3-5 VELOCIDAD ANGULAR Y VELOCIDAD LINEAL.

Si un rayo gira alrededor de su origen, su velocidad angular es el ángulo que describe en la unidad de tiempo. Por otra parte, la velocidad angular de un cuerpo en rotación, por ejemplo una rueda, la hélice de un avión o el rotor de una turbina, es la velocidad angular de un rayo situado en el cuerpo y perpendicular al eje de rotación. Por lo general, la velocidad angular se expresa en radianes, grados, o revoluciones por unidad de tiempo.

La velocidad lineal de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una recta es el número de unidades lineales, metros, kilómetros, etc., recorridos por un punto del cuerpo en la unidad de tiempo. La velocidad lineal de un cuerpo en rotación, como por ejemplo, la de una piedra amarrada a una cuerda que se hace girar, es la velocidad que tomaría el cuerpo si cesaran bruscamente las causas que le hacen desplazarse a lo largo de una circunferencia. Si la persona que hace girar la piedra está situada en la superficie de la Tierra y camina en cualquier dirección, la piedra está sujeta a dos velocidades, la velocidad de la persona y la velocidad debida al movimiento de rotación. La primera está referida a la Tierra y la segunda al centro de rotación. La velocidad de un punto situado en un cuerpo que gira con respecto al centro de rotación depende de su distancia a dicho centro. A continuación se explica cómo determinar tal velocidad.

Si "ω" la letra empleada para representar la velocidad angular de un cuerpo en rotación y "v" la velocidad lineal de un punto del cuerpo situado a una distancia "r" del eje de rotación. Puesto que el punto en cuestión se mueve a lo largo de una trayectoria circular, entonces el arco recorrido por el punto, en la unidad de tiempo, es el arco interceptado en el círculo de radio "r" por un ángulo central de "ω" radianes. Luego, de acuerdo con la ecuación (2),

$$v = \omega r \qquad (3)$$

Si la velocidad angular se expresa en otras unidades angulares diferentes de radianes, tales unidades se deben convertir a radianes antes de aplicar la fórmula (3).

Cuando un cuerpo en rotación se traslada sobre una superficie plana, sin resbalar, se tiene de nuevo el caso en el cual cada punto del cuerpo se encuentra sujeto a dos velocidades. Una es la velocidad de traslación del cuerpo en el plano y la otra es la velocidad lineal de un punto particular del cuerpo con respecto al eje de rotación, y que se debe a la rotación misma. La velocidad de traslación del cuerpo en el plano se conoce como velocidad lineal del cuerpo con respecto al plano, y es igual a la velocidad lineal de un punto de la circunferencia del cuerpo con respecto al eje de rotación.

EJEMPLO 1.

Los neumáticos de un automóvil giran a razón de 374 rpm y su diámetro es de 90 cm. Calcular la velocidad del automóvil con respecto a la Tierra, en Km por hora.

SOLUCIÓN:

$$374 \text{ rpm} = 374(2\pi)$$
$$= 748\pi \text{ radianes por minuto}$$

Luego, de acuerdo con la ecuación (3),

$$v = (748\pi)45 \text{ cm por minuto.}$$

Para reducir esta cantidad a Km por hora, se multiplica por 60 (número de minutos en una hora) y se divide entre 100000 (número de centímetros en un kilómetro).

$$\frac{(748\pi)\ 45 \times 60}{100,000} = 63.448 \text{ Km. por hora (aprox.)}$$

EJEMPLO 2.

Dos ruedas de 30 cm y 120 cm de diámetro, respectivamente, se conectan mediante una banda. La rueda mayor gira a razón de 60 rpm . Determinar la velocidad lineal de la --

banda y la velocidad angular de la rueda menor, en radianes por minuto.

SOLUCIÓN:

Puesto que la velocidad lineal de la banda es igual a la velocidad lineal de la rueda más grande, se puede obtener haciendo uso de la fórmula (3). El radio de la rueda es de 60 cm y su velocidad angular, ω, de $60 \times 2\pi$. En consecuencia $v = 60 \times 60 \times 2\pi = 7200\pi = 22619.45$ cm. por minuto.

Puesto que la velocidad lineal de un punto de la circunferencia de la rueda más pequeña es igual a la velocidad de la banda, y dado que el radio de aquella es 15 cm, de acuerdo con la fórmula (3), se obtiene:

$$22619.45 = \omega(15)$$

$$\omega = \frac{22619.45}{15}$$

$$= 1508 \text{ radianes por minuto.}$$

(aprox.)

NOTA:

Este resultado se puede verificar como sigue: el radio de la rueda más pequeña es 1/4 del de la rueda más grande. En consecuencia, su velocidad angular es 4 veces mayor. Esto es, $\omega = 4(120\pi) = 480\pi = 1508$.

AUTOEVALUACION 2.

Calcular la longitud del arco interceptado para los valores del radio y del ángulo central dados en los siguientes problemas:

1.- 4 rad, 150 cm.

2.- 1.7 rad, 60 cm

3.- 30°, 120 cm

4.- 72°, 1.80 m

5.- 76°, 42 m

6.- 225°, 58 m

7.- 6°15', 100 cm

8.- 33° 45', 22.20 cm

Hallar, en radianes y en grados, el ángulo central que corresponde a los valores del arco interceptado y del radio dados en los siguientes problemas. La longitud de arco se da primero. Supóngase que los datos de cada problema son exactos y obténgase el valor del ángulo en radianes con cuatro cifras, y en grados con aproximación de una centésima.

9.- 80 cm, 27.5 cm

10.- 28 m, 13 m

11.- 5 m, 12 m

12.- 3.92 pies, 7.61 pies.

13.- Calcular en radianes, el ángulo que forman las manecillas de un reloj que marca las 5.

14.- ¿Cuántos radianes recorre el minutero de un reloj en 35 minutos?

15.- La manecilla horaria de un reloj es de 4 cm de longitud. ¿Cuál es la distancia recorrida por su punto en 3 horas 30 minutos?

16.- Una curva de una carretera corresponde a un arco de un círculo de radio 450 m, subtendido por un ángulo central de 28°. ¿Cuánto tiempo empleará un automóvil en recorrer la curva si su velocidad es de 72 Km/h?

17.- Las ruedas traseras de un vagón tienen un diámetro de 108 cm. ¿Cuánto avanza el vagón si uno de los rayos de una rueda gira 36°?

18.- ¿Cuántas vueltas completas debe dar una de las ruedas del problema anterior para que el vagón recorra un kilómetro?

19.- Un trompo gira a razón de 200 rpm. Si su diámetro máximo es de 10 cm, determinar, en Km por hora, la velocidad lineal de un punto situado en su parte más ancha.

20.- Un automóvil marcha a una velocidad de 90 Km por hora. Si el diámetro de los neumáticos es de 70 cm, calcular la velocidad angular, en radianes por segundo.

21.- En un taller, una polea de 1.20 m de diámetro está conectada a otra de 30 cm de diámetro mediante una banda. Si la polea mayor gira a razón de 60 rpm, calcular la velocidad de rotación de la más pequeña y la velocidad lineal de la banda.

22.- Los centros de dos engranes quedan a 50 cm uno de otro. cuando el menor de ellos se mueve 6 radianes el otro se mueve 4, calcular el radio de cada engrane.

23.- El radio de un círculo es de 25 cm. Desde los extremos de un arco de 55 cm de longitud trazar dos tangentes al círculo. Si se prolongan las tangentes hasta que se corten, determinar el ángulo agudo que se forma, con aproximación a 1 grado.

24.- En un rectángulo, la longitud de cada uno de sus lados menores es de 27 cm. Si el rectángulo está inscrito en un círculo de 100 cm. de diámetro, determinar la longitud del arco interceptado por cualquiera de los lados menores.

25.- Una grúa de 15 m de longitud se eleva hasta formar un ángulo de 60° con la horizontal, y luego se hace girar horizontalmente 72°. ¿Cuál es la distancia recorrida por el extremo superior de la grúa en estas dos operaciones?

3-6 ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR.

En geometría plana sabemos que el área de un sector circular = 1/2: r.arco.

Ahora, sustituyendo el arco por la fórmula que se utiliza para encontrar su longitud, se tiene:

$$\text{área del sector circular} = 1/2\ r.\ r.\theta = \frac{r^2.\theta}{2}$$

EJEMPLO.

Hallar el área de un sector circular cuyo ángulo central es de 3 radianes y la circunferencia tiene 5 cm de radio.

SOLUCIÓN:

$$\text{área del sector circular} = \frac{r^2.\theta}{2} = \frac{(25)(3)}{2} = \frac{75}{2} = 37.5\ cm^2$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- El radio de una circunferencia es de 5 m y el ángulo de un sector circular es 72°. Determinar el área del sector.

2.- Determinar el área de un sector circular en una circunferencia de 16 cm de radio, sabiendo que el ángulo del sector circular es de 2. 5 radianes.

3.- Determinar el área de un sector circular sabiendo que su ángulo es de 240° y el radio de la circunferencia es de 1 m.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

Subraya la respuesta correcta.

Expresa el siguiente ángulo en radianes con una aproximación de tres cifras decimales:

1.- 144°

1) 0.251 2) 2.513 3) 5.213
4) 3.1426

2.- 0.7854 radianes (sugerencia: usa $\pi/4$).

1) 45° 2) 40° 3) 50°
4) 50°30'

3.- En una circunferencia, ¿cuántas veces está contenida la longitud del radio?

1) 2 2) 2π 3) π
4) 4π

Resuelve correctamente los siguientes problemas:

4.- Calcular el ángulo central en radianes, si el arco subtendido vale 16 y el radio vale 8.

1) 1 2) 3 3) 2
4) 0

5.- ¿Cuántos radianes describe la manecilla que señala los minutos de un reloj en 45 minutos?

1) 4.7124 2) 3.1416 3) 4.512
4) 5.1417

6.- Si se multiplica la velocidad angular de una rotación por el número de unidades de tiempo empleado en generar dicha rotación, se obtiene:

1) cm/seg. 2) rad 3) m/seg.
4) seg/m.

7.- La velocidad angular de una rueda es de 7 radianes por segundo. Si su diámetro es de 15 cm, determinar la velocidad lineal de un punto sobre su periferia en cm por minuto.

1) 3150 2) 525 3) 1850
4) 720

8.- Determinar el área de un sector circular, sabiendo que su ángulo es 220°, y el radio de la circunferencia es de 1.8 metros.

1) 2 π 2) 1.98 π 3) 3 π
4) 2.14 π

9.- Relaciona correctamente los siguientes números, indicando la secuencia correcta:

a) 2.094 rad. ______ 120°

b) π/2 rad. ______ circunferencia entre el radio.

c) π/3 rad.

d) 0.01745 rad. ______ media circunferencia.

e) π rad.

f) π/6 rad.

g) 2π rad.

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO III.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- π/3
2.- π/10
3.- 4π/3
4.- 7π/6
5.- 2π/5
6.- 3π/5
7.- 5π/12
8.- 4π/45
9.- 2π/15
10.- 13π/4
11.- π/8
12.- 5π/48
13.- 7π/160
14.- 5π/81
15.- 3π/2
16.- 8π
17.- 60°
18.- 20°
19.- 144°
20.- 135°
21.- 80°
22.- 150°
23.- 22°30'
24.- 11°15'
25.- 5°37' 30"
26.- 10°7' 30"
27.- 120°19' 16"
28.- 326°35' 9"
29.- 35°31' 24"
30.- 195°22' 43"

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- 600 cm
2.- 102 cm
3.- 20 π cm
4.- 72 π / 100 m
5.- 266π/15 m
6.- 72.5π m
7.- 10.908 cm
8.- 13.077 cm

9.- 2.9091 rad. 166.68°

10.- 2.1538 rad. 123.41°

11.- 0.4167 rad. 23.87°

12.- 0.5151 rad. 29.51°

13.- 5 π/6

14.- 7 π/6

15.- 7 π/ 3 cm

16.- 11 seg

17.- 33.93 cm

18.- 294.73

19.- 3.77

20.- 71.429

21.- 240 rpm, 3.77 m por seg

22.- 30 cm, 20 cm

23.- 54°

24.- 27.339 cm

25.- 34.558 m.

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- 15.708 m^2

2.- 320 cm^2

3.- 2.094 m^2

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

1.- 2

2.- 1

3.- 2

4.- 3

5.- 1

6.- 2

7.- 1

8.- 2

9.- a,g,e

CAPITULO 4.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDÉNTICAS.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Las funciones trigonométricas que ya conocemos se correlacionan en distintas formas de gran utilidad. En este capítulo nos familiarizamos con muchas de estas relaciones que son herramienta poderosa para atacar problemas de matemáticas avanzadas y que también sirven para aclarar conceptos básicos en los campos de la física clásica y moderna.

4-2 ECUACIONES.

La palabra "ecuación", como comúnmente se emplea, se refiere a una "ecuación condicional" tal como: $2x + 3 = 7$, en la cual los dos miembros son iguales para ciertos valores de la variable x, pero desiguales para otros; en este caso, son iguales solamente si $x = 2$. Sin embargo, también consideraremos "ecuaciones idénticas" las cuales son siempre ciertas; es decir son ciertas para todos los valores permitibles de la variable.