9.- 2.9091 rad. 166.68°

10.- 2.1538 rad. 123.41°

11.- 0.4167 rad. 23.87°

12.- 0.5151 rad. 29.51°

13.- 5 π/6

14.- 7 π/6

15.- 7 π/ 3 cm

16.- 11 seg

17.- 33.93 cm

18.- 294.73

19.- 3.77

20.- 71.429

21.- 240 rpm, 3.77 m por seg

22.- 30 cm, 20 cm

23.- 54°

24.- 27.339 cm

25.- 34.558 m.

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- 15.708 m^2

2.- 320 cm^2

3.- 2.094 m^2

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

1.- 2

2.- 1

3.- 2

4.- 3

5.- 1

6.- 2

7.- 1

8.- 2

9.- a,g,e

CAPITULO 4.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS IDÉNTICAS.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Las funciones trigonométricas que ya conocemos se correlacionan en distintas formas de gran utilidad. En este capítulo nos familiarizamos con muchas de estas relaciones que son herramienta poderosa para atacar problemas de matemáticas avanzadas y que también sirven para aclarar conceptos básicos en los campos de la física clásica y moderna.

4-2 ECUACIONES.

La palabra "ecuación", como comúnmente se emplea, se refiere a una "ecuación condicional" tal como: $2x + 3 = 7$, en la cual los dos miembros son iguales para ciertos valores de la variable x, pero desiguales para otros; en este caso, son iguales solamente si $x = 2$. Sin embargo, también consideraremos "ecuaciones idénticas" las cuales son siempre ciertas; es decir son ciertas para todos los valores permitibles de la variable.

Del álgebra, podemos recordar un ejemplo familiar de identidad, tal como: $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$; esta ecuación es cierta para cualquier valor de x; entonces también será cierta, cuando x se sustituye por "sen θ"; esto es:

$$(\text{sen}\ \theta + 1)(\text{sen}\ \theta - 1) = \text{sen}^2\theta - 1$$

donde "$\text{sen}^2\theta$" significa "$(\text{sen}\ \theta)^2$" y se lee "seno cuadrado de θ".

Una ecuación que contiene al menos una variable que involucra ángulos en posición ordinaria, se llama "ecuación trigonométrica". Una ecuación trigonométrica, tal como $(\text{sen}\ \theta + 1)\ (\text{sen}\ \theta - 1) = \text{sen}^2\theta - 1$, que es cierta para todos los valores de las variables, para los cuales, ambos miembros están definidos, se llama "ecuación trigonométrica idéntica".

Antes de proceder con ecuaciones trigonométricas idénticas, debemos de aprender algunas relaciones que dependen de las funciones trigonométricas y del álgebra de los números reales, llamadas "identidades trigonométricas fundamentales".

4-3 IDENTIDADES TRIGONÓMETRICAS FUNDAMENTALES.

a) Relaciones en forma de cociente.

En la figura 4-1, θ representa un ángulo cualquiera positivo o negativo, habiéndose colocado en el primer cuadrante casualmente. Supongamos que "a", "o" y "r" representan la obscisa, la ordenada y el radio vector, respectivamente. Entonces,

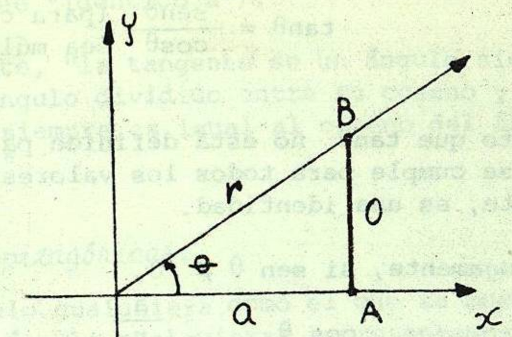

Fig. 4-1.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{0}{r}$$

$$\cos\ \theta = \frac{a}{r}$$

Ahora, si $\cos\ \theta \neq 0$,

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{0}{r}}{\frac{a}{r}}$$

$$= \frac{0}{r} \div \frac{a}{r}$$

$$= \frac{0}{r} \times \frac{r}{a}$$

$$= \frac{0}{a}$$

pero, $\tan\ \theta = 0/a$

Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$ (para cualquier θ que no sea múltiplo impar de 90°)

Puesto que $\tan\theta$ no está definida para 90° y 270°, la igualdad se cumple para todos los valores permisibles, consecuentemente, es una identidad.

Análogamente, si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$,

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\frac{a}{r}}{\frac{0}{r}}$$

$$= \frac{a}{r} \div \frac{0}{r}$$

$$= \frac{a}{r} \times \frac{r}{0}$$

$$= \frac{a}{0}$$

pero, $$\cot\theta = \frac{a}{0}$$

Por lo tanto,

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$ (para cualquier θ diferente de 0° o múltiplo de 180°)

Nuevamente, esta relación se considera como una identidad debido a que es cierta para todos los valores permisibles, ya que cotangente de 0°, 180°, 360°, etc.; no están definidas. Por lo tanto, para todo valor permisible de θ, aceptamos que

$$\tan\theta \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta \equiv \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

(el símbolo $\equiv$ se lee "idéntico a").

Por consiguiente, "la tangente de un ángulo siempre es igual al seno del ángulo dividido entre su coseno y la cotangente de un ángulo siempre es igual al coseno del ángulo dividido entre su seno."

b) Relaciones pitagóricas.

Sea θ es un ángulo cualquiera, como el que se muestra en la figura 4-1, u otro ángulo cualquiera; representamos la abscisa, la ordenada y el radio vector por "a", "0" y "r" respectivamente.

Entonces, por el teorema de Pitágoras,

$$0^2 + a^2 = r^2$$

dividiendo entre r^2

$$\frac{0^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} = 1$$

y puesto que $$\frac{0}{r} = \operatorname{sen}\theta$$

entonces, $$\frac{0^2}{r^2} = \operatorname{sen}^2\theta$$

análogamente, $$\frac{a}{r} = \cos\theta$$

entonces, $$\frac{a^2}{r^2} = \cos^2\theta$$

por lo tanto, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1.$

Por consiguiente, "la suma de los cuadrados del seno y del coseno del mismo ángulo siempre es igual a uno."

Nuevamente, a partir de

$$O^2 + a^2 = r^2$$

y dividiendo entre a^2,

$$\frac{O^2}{a^2} + 1 = \frac{r^2}{a^2}$$

pero, $\quad \frac{O}{a} = \tan\theta$

así que, $\quad \frac{O^2}{a^2} = \tan^2\theta$

y $\quad \frac{r}{a} = \sec\theta$

así que $\quad \frac{r^2}{a^2} = \sec^2\theta$

por lo tanto, $\quad \tan^2\theta + 1 \equiv \sec^2\theta$

(para todo θ cuya tangente y secante estén definidas).

Por consiguiente, "el cuadrado de la secante de un ángulo siempre es igual a uno más el cuadrado de la tangente de dicho ángulo".

Una vez más: $\quad O^2 + a^2 = r^2$

dividiendo entre O^2,

$$1 + \frac{a^2}{O^2} = \frac{r^2}{O^2}$$

pero, $\quad \frac{a}{O} = \cot\theta$

así que, $\quad \frac{a^2}{O^2} = \cot^2\theta$

y $\quad \frac{r}{O} = \csc\theta$

así que, $\quad \frac{r^2}{O^2} = \csc^2\theta$

por lo tanto, $\quad 1 + \cot^2\theta \equiv \csc^2\theta$

(para todo θ cuya cotangente y cosecante estén definidas).

Por consiguiente, "el cuadrado de la cosecante de un ángulo siempre es igual a uno más el cuadrado de la cotangente de dicho ángulo."

Del estudio del teorema de Pitágoras en álgebra y geometría, debe recordarse que, frecuentemente, el trabajo se simplifica cuando se usa $a^2 = r^2 - O^2$ o bien $a = \pm\sqrt{r^2 - O^2}$ en lugar de la forma $a^2 + O^2 = r^2$. Del mismo modo resultan útiles algunas de las siguientes formas que tienen las relaciones pitagóricas u otras similares a ellas.

$\operatorname{sen}^2\theta \equiv 1 - \cos^2\theta$	$\operatorname{sen}\theta \equiv \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$
$\cos^2\theta \equiv 1 - \operatorname{sen}^2\theta$	$\cos\theta \equiv \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$
$\tan^2\theta \equiv \sec^2\theta - 1$	$\tan\theta \equiv \pm\sqrt{\sec^2\theta - 1}$
$\cot^2\theta \equiv \csc^2\theta - 1$	$\cot\theta \equiv \pm\sqrt{\csc^2\theta - 1}$
$\sec^2\theta - \tan^2\theta \equiv 1$	$\sec\theta \equiv \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$
$\csc^2\theta - \cot^2\theta \equiv 1$	$\csc\theta \equiv \pm\sqrt{\cot^2\theta + 1}$

c) *Relaciones recíprocas.*

Anteriormente ya se había hablado de las razones recíprocas. Con frecuencia se hace referencia a ellas como relaciones recíprocas y se emplean casi del mismo modo que las relaciones en forma de cociente o las pitagóricas cuando se trabaja con ecuaciones. Así pues,

$$\operatorname{sen}\theta \equiv \frac{1}{\csc\theta}, \quad \csc\theta \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \operatorname{sen}\theta\csc\theta \equiv 1$$

$$\cos\theta \equiv \frac{1}{\sec\theta}, \quad \sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta}, \quad \sec\theta\ \cos\theta \equiv 1$$

$$\tan\theta \equiv \frac{1}{\cot\theta}, \quad \cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta} \quad \tan\theta\ \cot\ \theta \equiv 1$$

Todas las identidades trigonométricas fundamentales junto con las propiedades de los números reales, nos permiten escribir cualquier expresión que contenga valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ, en términos del valor de $\operatorname{sen}\theta$ o de cualquier otra función trigonométrica de θ.

4-4 EMPLEO DE LAS RELACIONES FUNDAMENTALES.

En el estudio de las identidades trigonométricas y de las ecuaciones condicionales, se presentarán, muchas situaciones en las que habrá necesidad de efectuar sustituciones y simplificaciones en que intervengan las relaciones en forma de cociente, las recíprocas y las pitagóricas.

EJEMPLO 1.

Expresar $\tan\theta \cdot \cos\theta$ en términos de una sola función trigonométrica.

SOLUCIÓN:

Usando la relación $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, sustituyendo y simplificando, obtenemos:

$$\tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta$$

$$= \operatorname{sen}\theta$$

por lo tanto, $\tan\theta \cdot \cos\theta \equiv \operatorname{sen}\theta$ (es la respuesta).

EJEMPLO 2.

Expresar $\dfrac{1}{\sec^2\theta} + \operatorname{sen}^2\theta + \tan^2\theta$ en términos de una sola función trigonométrica.

SOLUCIÓN:

Usando la relación $\dfrac{1}{\sec\ \theta} = \cos\theta$, entonces $\dfrac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$, sustituyendo esto, tenemos:

$$\frac{1}{\sec^2\theta} + \operatorname{sen}^2\theta + \tan^2\theta = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \tan^2\theta$$

ahora, usando $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, tenemos:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

y si, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

obtenemos, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sec^2\theta} + \operatorname{sen}^2\theta + \tan^2\theta \equiv \sec^2\theta \quad \text{(es la respuesta).}$$

EJEMPLO 3.

Encontrar en términos de $\cos\theta$, una expresión equivalente a $(\sec\theta - \tan\ \theta)(1 + \operatorname{sen}\theta)$.

SOLUCIÓN:

Usando las relaciones $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\ \theta}$ y $\tan\ \theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y sustituyendo obtenemos,

$$(\sec\theta - \tan\theta)(1 + \operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 + \operatorname{sen}\ \theta)$$