10.- cot (-161°)

0) 0.3443   1) 2.9042   2) 0.3249
3) 2.747   4) 3.078

g) Representación de las funciones trigonométricas por segmentos rectilíneos.

Antiguamente los matemáticos concebían las funciones seno y tangente: como "segmentos rectilíneos" referidos a una circunferencia cuyo radio era igual a la unidad. Sin embargo, hemos considerado, en páginas anteriores, a las seis funciones trigonométricas como "razones" entre dos longitudes. Podemos afirmar que ambas formas de estudiar las funciones trigonométricas están íntimamente relacionadas y aún más, es conveniente y de gran utilidad estudiar y comparar sus variaciones mediante el uso de unas figuras en que se muestran las seis funciones cuando su denominador es igual a la unidad.

Es fácil observar que toda fracción cuyo denominador sea 1 es igual en valor a su numerador, cualquiera que ésta sea. Por ejemplo,

$$\frac{3}{1} = 3; \quad \frac{9}{1} = 9; \quad \frac{15}{1} = 15; \quad \frac{x}{1} = x$$

Por consiguiente, si ideamos una figura en la que cada una de las funciones trigonométricas pueda ser representada por una razón cuyo denominador sea igual a la unidad, el valor de cada una de las funciones estará representando en la figura por la longitud de un segmento de recta que representará al numerador de su razón y en estas condiciones será posible comparar las funciones por la comparación de las longitudes de varios segmentos rectilíneos que contengan la figura.

Primero representaremos por medio de tales segmentos rectilíneos las seis funciones trigonométricas de un ángulo

agudo y después, mediante una construcción similar y consideraciones análogas, podremos considerar ángulos de cualquier magnitud en los otros tres cuadrantes.

Consideremos dos ejes de coordenadas. Sea θ un ángulo agudo cualquiera con vértice en el origen O y su lado inicial coincidiendo con la parte positiva del "eje X". Con centro en O, trazamos una circunferencia cuyo radio se considerará de longitud uno y que intersecte al lado terminal en el punto B, se traza BA perpendicular al eje X, siendo A el punto de intersección.

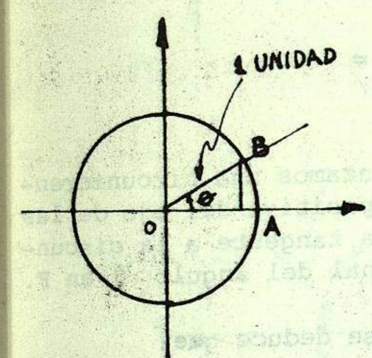


Fig. 2-21.

De donde se deduce que:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{BA}{OB} = \frac{BA}{1} = BA$$

$$\cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{1} = OA$$

Ahora, con centro en O, trazamos una circunferencia unitaria que intersecte al lado inicial en el punto C y desde C, se traza una tangente a la circunferencia que intersecte el lado terminal de θ en D.

De donde se deduce que:

$$\tan\theta = \frac{DC}{OC}$$

$$= \frac{DC}{1}$$

$$= DC$$

$$\sec\theta = \frac{OD}{OC}$$

$$= \frac{OD}{1}$$

$$= OD$$

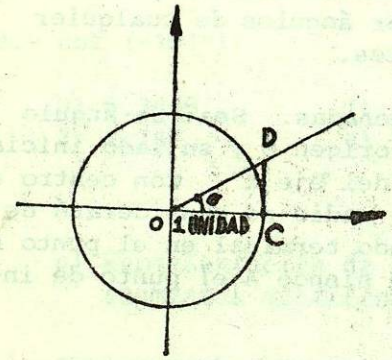


Fig. 2-22.

Y por último con centro en O, trazamos una circunferencia unitaria que intersecte la parte positiva del eje de las ordenadas en G y desde G, se traza una tangente a la circunferencia que intersecte al lado terminal del ángulo θ en F.

De donde se deduce que:

$$\cot\theta = \frac{OE}{FE}$$

$$= \frac{OE}{OG}$$

$$= \frac{OE}{1}$$

$$= OE$$

$$\csc\theta = \frac{OF}{FE}$$

$$= \frac{OF}{OG}$$

$$= \frac{OF}{1}$$

$$= OF$$

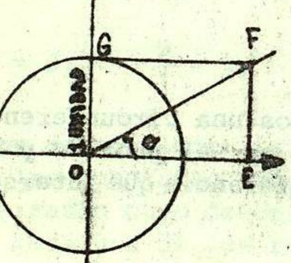


Fig. 2-23.

Para mayor claridad, los segmentos de recta anteriores se muestran todos en las figuras 2-24, 2-25 y 2-26.

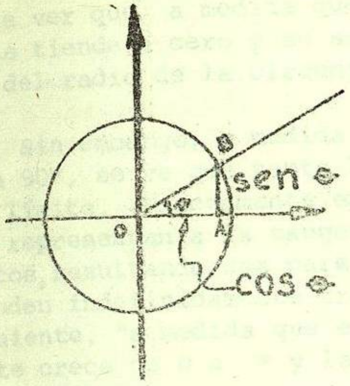


Fig. 2-24.

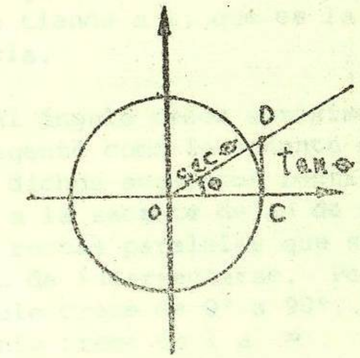


Fig. 2-25.

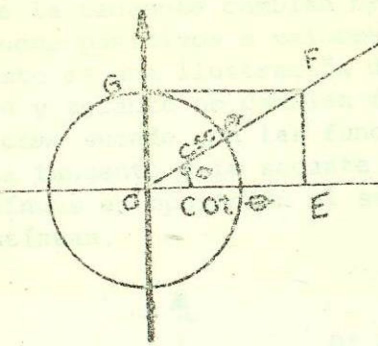


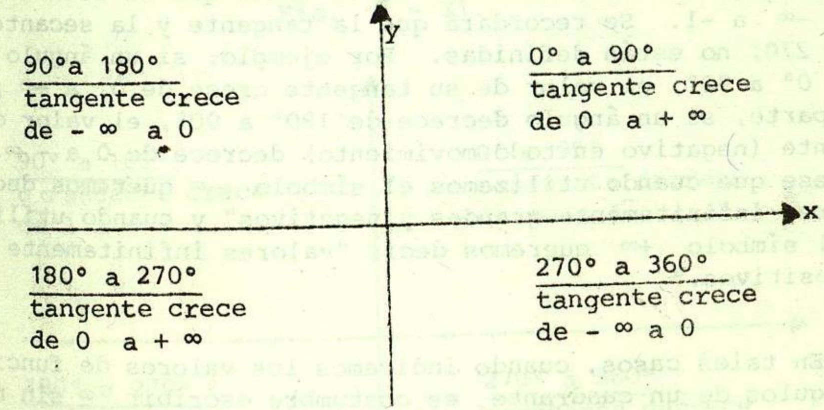
Fig. 2-26

Haciendo exactamente la misma construcción con el procedimiento anterior para ángulos con su lado terminal comprendido en el segundo, tercero y cuarto cuadrante, se encontrará de inmediato que las funciones de $(180° - \theta)$, $(180° + \theta)$ y $(360° - \theta)$ son numéricamente iguales a las funciones de θ.

2. Tangente y secante. En las figuras 2-22 y 2-25 se puede ver que a medida que el ángulo tiende a cero, su tangente tiende a cero y su secante tiende a 1, que es la longitud del radio de la circunferencia.

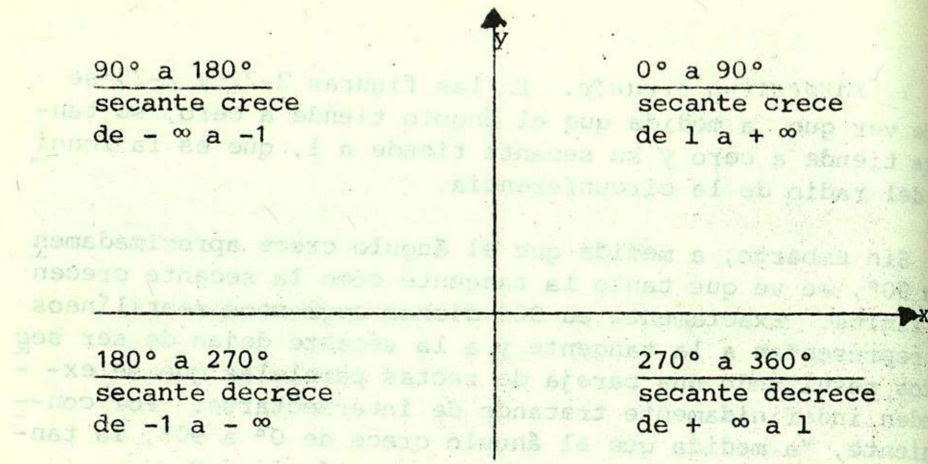
Sin embargo, a medida que el ángulo crece aproximadamente a 90°, se ve que tanto la tangente como la secante crecen sin límite. Exactamente en 90° dichos segmentos rectilíneos que representan a la tangente y a la secante dejan de ser segmentos, resultando una pareja de rectas paralelas que se extienden indefinidamente tratando de intersectarse. Por consiguiente, "a medida que el ángulo crece de 0° a 90°, la tangente crece de 0 a ∞ y la secante crece de 1 a ∞ .

Al pasar el lado terminal al segundo cuadrante, por pequeño que se considere el incremento, se verá que los valores de la secante y de la tangente cambian bruscamente de valores infinitamente grandes positivos a valores infinitamente grandes negativos. Esto es una ilustración del hecho de que las funciones tangente y secante no cambian de valor de un modo suave y continuo como sucede con las funciones seno y coseno. Por esta razón, la tangente y la secante reciben el nombre de funciones discontínuas en oposición al seno y al coseno que son funciones contínuas.



Variación de los valores de la tangente.

Fig. 2-29.



Variación de los valores de la secante.

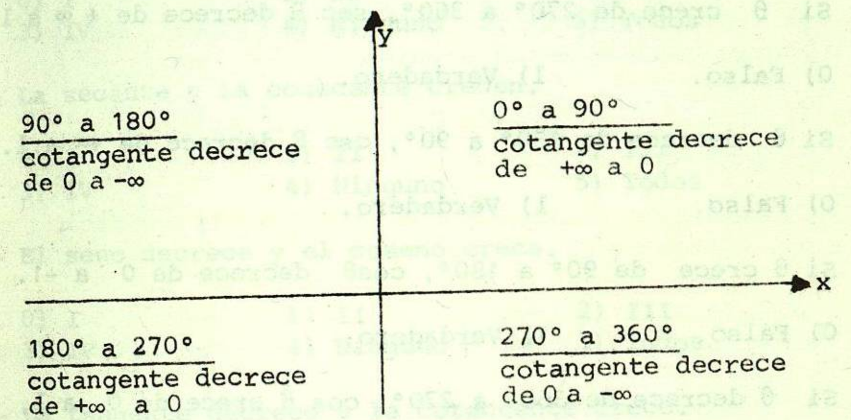
Fig. 2-30.

Al pasar el lado terminal al segundo cuadrante, la tan te y la secante, que en 90° eran ambas infinitas, ahora las dos tienen valores finitos que resultan cada vez más pequeñ a medida que el ángulo tiende a 180°. Sin embargo, debido a que ambos grupos de segmentos rectilíneos son negativos, dic disminución en longitud indica un crecimiento en valor numér co: la tangente crece de -∞ a 0, en tanto que la secante cr ce de -∞ a -1. Se recordará que la tangente y la secante, 90° y 270° no están definidas. Por ejemplo, si un ángulo cr ce de 0° a 90°, el valor de su tangente crece de 0 a +∞ ; otra parte, si un ángulo decrece de 180° a 90°, el valor de tangente (negativo en todo movimiento) decrece de 0 a - ∞. cuérdese que cuando utilizamos el símbolo -∞ queremos decir "valores infinitamente grandes y negativos" y cuando utiliza mos el símbolo +∞ queremos decir "valores infinitamente gr des positivos."

En tales casos, cuando indicamos los valores de funcio de ángulos de un cuadrante, es costumbre escribir ∞ sin ni signo. Sin embargo, cuando se describe la variación de las ciones para un ángulo que varía, es conveniente indicar el s no más o el signo menos cuando una función tiende a un valor

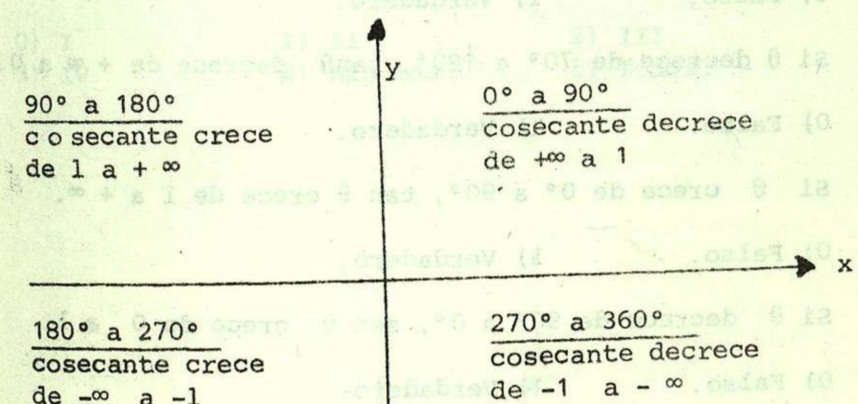
infinito positivo o un valor infinito negativo.

3. Cotangente y cosecante. las figuras 2-23 y 2-26 muestran las variaciones de la cotangente y la cosecante en el primer cuadrante. Dejamos el análisis al estudiante con la recomendación de comparar dichas figuras con las figuras 2-31 y 2-32.



Variación de los valores de la cotangente.

Fig. 2 - 31.



Variación de los valores de la cosecante.

Fig. 2 - 32.

AUTOEVALUACION 7.

Observando las figuras relativas, decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1.- Si θ crece de 90° a 180°, cot θ decrece de 0 a $-\infty$.

0) Falso. 1) Verdadero.

2.- Si θ crece de 270° a 360°, sec θ decrece de $+\infty$ a 1.

0) Falso. 1) Verdadero.

3.- Si θ decrece de 180° a 90°, csc θ decrece de $+\infty$ a 1.

0) Falso. 1) Verdadero.

4.- Si θ crece de 90° a 180°, cosθ decrece de 0 a -1.

0) Falso. 1) Verdadero.

5.- Si θ decrece de 360° a 270°, cos θ crece de 0 a 1.

0) Falso. 1) Verdadero.

6.- Si θ crece de 180° a 270°, cotθ decrece de 1 a 0.

0) Falso. 1) Verdadero.

7.- Si θ decrece de 70° a 180°, tanθ decrece de $+\infty$ a 0.

0) Falso. 1) Verdadero.

8.- Si θ crece de 0° a 90°, tan θ crece de 1 a $+\infty$.

0) Falso. 1) Verdadero.

9.- Si θ decrece de 90° a 0°, sen θ crece de 0 a 1.

0) Falso. 1) Verdadero.

10.- Si θ crece de 180° a 270°, sen θ decrece de 0 a -1.

0) Falso. 1) Verdadero.

¿En qué cuadrante ocurren los siguientes cambios? (Considérese incrementos positivos para el ángulo).

11.- El coseno crece y la cosecante decrece.

0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos

12.- La secante y la cosecante crecen.

0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos

13.- El seno decrece y el coseno crece.

0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos

14.- La tangente decrece y la cotangente crece.

0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos

15.- La tangente crece y la cotangente decrece.

0) I 1) II 2) III
3) IV 4) Ninguno 5) Todos.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO II.

Selecciona la respuesta correcta subrayándola.

1.- Cuando el giro de un ángulo es en el sentido contrar[io] al de las manecillas del reloj, el ángulo es:

1) Agudo. 2) Positivo 3) Obtuso.
4) Negativo.

2.- La intersección de los ejes que dividen un plano e[n] cuatro cuadrantes se denomina:

1) Origen. 2) Vértice. 3) Punto.
4) Ordenada.

3.- El triángulo formado por la abscisa, la ordenada y el [ra]dio vector recibe el nombre de:

1) Triángulo isósceles. 2) Triangulo oblicuángul[o]
3) Triángulo equilátero. 4) Triangulo de referenc[ia]

Si $\cos\Theta = -3/5$ y la $\cot\Theta$ es positiva; contesta lo s[i]guiente: (preguntas 4, 5 y 6).

4.- ¿En qué cuadrante está Θ ?

1) 1er. cuadrante. 2) 2º cuadrante.
3) 3er. cuadrante. 4) 4º cuadrante.

5.- ¿Qué valor tiene la $\sec\Theta$?

1) 4/5 2) 5/4 3) -5/3
4) 1/2

6.- ¿Cuál es el valor de Θ?

1) 233°7'48" 2) 36°50' 3) 38°40'
4) 51°20'

A partir de sen 300°, contesta lo siguiente:

7.- Expresar la función en términos de un ángulo agudo.

1) Sen 60° 2) Sen - 30° 3) Sen 30°
4) -Sen 60°

8.- Dar su valor numérico como una razón:

1) 2/3 2) $-\sqrt{3}/2$ 3) 2
4) 1

A partir de sec (-148°20') contesta lo siguiente:

9.- Expresar la función en términos de un ángulo agudo.

1) -Sec 31°40' 2) Sec 51°40' 3) Csc 51°40'
4) -Csc 51°40'

10.- Dar el valor numérico de la función por tablas:

1) 1.2750 2) -1.1749 3) 1.578
4) -1.293

11.- Relaciona correctamente las siguientes columnas:

a) 0.2994 ______ csc 165°

b) -3.864 ______ tan (180°+ 16° 40')

c) 0.02994 ______ sec 298°

d) 2.1301

e) -2.130

f) 3.8637

12.- Relaciona correctamente las siguientes columnas:

a) El seno decrece de 1 a 0.	_____	El ángulo crece de 90° a 180°.
b) El coseno crece de 0 a 1.	_____	El ángulo crece de 0°a 9
c) La tangente crece de -1 a 0.	_____	El ángulo decrece de 360° a 270°.
d) El seno decrece de ∞ a 0.		
e) La cosecante crece de ∞ a -1.		
f) La cotangente crece de 0 a 1.		
g) El coseno decrece de 1 a 0.		

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO II.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- 2	8.- 2
2.- 3	9.- 3
3.- 1	10.- 0
4.- 0	11.- 2
5.- 4	12.- 1
6.- 4	13.- 4
7.- 1	14.- 3

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- 1	6.- 3
2.- 4	7.- 3
3.- 0	8.- 0
4.- 2	9.- 2
5.- 1	10.- 4

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- 1	6.- 0
2.- 3	7.- 2
3.- 0	8.- 4
4.- 2	9.- 1
5.- 4	10.- 3

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- 0
2.- 2
3.- 1
4.- 3
5.- 2

6.- 4
7.- 1
8.- 4
9.- 0
10.- 3

AUTOEVALUACIÓN 5.

1.- 2
2.- 4
3.- 1
4.- 3
5.- 0

6.- 3
7.- 1
8.- 2
9.- 4
10.- 0

AUTOEVALUACIÓN 6.

1.- 0
2.- 4
3.- 1
4.- 3
5.- 2

6.- 1
7.- 3
8.- 0
9.- 4
10.- 1

AUTOEVALUACIÓN 7.

1.- 1
2.- 1
3.- 1
4.- 1

9.- 0
10.- 1
11.- 3
12.- 1

5.- 0
6.- 0
7.- 0
8.- 0

13.- 2
14.- 4
15.- 5

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO II.

1.- 2
2.- 1
3.- 4
4.- 3
5.- 3
6.- 1

7.- 4
8.- 2
9.- 1
10.- 2
11.- f,a, d.
12.- a,g, g.