -1.483

2.- csc (-125°)

0) -1.788 1) -1.236 2) -1.206
3) -1.743 4) -1.2208

3.- cos (-352°)

0) 0.1392 1) 0.9903 2) 0.9925
3) 0.9877 4) 0.1219

4.- tan (-15°)

0) -4.011 1) -0.2867 2) -0.2493
3) -0.2679 4) -3.732

5.- cos (-339°)

0) 0.3420 1) 0.3584 2) 0.9336
3) 0.9327 4) 0.9272

6.- cot (-151°)

0) 0.5317 1) 1.8040 2) 0.5543
3) 1.881 4) 1.732

7.- sen (-37°)

0) -0.5878 1) -0.8090 2) -0.7880
3) -0.6018 4) -0.7986

8.- csc (-189°)

0) 6.3925 1) 1.012 2) 6.314
3) 7.185 4) 1.010

9.- sen (-348°)

0) 0.9816 1) 0.1908 2) 0.2250
3) 0.9781 4) 0.2079