RESOLUCION DE TRIANGULOS OBLICUANGULOS.

Al estudiar trigonometría recuerda que debes leer con todo cuidado la teoría y los ejemplos antes de intentar la resolución de los problemas. Las fórmulas y los símbolos deben leerse como si estuvieran expresados en palabras. Los ejemplos debes resolverlos en una hoja aparte hasta alcanzar la certidumbre de haber comprendido cada uno de los pasos que conducen a la solución.

En esta unidad, estudiaremos y aprenderemos a resolver cualquier triángulo oblicuángulo (o sea, conocer todos los lados y ángulos), por las leyes de los senos y cosenos, dependiendo de los datos conocidos.

Al término de esta unidad el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1.- Aplicar correctamente la ley de los senos para resolver triángulos oblicuángulos, cuando se conocen:

a) Un lado y dos ángulos cualquiera.
b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

2.- Para el inciso b) del objetivo anterior, analizar los datos del triángulo ABC y determinar en cada caso el número de soluciones que presenta, una, dos o ninguna.

3.- Aplicar correctamente la ley de los cosenos para resolver triángulos oblicuángulos, cuando se conocen:

a) Dos lados y el ángulo que forman.
b) Los tres lados.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo V de tu libro de texto. Es importa te que, cuando vayas a resolver cualquier triángulo obl cuángulo, tengas presente lo siguiente:

a) Debes dibujar una figura donde indiques los datos co nocidos.

b) Determinar el caso a que pertenece, para que escojas la fórmula a emplear y así puedes determinar el núme ro de soluciones posibles.

2.- Estudia tus ejemplos antes de resolver las autoevaluaci nes que se incluyen dentro del capítulo.

3.- Si ya crees dominar los objetivos, resuelve la autoeval ción del capítulo, volviendo a estudiar el objetivo de los problemas en que hayas salido mal.

LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Con esta unidad terminamos el estudio de la trigonometría y veremos los números complejos. La matemática, al igual que la trigonometría, es una de las ciencias más antiguas. Como se ha visto, en la mente de los antigüos ya existía la idea de la relación de las longitudes y los ángulos.

En esta unidad aprenderás a representar gráficamente los números complejos y estarás en condición de operar con ellos y a representarlos en sus dos formas.

Aprende a excelencia la unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir con tus propias palabras los conceptos: número real, número imaginario puro y número complejo.

2.- Definir con tus propias palabras los conceptos: forma rectangular, forma polar, argumento o fase y módulo.

3.- Representar gráficamente los números complejos en cualquiera de las dos formas.

4.- Transformar correctamente los números complejos de la forma rectangular o algebraica a la forma polar o trigonométrica y viceversa.

5.- Efectuar correctamente las 4 operaciones básicas con los números complejos y expresar su resultado en cualquiera de las dos formas conocidas.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo VI de tu libro de texto.
Los objetivos 1 y 2 son de suma importancia que trates de comprenderlos, puesto que, en ellos se basa toda la teoría de esta unidad, por lo que te recomendamos leas todo el capítulo.

Para los objetivos 3 y 4, estudia las secciones 3 y 5; resuelve la autoevaluación 2.

Para el objetivo 5 estudia las secciones 4 y 6; resuelve las autoevaluaciones 1 y 3.

2.- Como autoevaluación de esta unidad resuelve la autoevaluación del capítulo.

CAPITULO 5.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

5-1 INTRODUCCIÓN.

Una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría es la resolución de triángulos oblicuángulos. El físico y el ingeniero se encuentran frecuentemente frente a problemas de este tipo. Se dice que un triángulo queda resuelto cuando se conocen sus lados, sus ángulos y su área. Para resolver un triángulo es necesario conocer tres elementos siendo por lo menos uno de ellos un lado. A continuación, presentaremos diversas fórmulas útiles para este propósito. Tres elementos de un triángulo, incluyendo por lo menos uno de los lados, pueden ser dados de los siguientes modos:

Caso A.   Dos ángulos y un lado.

Caso B.   Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Caso C.   Dos lados y el ángulo comprendido.

Caso D.   Tres lados.

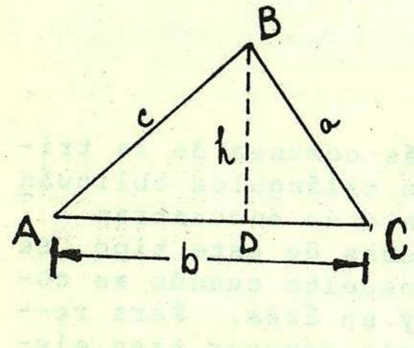

Fig. 1.

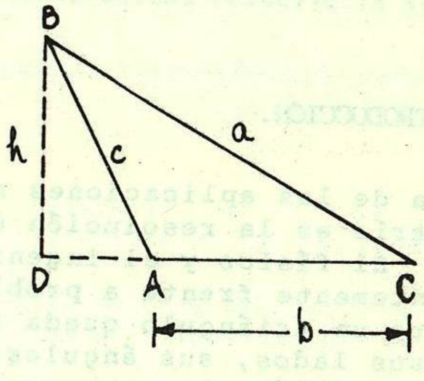

Fig. 2.

Debe observarse que el caso A es equivalente a dar tres ángulos y un lado, puesto que el tercer ángulo se puede obtener restando de 180° la suma de los dos ángulos dados.

Para calcular un elemento desconocido de un triángulo, es necesario seleccionar una fórmula que comprenda los tres elementos conocidos y el desconocido.

5-2 LEY DE LOS SENOS.

Consideremos un triángulo de ángulos A, B y C y cuyos lados opuestos son a, b y c respectivamente. Tracemos una perpendicular desde cualquiera de los vértices al lado opuesto, o a la prolongación del lado opuesto y sea D el punto de intersección y h la longitud de la perpendicular. Considerando cualquiera de las figuras 1 y 2 se tiene:

$$\text{sen } C = \frac{h}{a}$$

por tanto, $h = a \text{ sen} C$

Por otro lado, utilizando la figura 2,

$$\text{sen } A = \frac{h}{c}$$

$$h = c \text{ sen } A$$

El ángulo DAB de la fig. 2, es el ángulo relacionado de CAB. En consecuencia, sen A es numéricamente igual a sen DAB. Además ambos tienen el mismo signo puesto que cada uno es positivo y menor de 180°

Luego, haciendo uso de la fig. 2, se tiene:

$$\text{sen } A = \text{sen } DAB$$

$$= \frac{h}{c}$$

por tanto, $h = c \text{ sen } A$

Igualando las dos expresiones del valor de h, se tiene:

$$a \text{ sen } C = c \text{ sen } A$$

Dividiendo por sen A sen C, se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Esta relación entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos puede expresarse en la forma:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \qquad (1)$$

que viene a ser la expresión simbólica de la ley de los senos que damos a continuación.

Ley de los senos.

En un triángulo cualquiera, las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales.

Esta ley también se suele expresar diciendo:

En un triángulo cualquiera los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

La ley de los senos se puede usar cuando se conocen tres de las cantidades comprendidas en cualesquiera dos de las razones.

Debe hacerse notar que dos cualesquiera de las razones de la fórmula (1) comprenden dos lados y sus ángulos opuestos. Por tanto, por medio de esta fórmula se puede resolver un triángulo que se encuentra en cualquiera de los siguientes casos:

Caso A. Dos ángulos y un lado.

Caso B. Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

5-3 ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

Sabemos que el área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura. En las figuras 1 y 2, la altura es h y la base es b. Por tanto, una fórmula del área A, de un triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}\ bh$$

$$= \frac{1}{2}\ ab \text{ sen } C \qquad (2)$$

Puesto que la notación empleada es general, se tiene:

TEOREMA 1.

El área de un triángulo es igual al semiproducto de dos cualesquiera de los lados por el seno del ángulo comprendido.

Despejando "a" de la ecuación obtenida, considerando los dos primeros miembros de (1), se tiene:

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

sustituyendo este valor en (2), se tiene:

$$A = \frac{b^2 \text{sen } A \text{ sen } C}{2 \text{ sen } B} \qquad (3)$$

esta fórmula puede expresarse como sigue:

TEOREMA 2.

El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto del cuadrado de uno de los lados por los senos de los ángulos adyacentes, dividido por el seno del ángulo opuesto.

CASO A.

Con el objeto de ilustrar el uso de las fórmulas obtenidas, se resolverá el triángulo en el que $a = 12.30$, $A = 48°10'$ y $C = 84°20'$. En estas condiciones es posible aplicar la ley de los senos puesto que se conocen tres de las cuatro cantidades implicadas en ella. Por tanto,

$$\frac{c}{\text{sen } 84°20'} = \frac{12.30}{\text{sen } 48°\ 10'}$$

de donde:

$$c = \frac{(12.30)(\text{sen } 84°20')}{\text{sen } 48°10'}$$

$$c = \frac{(12.30)(0.9951)}{0.7451}$$

$$c = 16.427$$

además,

$$B = 180° - (48°10' + 84°20')$$

$$B = 47°30'$$

Haciendo uso nuevamente de la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{b}{\text{sen } 47°30'} = \frac{12.30}{\text{sen } 48°10'}$$

por tanto,

$$b = \frac{(12.30)(\text{sen } 47°30')}{\text{sen } 48°10'}$$

$$b = \frac{(12.30)(0.7373)}{0.7451}$$

$$b = 12.171$$

Para calcular el área del triángulo se utiliza el teorema 1. Escogiendo b y c como lados, se tiene:

$$A = 1/2 \ bc \text{ sen } A$$

$$A = \frac{(12.171)(16.427)(\text{sen } 48°10')}{2}$$

$$A = \frac{(12.171)(16.427)(0.7451)}{2}$$

$$A = 74.485$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Resolver los triángulos cuyos elementos se dan en los siguientes problemas:

1.- A = 35°30' ; B = 47°30' ; a = 13.24

2.- A = 69°30' ; B = 57°30' ; b = 0.6243

3.- A = 26°20' ; C = 79°40' ; c = 123. 4

4.- B = 121° ; C = 17°20' ; b = 0.4273

5.- B = 26°40' ; C = 15°30' ; c = 46.13

6.- A = 67°50' ; B = 37°50' ; a = 4891

7.- A = 76°10' ; C = 23° ; c = 0.04216

8.- A = 100°40' ; C = 21°10' ; a = 627.3

9.- B = 54°40' ; C = 39°30' ; b = 96.29

10.- Dos casas A y B quedan a 1200 m una de otra sobre la misma margen de un río, y una tercera casa C queda en la margen opuesta. Si el ángulo CAB = 62°20' y el ángulo CBA = 36°10' , hallar la distancia de C a A y a B.

11.- Un poste vertical situado en una pendiente que forma un ángulo de 7°con la horizontal, proyecta hacia abajo de