sumando las fracciones que están incluidas en el primer factor,

$$\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1+\operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1+\operatorname{sen}\theta)$$

multiplicando los dos factores, nos queda:

$$\left(\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1+\operatorname{sen}\theta) = \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

ahora, usando $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, donde $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, sustituyendo y simplificando:

$$\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \cos\theta$$

por lo tanto,

$$(\sec\theta - \tan\theta)(1+\operatorname{sen}\theta) \equiv \cos\theta \quad \text{(es la respuesta).}$$

EJEMPLO 4.

Expresar $\tan\theta + \cot\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

SOLUCIÓN:

Usando las relaciones $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, y sustituyendo, queda:

$$\tan\theta + \cot\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

sumando las dos fracciones resultantes, obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

ahora, usando $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y sustituyendo,



$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

por lo tanto,

$$\tan\theta + \cot\theta \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \quad \text{(es la respuesta)}$$

## AUTOEVALUACIÓN 1.

Expresar, en términos de una sola función trigonométrica o dar una simple expresión en lugar de cada una de las siguientes:

1.- $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

0) $\cot\theta$ 1) $\sec\theta$ 2) $\tan\theta$
3) $\csc\theta$

2.- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

0) 0 1) 1 2) $\tan^2\theta$
3) $\cot^2\theta$

3.- $\dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

0) $\cot\theta$ 1) $\tan\theta$ 2) $\tan\theta$
3) $\cot^2\theta$

4.- $\dfrac{1}{\cos\theta}$

0) $\cos\theta$ 1) $\operatorname{sen}\theta$ 2) $\sec\theta$
3) $\csc\theta$

5.- $\dfrac{1}{\csc^2\theta}$

0) $\operatorname{sen}^2\theta$ 1) $\operatorname{sen}\theta$ 2) $\sec^2\theta$
3) $\cos^2\theta$

6.- $1 - \cos^2\theta$

0) $\cos^2\theta$ 1) $\operatorname{sen}^2\theta$ 2) $-\cos^2\theta$
3) $\sec^2\theta$

7.- $1 + \tan^2\theta$

0) $\cot^2\theta$ 1) $\tan^2\theta$ 2) $\operatorname{sen}^2\theta$
3) $\sec^2\theta$

8.- $1 - \operatorname{sen}^2\theta$

0) $-\operatorname{sen}^2\theta$ 1) $-\tan^2\theta$ 2) $\cos^2\theta$
3) $\tan^2\theta$

9.- $1 + \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

0) $\cot^2\theta$ 1) $\tan^2\theta$ 2) $\sec^2\theta$
3) $\csc^2\theta$

10.- $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\theta$

0) $\csc^2\theta$ 1) $\cot^2\theta$ 2) $\sec^2\theta$
3) $\tan^2\theta$

11.- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \tan^2\theta$

0) $\csc^2\theta$ 1) $\operatorname{sen}^2\theta$ 2) $\tan^2\theta$
3) $\sec^2\theta$

12.- $1 - \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

0) 1 1) 0 2) 2
3) $-\tan^2\theta$



13.- $\csc^2\theta - \cot^2\theta + \tan^2\theta$

0) $\cot^2\theta$ 1) $\sec^2\theta$ 2) $\cos^2\theta$
3) $\operatorname{sen}^2\theta$

14.- $\cot\theta \cdot \operatorname{sen}\theta$

0) $\tan\theta$ 1) $\sec\theta$ 2) $\csc\theta$
3) $\cos\theta$

15.- $\csc\theta \cdot \cos\theta$

0) $\cot\theta$ 1) $\operatorname{sen}\theta$ 2) $\tan\theta$
3) $\sec\theta$

16.- $\tan\theta \cdot \sec\theta \cdot \cos\theta$

0) $\cot\theta$ 1) $\csc\theta$ 2) $\tan\theta$
3) $\operatorname{sen}\theta$

17.- $\csc\theta \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \sec\theta$

0) $\sec\theta$ 1) $\tan\theta$ 2) $\cos\theta$ 3) $\cot\theta$

18.- $(\sec^2\theta - 1) \cdot \csc^2\theta \cdot \operatorname{sen}\theta . \cos\theta$

0) $\cot\theta$ 1) $\csc\theta$ 2) $\tan\theta$
3) $\operatorname{sen}\theta$

19.- $\tan\theta \cdot \cot\theta - \cos^2\theta$

0) $-\cos^2\theta$ 1) $\operatorname{sen}^2\theta$ 2) $-\operatorname{sen}^2\theta$
3) $\tan^2\theta$

20.- $\dfrac{1 - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

0) $\cot\theta$ 1) $\tan\theta$ 2) $\cos\theta$
3) $\operatorname{sen}\theta$

21.- $\dfrac{(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)(\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta}$

0) $\cot\theta$ 1) $\tan^2\theta$ 2) $\sec^2\theta$
3) $\csc\theta$

22.- $\dfrac{\text{sen}\theta\,(\csc^2\theta - \cot^2\theta)}{\cos\theta\ \sec\theta}$

0) $\cos\theta$ 1) $\tan\theta$ 2) $\text{sen}\theta$
3) $\cot\theta$

23.- $\dfrac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\sqrt{\csc^2\theta - 1}}$

0) $\tan\theta$ 1) $\text{sen}^2\theta$ 2) $\cos^2\theta$
3) $\tan^2\theta$

24.- $\dfrac{\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$

0) $\cos\theta$ 1) $\cos^2\theta$ 2) $\cot^2\theta$
3) $\tan^2\theta$

25.- $\text{sen}\theta\,\csc\theta + \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta\,\cot\theta}$

0) $\sec^2\theta$ 1) $\cos^2\theta$ 2) $\tan^2\theta$
3) $\csc\theta$

Escribir cada una de las siguientes expresiones en términos de $\text{sen}\theta$.

26.- $\csc\theta$

0) $\text{sen}\theta - 1$ 1) $-\text{sen}\theta$ 2) $1 - \text{sen}^2\theta$
3) $1/\text{sen}\theta$



27.- $\sec^2\theta$

0) $1 - \text{sen}^2\theta$ 1) $\dfrac{1}{1-\text{sen}^2\theta}$ 2) $\dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$
3) $-\text{sen}^2\theta$

28.- $\sec\theta\,\tan\theta$

0) $\dfrac{\text{sen}\theta}{1-\text{sen}^2\theta}$ 1) $\dfrac{1}{1-\text{sen}^2\theta}$ 2) $\dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$
3) $-\dfrac{1}{\text{sen}\theta}$

29.- $\cot^2\theta$

0) $\text{sen}\theta$ 1) $-\text{sen}\theta$ 2) $\dfrac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen}^2\theta}$
3) $\text{sen}^2\theta - 1$

30.- $\cos\theta\ \tan\theta$

1) $1 - \text{sen}\theta$ 1) $\text{sen}\theta$ 2) $1 - \text{sen}^2\theta$
3) $-\text{sen}\theta$

31.- $\tan^2\theta(\csc^2\theta - 1) + \tan\theta\,\cos\theta$

0) $\text{sen}\theta$ 1) $\text{sen}^2\theta$ 2) $1 - \text{sen}^2\theta$
3) $1 + \text{sen}\theta$

Expresar las siguientes funciones de $\theta$ en términos de $\text{sen}\theta$ y $\cos\theta$, después de expresar el resultado como una fracción simple reducida a su mínima expresión .

32.- $\cot\theta\ \sec\theta$

0) $\dfrac{1}{\cos\theta}$ 1) $\dfrac{1}{\text{sen}\,\theta}$ 2) $\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$
3) $\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

33.- $\dfrac{\text{sen } \theta}{\cot \theta}$

0) $\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$ 1) $\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$ 2) $\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

3) $\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}\theta}$

34.- $\tan\theta - \sec\theta$

0) $\cos\theta$ 1) $\dfrac{\text{sen}\theta - 1}{\cos\theta}$ 2) $\dfrac{1 - \text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$

3) $\text{sen }\theta + 1$

35.- $\dfrac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$

0) $\text{sen}^2\theta$ 1) $\text{sen}\theta$ 2) $\dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}$

3) $\dfrac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}$

## 4-5 DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES.

La mayor parte del trabajo con identidades consistirá en tratar de demostrar la veracidad de los enunciados dados en forma de ecuación, pero que requieren su comprobación. Un procedimiento sumamente efectivo, en la mayoría de los casos, consiste en trabajar con cualquiera de los miembros de la ecuación, cambiando su forma, mediante simplificaciones o sustituciones, hasta llegar a demostrar que es idéntico al otro miembro.



Consideremos el siguiente ejemplo como ilustración:

EJEMPLO 1.

Demostrar que:

$$\cot\theta + \frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos\theta} \equiv \csc\theta$$

SOLUCIÓN:

Se escoge cualquiera de los dos miembros de la ecuación para trabajar con él. Generalmente se recomienda el más complicado ya que suele ser más fácil reducirlo, que tratar de desarrollar el más sencillo. En este caso se eligió el primer miembro de la ecuación:

$$\cot\theta + \frac{\text{sen } \theta}{1 + \cos\theta}$$

En el miembro elegido se sustituyen expresiones equivalentes ya estudiadas en las relaciones fundamentales. Para decidir que sustituciones deben usarse, se estudia la identidad completa. Debe tenerse presente que después de efectuar las sustituciones, el miembro con el cual se está trabajando necesariamente habrá de tomar una forma idéntica a la que tiene el otro miembro. Sustituyendo

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

se tiene: $\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} + \dfrac{\text{sen } \theta}{1 + \cos\theta}$

Después se simplifica, teniendo cuidado en observar correctamente las reglas algebraicas. Sumando las fracciones:

$$\frac{\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\text{sen }\theta(1 + \cos\theta)}$$

Si es necesario, se repite el proceso de sustituir expresiones equivalentes. Sustituyendo, ahora, $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$,

$$\frac{\cos\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \cos\theta)} = \frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \cos\theta)}$$

volviendo a simplificar, obtenemos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$$

Para concluir, se ha empleado la relación recíproca $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, para demostrar que el primer miembro de la ecuación es idéntico al segundo. Por lo tanto,

$$\cot\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} \equiv \csc\theta$$

EJEMPLO 2.

Demostrar que:

$$2\csc^2\theta \equiv \frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

SOLUCIÓN:

Se escoge el segundo miembro de la ecuación para hacer las transformaciones respectivas y demostrar que es idéntico al primero.

$$\frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

sumando las fracciones de este miembro:

$$\frac{1 - \cos\theta + 1 + \cos\theta}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)}$$



Efectuando las operaciones indicadas y simplificando:

$$\frac{2}{1 - \cos^2\theta}$$

Sustituyendo $1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$

$$\frac{2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Sustituyendo ahora $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{\csc^2\theta}$

$$\frac{2}{\frac{1}{\csc^2\theta}}$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $\csc^2\theta$, nos queda:

$$\frac{2\csc^2\theta}{1}$$

Por lo tanto, la identidad

$$2\csc^2\theta \equiv \frac{1}{1 + \cos\theta} + \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

queda demostrada.

Pese a que existen otras formas de verificar identidades, debemos de dominar los procedimientos anteriores con el fin de evitar el error frecuente de suponer que los dos miembros son iguales. Trabajando con cada uno de los miembros por separado, no haremos suposiciones que pudieran invalidar la demostración.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Demostrar las siguientes identidades:

1.- $\operatorname{sen}\theta \ \cot\theta \equiv \cos\theta$

2.- $\cos\theta \ \tan\theta \equiv \operatorname{sen}\theta$

3.- $\operatorname{sen}\theta \ \sec\theta \equiv \tan\theta$

4.- $\dfrac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} \equiv \sec\theta$

5.- $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta} \equiv \sec\theta$

6.- $\dfrac{\cos\theta \ \sec\theta}{\tan\theta} \equiv \cot\theta$

7.- $\sec^2\theta \equiv \csc\theta\operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{\cot^2\theta}$

8.- $\csc^2\theta \equiv \dfrac{1}{1-\cos^2\theta}$

9.- $\cos^2\theta+\tan^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta \equiv \sec^2\theta$

10.- $\sec^2\theta\cot^2\theta \equiv \csc^2\theta$

11.- $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta} - 1 \equiv \csc\theta$

12.- $1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\tan\theta \equiv \cos^2\theta$

13.- $\tan\theta \equiv \dfrac{\sec\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{1}{\tan\theta}$

14.- $\tan\theta \equiv \dfrac{\operatorname{sen}\theta+\tan\theta}{1+\cos\theta}$

15.- $\cos\theta \equiv \sec\theta - \tan\theta \ \operatorname{sen}\theta$

16.- $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} - \tan\theta \equiv \sec\theta$



AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Subraya la respuesta correcta.

1.- Una relación del tipo: $\operatorname{Tan} A = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$ se denomina:

1) En forma de cociente.
2) Pitagórica.
3) Recíproca.
4) Ninguno.

Simplifica o reduce a su mínima expresión los enunciados siguientes:

2.- $\dfrac{\operatorname{sen}^2 B}{\cos^2 B}$

1) $\operatorname{Tan}^2 B$
2) $\operatorname{Cot}^2 B$
3) $(1-\cos^2 B)$
4) Ninguno.

3.- $\operatorname{Cos}^2 A + \operatorname{Sen}^2 A + \operatorname{Cot}^2 A$.

1) $\operatorname{Sec}^2 A$
2) $\operatorname{Csc}^2 A$
3) 0
4) Ninguno.

4.- $\dfrac{1+\tan^2 A}{\operatorname{Csc}^2 A}$

1) $\operatorname{Tan}^2 A$
2) 1
3) $\operatorname{Csc}^2 A$
4) Ninguno.

5.- $\dfrac{\operatorname{Sen}^2 A - 1}{\operatorname{Cos}^2 A}$

1) 0
2) -1
3) $\operatorname{Tan}^2 A$
4) Ninguno

Selecciona el número de la respuesta correcta que forma con los siguientes enunciados una identidad trigonométrica.

6.- Sen A . Sec A.

1) Csc A
2) Tan A
3) Cos A
4) Ninguno.

7.- $\dfrac{1}{\text{Csc A - Cot A}} + \dfrac{1}{\text{Csc A + Cot A}}$

1) Csc A
2) 2 Csc A
3) 1
4) Ninguno.

8.- Sec A - Tan A . Sen A

1) Cos A
3) 0
2) Sen A
4) Ninguno.

9.- Selecciona correctamente los siguientes números, indic
do la secuencia correcta.

a) 1 ______ $\text{Sec}^2x \cdot \csc^2 x$

b) $\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x$ ______ $\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$

c) 0 ______ $\text{Sen}^2x + \cos^2 x$

d) Sec x ______ $\dfrac{1}{\cos x}$

e) $\text{Cos}^2x$ ______ $\dfrac{\cos x \cdot \sec x}{\tan x}$

f) Sen x

g) Cot x



RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

| | |
|---|---|
| 1.- 2 | 19.- 1 |
| 2.- 1 | 20.- 3 |
| 3.- 3 | 21.- 0 |
| 4.- 2 | 22.- 2 |
| 5.- 0 | 23.- 3 |
| 6.- 1 | 24.- 1 |
| 7.- 3 | 25.- 0 |
| 8.- 2 | 26.- 3 |
| 9.- 3 | 27.- 1 |
| 10.- 0 | 28.- 0 |
| 11.- 3 | 29.- 2 |
| 12.- 1 | 30.- 1 |
| 13.- 1 | 31.- 3 |
| 14.- 3 | 32.- 1 |
| 15.- 0 | 33.- 1 |
| 16.- 2 | 34.- 1 |
| 17.- 0 | 35.- 0 |
| 18.- 2 | |

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

| | |
|---|---|
| 1.- 1 | 6.- 2 |
| 2.- 1 | 7.- 2 |
| 3.- 2 | 8.- 1 |
| 4.- 1 | 9.- b,f,a,d,g, (en orden descendente). |
| 5.- 2 | |