MEDIA CIRCULAR.

Hasta ahora, hemos usado como medida circular los grados y minutos para expresar un ángulo. La medida de los ángulos que hoy es común, tuvo su origen en Alejandría a principios de la era cristiana. Ahí, los matemáticos griegos dividieron la circunferencia en 360 partes iguales llamados "grados", y cada grado, a su vez en 60 partes iguales llamados "minutos".

En esta unidad veremos otra forma de medir los ángulos que son los radianes. Veremos cómo podemos transformar grados o medidas sexagesimales a radianes y viceversa y aplicaremos estas condiciones en el cálculo de velocidades angulares, longitud de arco o áreas circulares.

Te deseamos mucho éxito en el estudio de esta unidad, ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir con tus propias palabras los conceptos radián y velocidad angular.

2.- Transformar correctamente ángulos de medidas sexagesimal a radianes y viceversa.

3.- Calcular correctamente la longitud de un arco de circunferencia, mediante la fórmula:

$$\text{Arco} = r \cdot \theta$$

4.- Calcular correctamente la velocidad angular y lineal de cualquier sector circular, mediante las fórmulas.

$$v = r \cdot \omega$$
$$\omega = \theta / t$$

siendo:

ω = velocidad angular
v = velocidad lineal
r = radio
θ = número de radianes
t = tiempo

5.- Calcular correctamente el área de un sector circular, mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{r^2 \theta}{2}$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Para que resuelvas satisfactoriamente la unidad estudia el capítulo III de tu libro.

2.- Resuelve las autoevaluaciones que vienen en el capítulo conforme vayas avanzando en tu estudio.

3.- Como autoevaluación de la unidad, resuelve la autoevalua- ción del capítulo.

I D E N T I D A D E S.

Así como en el álgebra existen dos clases de ecuaciones que son las condicionales y las idénticas, en trigonometría también las hay, donde la incógnita es el valor del ángulo.

En esta unidad veremos cómo podemos, a través de ciertas relaciones dadas, demostrar la veracidad de identidades trigonométricas para un ángulo, así como también a expresar cualquier función en términos de otra función.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Discriminar, a partir de las relaciones fundamentales, aquellas que se puedan usar para expresar las funciones en términos de otras, dando a su vez una simple expresión de las mismas.

2.- Demostrar o comprobar, a partir de las identidades trigonométricas fundamentales, la veracidad de enunciados en forma de ecuación idéntica.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia para esta unidad la lección 1 del capítulo IV. Como verás, tanto en el objetivo 1 como en el objetivo 2 intervienen las relaciones fundamentales, por lo que te recomendamos trates de demostrarlas como si fueran identidades sencillas.

Después, úsalas en el objetivo 1, resolviendo la autoevaluación 1. En caso de no poder, pregúntale al asesor la duda que tengas.

Para el objetivo 2, estudia primero los ejemplos que vienen para que visualices mejor lo que vas a hacer, cuando vayas a resolver la autoevaluación 2.

2.- Como autoevaluación de la unidad resuelve la autoevaluación de la lección 1, volviendo a estudiar el objetivo de los problemas en que hayas salido mal.

CAPITULO 3.

MEDIDA CIRCULAR.

3-1 INTRODUCCIÓN.

Así como la longitud de un segmento rectilíneo es la razón del segmento a alguna longitud patrón escogido como unidad, la magnitud de un ángulo es igual a la razón del ángulo dado a otro que se elige como unidad. Las unidades angulares más frecuentemente usadas son el grado y el radián que se discutirán en este capítulo.

Sin duda alguna, el ángulo recto es la más simple y la más antigua unidad de medida angular. Su uso va unido a nociones tan familiares como son el cambio en dirección de lo vertical a lo horizontal o del cambio de una línea notre-sur a otra oriente-poniente.

Aunque es demasiado grande para ser empleado como un instrumento científico ideal, todavía permanece en algunos teoremas geométricas tradicionales cuyo enunciado se remonta hasta la antigüedad.

Para la navegación con uso del compás, el ángulo recto se dividió en ocho "puntos". Un "punto" era una unidad muy adecuada para dirigir una embarcación. Los astrónomos, desde la época de Babilonia, tuvieron necesidad de una graduación más fina del círculo. Se debe a ellos el más conocido de los sistemas científicos de medición angular, el sistem sexagesimal, en el cual la unidad de medida es el grado. grado es un ángulo tal que si su vértice se coloca en el c tro de un circulo intercepta un arco cuya longitud es igua a 1/360 de la circunferencia. Este sistema de medición es empleado en la mayor parte de los trabajos prácticos, así mo en topografía y en navegación.

El sistema circular de medida angular se emplea casi clusivamente en cálculo diferencial e integral y en divers ramas de la ciencia. La unidad del sistema circular es el radián y queda caracterizado por la siguiente definición e ilustrado en la figura 1.

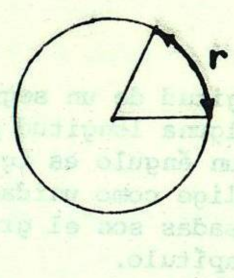

Fig. 1.

3-2 DEFINICIÓN DE RADIÁN.

Un radián es un ángulo tal que si su vértice se coloca en el centro de un círculo intercepta un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

Otras unidades de medida angular empleadas con más o me nos frecuencia son la milésima y la revolución.

La milésima es el ángulo de medida empleado en la rama de artillería del ejército de los Estados Unidos, y es el ángulo subtendido por un arco cuya magnitud es 1/6400 de la circunferencia.

En el sistema inglés de medida, esta unidad tiene la ventaja de que un ángulo central de una milésima intercepta un arco de aproximadamente, una yarda en un círculo de radio 1000 yardas.

La velocidad angular de una rueda en rotación se expresa por lo común en revoluciones por unidad de tiempo, generalmente en revoluciones por minuto (abreviado como r.p.m). Obviamente, una revolución es igual a 2 π radianes ó 360°.

3-3 RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANTES.

Puesto que la longitud de una circunferencia es 2 veces el radio, la circunferencia subtiende un ángulo central de 2 radianes. Por otro lado, la circunferencia subtiende un ángulo central de 360°, por tanto,

$$2\pi \text{ radianes} = 360°$$

$$\pi \text{ radianes} = 180° \qquad (1)$$

Lo anterior, es la relación fundamental entre grados y radianes, y por medio de ella se puede pasar de grados a radianes y de radianes a grados.

Por ejemplo, dividiendo cada miembro de la ecuación(1) por 180, se tiene

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

análogamente,

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Los ángulos 30°, 45° y 60°, así como sus múltiplos, son de uso frecuente y se pueden convertir fácilmente en radianes expresándolos como una fracción de 180° y sustituyendo luego 180° por π radianes. De manera análoga se pueden convertir otros ángulos de grados a radianes.

EJEMPLOS.

1.- $30° = \frac{180°}{6} = \frac{\pi}{6}$ radianes.

2.- $45° = \frac{180°}{4} = \frac{\pi}{4}$ radianes.

3.- $120° = \frac{2\ (180°)}{3} = \frac{2\pi}{3}$ radianes.

4.- $25° = \frac{25\ (180°)}{180} = \frac{5\pi}{36}$ radianes.

Cuando un ángulo está dado en grados, minutos y segundos los minutos y segundos se convierten a fracción decimal de grado y se procede luego como en los ejemplos anteriores.

EJEMPLO 5.

$$25° \ 36' \ 48'' = 25° \ 2208''$$

$$= 25 \ \frac{2208}{3600} \text{ grados (puesto que } 3600'' = 1°)$$

$$= 25.613° = \frac{25.613}{180} \pi \text{ radianes}$$

$$= (0.14229)\ (3.1416) \text{ radianes}$$

$$= 0.44702 \text{ radianes}$$

Los ángulos expresados en radianes se escriben frecuentemente como raciones de π, por ejemplo, π/6, 5 π/3 y π/12. Los ángulos así expresados se convierten en grados, sustituyendo π por 180° y simplificando el resultado.

EJEMPLOS.

6.- $\pi/6$ radianes $= \frac{180°}{6} = 30°$

7.- $5\ \pi/3$ radianes $= \frac{5(180°)}{3} = 300°$

8.- $\pi/12$ radianes $= \frac{180°}{12} = 15°$

En los temas que siguen se usarán indistintamente radianes y grados como unidades de medida angular. Cuando sea necesaria una aproximación aceptable a un segundo se hará uso de la equivalencia, 1 radián = 57°17' 45", puesto que

$$1 \text{ radián} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180}{3.1416}$$

$$= 57.2957°$$

$$= 57°17' \ 45'' \quad \text{(aprox.)}$$

Cuando un ángulo se expresa en radianes es costumbre omitir la palabra radián. Por ejemplo, se escribe $\pi/4$ y se lee "pi sobre 4 radianes".

AUTOEVALUACION 1.

Convertir a radianes los ángulos de los problemas siguientes:

1.- 60°

2.- 18°

3.- 240°

4.- 210°

5.- 72°

6.- 108°

7.- 75°

8.- 16°

9.- 24°

10.- 585°

11.- 22°30'

12.- 18°45'

13.- 7°52' 30"

14.- 11°6' 40"

15.- 3 ángulos rectos

16.- 4 revoluciones

Convertir a grados, minutos y segundos los ángulos de los problemas siguientes:

17.- $\pi/3$

18.- $\pi/9$

19.- $4\pi/5$

20.- $3\pi/4$

21.- $4\pi/9$

22.- $5\pi/6$

24.- $\pi/16$

25.- $\pi/32$

26.- $9\pi/160$

27.- 2.1 rad.

28.- 5.7 rad.

29.- 0.62 rad.

23.- $\pi/8$

30.- 3.41 rad.

3-4 ANGULO CENTRAL Y LONGITUD DE UN ARCO.

Una de las ventajas del sistema circular de medida angular radica en la facilidad con que puede determinarse la longitud de un arco, interceptado por un ángulo central medido en radianes. Por ejemplo, si en un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes intercepta un arco de "a" unidades de longitud, entonces, de acuerdo con la definición del radián,

$$\frac{a}{r} = \theta$$

de donde,

$$a = r\,\theta \qquad (2)$$

Por tanto, para obtener la longitud de un arco, se multiplica el número de radianes del ángulo central por el radio del círculo.

EJEMPLO 1.

En un círculo de 12.6 cm de radio, calcular la longitud del arco interceptado por un ángulo central de 36°.

SOLUCIÓN:

Se expresa primero el ángulo central en radianes. Puesto que,

$$1° = \pi/180$$

entonces,

$$36° = 36(\pi/180) \text{ radianes} = \pi/5 \text{ rad.}$$

Luego, según la ecuación (2),

$$a = 12.6\,(\pi/5) = 7.92 \text{ cm (aprox.)}$$