# ECUACIONES CONDICIONALES.

En esta unidad veremos las ecuaciones trigonométricas condicionales. Aprenderás a resolverlas a través de tus conocimientos de álgebra. También aprenderás a graficar dichas soluciones. Al igual que en el álgebra, la comprobación de los resultados debe efectuarse sustituyendo las soluciones encontradas en la ecuación para eliminar las raíces absurdas.

Te deseamos mucho éxito en el aprendizaje de esta unidad ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Resolver correctamente ecuaciones trigonométricas condicionales de primer grado para valores positivos del ángulo $\theta$, donde $0° \leq \theta < 360°$; comprobando las soluciones encontradas.

2.- A través de los métodos de factorización o fórmula cuadrática, de álgebra, resolver correctamente ecuaciones trigonométricas condicionales cuadráticas, para valores positivos del ángulo $\theta$, donde $0° \leq \theta < 360°$; comprobando las soluciones encontradas.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia la lección 2 del capítulo IV. Cabe mencionar la importanica del dominio que debes tener en los métodos algebraicos de ecuaciones cuadráticas como lo son el método de factorización o fórmula cuadrática.

Para que resuelvas satisfactoriamente tus objetivos, debes tener presente tus conocimientoes de la unidad anterior, puesto que para resolver cualquier ecuación trigonométrica, ésta debe de estar en términos de una sola función. En caso contrario, debes usar las relaciones fundamentales de la unidad anterior.

Deberás comprobar tus raíces encontradas, con el fin de saber si satisfacen la igualdad y a la vez rechazar aquellas raíces extrañas a la ecuación.



# CAPITULO 4.

## Ecuaciones Trigonométricas Condicionales.

LECCIÓN 2.

### 4-6 INTRODUCCIÓN.

Antes de empezar a resolver ecuaciones trigonométricas, cabe mencionar la importancia de dominar los métodos de resolución de las ecuaciones algebraicas (las lineales y las cuadráticas en una variable), por lo que sugerimos, para recordar esos conocimientos, consultar tu libro de álgebra (Gordon Fuller, cap. 8), o cualquier otro que tengas ala mano, ya que nos servirán para resolver ecuaciones trigonométricas. Además, así como en álgebra, las soluciones trigonométricas debes comprobarlas en la ecuación original con el fin de saber si satisfacen la igualdad y poder desechar aquellas raíces extrañas a la ecuación.

### 4-7 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS CONDICIONALES.

Cuando hablamos de ecuaciones en álgebra, generalmente nos referimos a ecuaciones condicionales, puesto que las ecuaciones idénticas se denominan identidades. La resolución de ecuaciones trigonométricas depende de los métodos previamente estudiados en álgebra. A fin de recordar los diferentes métodos, a continuación se hace un breve repaso por medio de ejemplos trigonométricos que requieren un procedimiento similar a los algebráicos.

EJEMPLO 1.

Resover para $\theta$ si $0° \leq \theta < 360°$ la siguiente ecuació de primer grado:

$$4 \cot \theta - 3 = 2 \cot \theta - 1$$

SOLUCIÓN:

El procedimiento que se sigue es idéntico que para las ecuaciones algebraicas de primer grado. Entonces, reordena do así,

$$4 \cot\theta - 2 \cot\theta = -1 + 3$$

sumando, $2 \cot \theta = 2$

y simplificando $\cot \theta = 1$

Existen dos respuestas para $\theta$ que satisfacen la condi- ción de $\cot\theta = 1$, debido a que $\cot 45° = 1$ y $\cot (180° + \theta) = \cot \theta$. Por lo tanto,

$$\theta = 45°,\ 225° \quad \text{(es la respuesta}$$

EJEMPLO 2.

Resolver para $\theta$ en radianes si $0 \leq \theta \leq 2\pi$ la siguiente ecuación de segundo grado.

$$2 \cos^2\theta - 1 = - \cos\theta$$

SOLUCIÓN:

Una ecuación cuadrática se debe escribir primero en la forma general, es decir, en la forma $ax^2 + bx + c = 0$,

$$2 \cos^2\theta + \cos \theta - 1 = 0$$



Utilizando la fórmula general, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, nos queda:

$$\cos \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

simplificando,

$$\cos \Theta = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{4}$$

entonces,

$\cos\theta = 1/2$ ó $\cos\theta = -1$

Debido a la condición de $\cos\theta = 1/2$, existen dos respues tas: 60° y 300°; y debido a la otra condición $\cos\theta = -1$, - - existe una respuesta, 180°. Por lo tanto, estos ángulos expre sados en radianes son:

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3} \quad \text{(es la respuesta)}$$

(Obsérvese cómo se procedió para interpretar el hecho de que $\cos\theta = 1/2$).

(Se deja al estudiante la comprobación de la resolución de la ecuación anterior por el método de factorización).

Si la ecuación dada está en términos de dos o más funcio nes, se pueden efectuar sustituciones y simplificaciones de igual manera que en las identidades, hasta transformarla en una ecuación que contenga una sola función. Este proceso no siempre es necesario, así que debe examinarse la ecuación da- da antes de transformarla. Por ejemplo $(\tan\theta - 3)(4 \cos\theta - 1) = 0$ puede resolverse fácilmente igualando a cero cada uno de los factores, sin necesidad de transformarla en términos de una sola función.

Tal como sucede en álgebra, la comprobación debe efectuarse sustituyendo en la ecuación original los valores obtenidos. Si alguno de estos valores no satisface la ecuación, recibe el nombre de "valor extraño" y no es una raíz de la ecuación. Las raíces que son imposibles de interpretar en una ecuación reciben el nombre de "raíces absurdas".

EJEMPLO 3.

Resolver para $\theta$ la siguiente ecuación si $0° \leq \theta < 360°$: $\operatorname{sen}\theta - 1 = 2\cos^2\theta$.

SOLUCIÓN:

Haciendo la sustitución de $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$.

$$\operatorname{sen}\theta - 1 = 2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\operatorname{sen}\theta - 1 = 2 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

reordenando los términos y simplificando:

$$2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 3 = 0$$

factorizando,

$$(2\operatorname{sen}\theta + 3)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$$

igualando a cero cada factor,

$$2\operatorname{sen}\theta + 3 = 0 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

Si $2\operatorname{sen}\theta + 3 = 0$, entonces $\operatorname{sen}\theta = -3/2$, lo cual obviamente no es posible interpretar, para valores reales de $\theta$, porque $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$. Por lo tanto, $-3/2$ es una raíz absurda.

Si $\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 1$ y $\theta = 90°$, lo cual se comprueba fácilmente mediante el cálculo mental.

Por lo tanto, 90° es la única raíz que satisface la ecuación.



Obsérvese, ahora, cómo se procede en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 4.

Resolver para $\theta$, si $0° < \theta < 360°$, la siguiente ecuación: $\cos\theta = -0.766$.

SOLUCIÓN:

Buscamos en las tablas trigonométricas el valor del ángulo cuyo coseno sea 0.766 y encontramos que corresponde para un ángulo de 40°.

Pero la función coseno es negativa en el II como en el III cuadrante, nos queda que los triángulos semejantes son:

$$\theta = (180° - 40°) = 140°$$

$$\text{y} \quad \theta = (180° + 40°) = 220°$$

Por lo tanto, las soluciones para la ecuación $\cos\theta = -0.766$ siendo $0° \leq \theta < 360°$ son:

$$\theta = 140° \text{ y } 220°$$

EJEMPLO 5.

Resolver para $\theta$, si $0 \leq \theta < 2\pi$, la siguiente ecuación: $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$.

SOLUCIÓN:

Haciendo uso de las relaciones fundamentales, buscamos aquella que puede expresar a la ecuación en términos de una sola función. Sustituyendo $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ en la ecuación nos queda:

$$\operatorname{sen}\theta = \tan\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

multiplicando los dos miembros de la ecuación por $\cos\theta$,

$$\cos\theta . \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$$

removiendo los términos de la ecuación.

$$\cos\theta . \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$$

factorizando:

$$\operatorname{sen}\theta\,(\cos\theta - 1) = 0$$

Ahora, como en la ecuación equivalente nos quedó en fu ción de dos factores, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{ó} \quad \cos\theta - 1 = 0$$

o bien, $\operatorname{sen}\theta = 0$ ó $\cos\theta = 1$

entonces, $\theta = 0°$ y $180°$ ó $\theta = 0°$ y $360°$

Pero como las soluciones nos la piden en radianes, (usando la equivalencia $1° = \pi/180$ radianes), nos queda:

$\theta = 360°(\frac{\pi}{180})$ $\qquad$ $\theta = 0°(\frac{\pi}{180}) = 0$ radianes

$\theta = 2\pi$ rad $\qquad$ $\theta = 180°(\frac{\pi}{180}) = \pi$ radianes

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\theta = \tan$ son:

$\theta = 0$ rad.

$\theta = \pi$ rad.

$\theta = 2\pi$ rad.

EJEMPLO 6.

Resolver para $\theta$, si $0° \leq \theta < 360°$, la siguiente ecuación: $\cos^2\theta - 0.25 = 0$.



SOLUCIÓN:

Removiendo los términos de la ecuación y despejando $\cos\theta$, tenemos:

$$\cos^2\theta - 0.25 = 0$$

$$\cos^2\theta = 0.25$$

$$\sqrt{\cos^2\theta} = \pm\sqrt{0.25}$$

$$\cos\theta = \pm 0.5$$

o sea que, $\cos\theta = 0.5$ ó $\cos\theta = -0.5$.

Buscando en las tablas trigonométricas, un ángulo cuyo coseno valga 0.5, encontramos que el ángulo es de 60°.

Debido a $\cos\theta = 0.5$, hay dos ángulos (uno en el cuadrante I y otro en el IV cuadrante), que cumplen esta condición: 60° y 300°, (360°− 60°).

Y debido a $\cos\theta = -0.5$, también hay dos ángulos (uno en el II y otro en el III cuadrante), que cumplen con esta condición: 120°, (180°− 60°) y 240°, (180°+ 60°).

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cos\theta - 0.25 = 0$ son: $\theta = 60°, 120°, 240°$ y $300°$.

EJEMPLO 7.

Resolver para $\theta$, si $0° \leq \theta < 360°$, la siguiente ecuación: $\cot^2\theta = \cot\theta$.

SOLUCIÓN:

Removiendo los términos de la ecuación,

$$\cot^2\theta = \cot\theta$$

$$\cot^2\theta - \cot\theta = 0$$

factorizando,

$$\cot\theta(\cot\theta - 1) = 0$$

igualando a cero cada factor,

$$\cot\theta = 0 \quad ó \quad \cot\theta - 1 = 0$$

o sea que, $\cot\theta = 0$ ó $\cot\theta = 1$

Debido a $\cot\theta = 0$, encontramos dos soluciones: 90° y 27

Y debido a $\cot\theta = 1$, encontramos las otras dos solucio- nes: 45° y 225°.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $\cot^2\theta =$ cot son: $\theta = 45°$, 90°, 225° y 270°



AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas para $\theta$, si $0° \leq \theta < 360°$ y rechaza las raíces absurdas.

1.- $\sec^2\theta - 2\sec\theta = 0$

0) 30°, 330°  1) 45°, 225°  2) 60°, 300°
3) 80°, 280°

2.- $\cos^2\theta + 2\cos\theta - 3 = 0$

0) 0°, 300°  1) 0°, 360°  2) 270°, 330°
3) 90°, 180°

3.- $\cot\theta = \tan\theta$

0) 30°, 90°, 210°, 325°  1) 45°, 135°, 225°, 315°
2) 60°, 180°, 270°, 320°  3) 30°, 120°, 210°, 300°

4.- $3\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

0) 48°10', 311°50', 180°  1) 49°10', 312°50', 90°
2) 50°10', 313°50', 270°  3) 37°10', 127°10', 180°

5.- $\tan\theta = 3.487$

0) 74°, 254°  1) 38°, 321°  2) 106°, 286°
3) 176°, 196°

**Resuelve las siguientes ecuaciones para $\theta$, si $0 \leq \theta < 2\pi$, y rechaza las raíces absurdas.**

6.- $\operatorname{sen}^2\theta = 1$

0) $\frac{3}{5}\pi$, $\frac{2}{5}$  1) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$  2) $\pi/2$, $3\pi/2$

3) $\pi/4$, $5\pi/4$

7.- $2 \operatorname{sen}\theta + 1 = 0$

0) $\frac{5}{3}\pi, \frac{6}{5}$  1) $\frac{7}{3}\pi, \frac{8}{5}\pi$  2) $\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{7}\pi$

3) $7\pi/6, 11\pi/6$

8.- $2 \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta = 1$

0) $0, 2\pi/3, 2\pi/3, 2\pi$  1) $\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$

2) $\pi/6, \frac{2}{3}\pi$  3) $4\pi/5, \frac{6}{5}\pi$



RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

1.- 2

2.- 1

3.- 1

4.- 0

5.- 0

6.- 2

7.- 3

8.- 0