la pendiente una sombra de 36.3 m de longitud. Si el ángulo de elevación del sol es de 26°, calcular la longitud del poste.

12.- Un aeropuerto A queda 560 kilómetros al norte de otro B. Un piloto viaja en la dirección 130° de A a C y luego en la dirección 200° a B. Determinar la distancia total recorrida.

CASO B. UN CASO AMBIGUO.

En geometría plana se demuestra que dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos no siempre es posible construir un triángulo. Por otra parte, tal como se demuestra en la siguiente discusión, según sean los datos, el problema puede tener ninguna, una o dos soluciones.

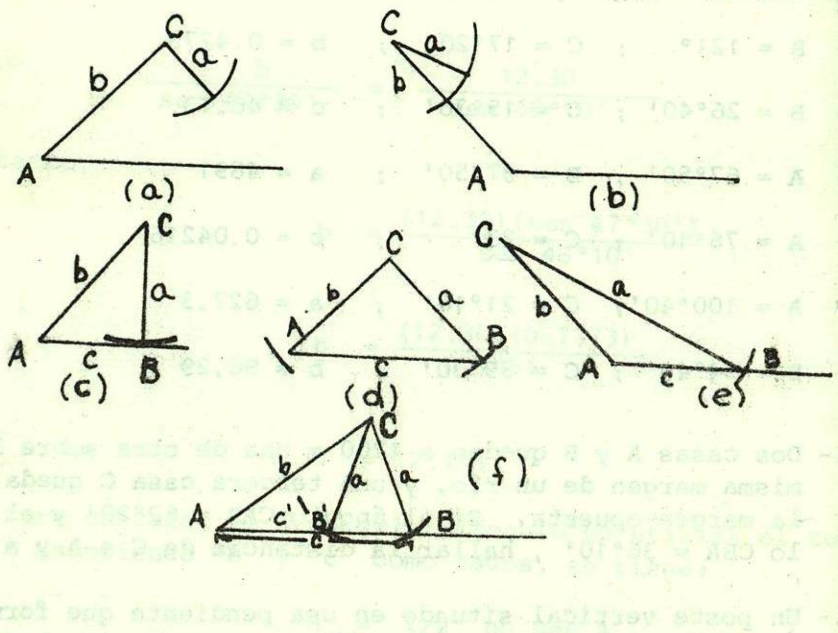

Fig. 3.

Cuando se dan el ángulo A y los lados a y b, el método geométrico para construir el triángulo es: 1) se construye el ángulo A; 2) se traza la distancia AC = b; y 3) con C como centro y con un radio igual a "a" se traza un arco. -- Pueden ocurrir los casos siguientes:

1) El radio puede ser demasiado corto para intersectar el lado inicial del ángulo A (ver fig. 3 a, b) y en consecuencia no hay triángulo posible.

2) El arco puede cortar el lado inicial en un punto o ser tangente a él (fig. 3,c,d,e). En cada uno de estos casos existe solamente un triángulo que satisfaga las -- condiciones.

3) El arco puede cortar el lado inicial en dos puntos y tenerse así, dos triángulos (fig. 3,f).

Si los lados dados son a y b, y si el ángulo dado es A, se tiene:

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} \qquad (4)$$

de acuerdo con la ley de los senos. Puesto que a, b y A son conocidos, el valor de sen B está determinado. En consecuencia B puede calcularse a partir de la tabla de funciones naturales. Además, 180 - B = B' es también un ángulo cuyo seno es igual a sen B. Por tanto, B y B' son las dos posibilidades para el ángulo opuesto al lado b. Se pueden usar cada uno de estos ángulos si,

$$A + B < 180° \quad \text{y} \quad A + B' < 180°$$

Sin embargo, si cualquiera de estas sumas es igual o mayor que 180°, se debe descartar el correspondiente valor de B o B', puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

Si,

$$\text{Sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

$$= 1$$

entonces, B = 90°, y en consecuencia,

$$180 - B = B'$$

$$B' = 90°$$

y existe sólo una solución. Si la ecuación (4) da un valor mayor que 1, se tiene sen B > 1. Por tanto, no existe solución ya que no existe un ángulo cuyo seno sea mayor que la unidad.

No es necesario memorizar las diferentes posibilidades dadas, en virtud de la sencillez con que en todo problema se determina si B ó B', o ambos, pueden ser ángulos del triángulo que contiene a A.

AUTOEVALUACION 2.

En los problemas 1 a 10, analizar los datos para el triángulo ABC y determinar en cada caso el número de soluciones que presenta una, dos o ninguna.

1.- B = 30°, b= 15, a= 20

2.- A = 30°, b= 20, a= 10

3.- C = 48°, c= 40, b= 25

4.- A = 118°, a= 70, c= 82

5.- B = 45°, c= 18, b= $9\sqrt{2}$

6.- C = 60°, c= 22.5, b = 30

7.- A = 163°, a= 97, b = 43

8.- C = 37°, c = 81.4, a = 99.6

9.- B = 66°, b = 73.1 , c = 71.3

10.- A = 30°, c = 712, a = 356

5-4 LEY DE LOS COSENOS.

La segunda ley fundamental para la resolución de triángulos oblicuángulos es la ley de los cosenos. Para deducir esta ley consideremos el triángulo ABC de la figura 4.

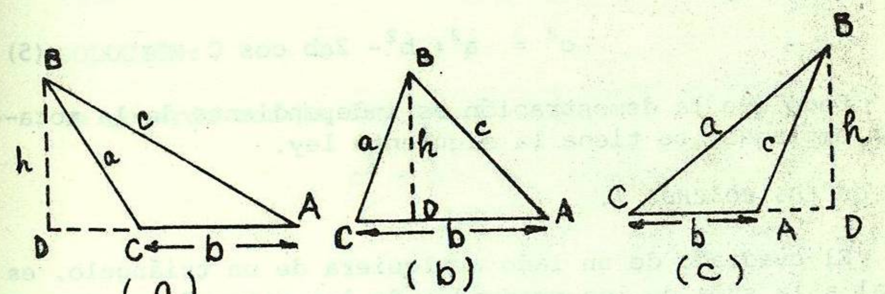

Fig. 4.

A partir de cualquier vértice, B, tracemos una perpendicular al lado opuesto o su prolongación.

Aplicando el teorema de Pitágoras a cada triángulo de la fig. 4 se tiene:

(i) $$c^2 = h^2 + (DA)^2$$

pero, $h = a \text{ sen } C$, puesto que $\text{sen } C = \frac{h}{a}$

además, $DA = b + DC$

$$DA = b - CD, \text{ puesto que } DC = -CD$$

$$= b - a\cos C, \text{ puesto que } \cos C = \frac{CD}{a}$$

Sustituyendo en (i) estos valores de h y de DA, se tiene:

$$c^2 = (a \operatorname{sen} C)^2 + (b - a\cos C)^2$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C$$

$$= a^2(\operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C$$

Por tanto:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (5)$$

Dado que la demostración es independiente de la notación empleada, se tiene la siguiente ley.

Ley de los cosenos 1.

El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Si despejamos $\cos C$ de (5) tenemos:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad (6)$$

Dado que la demostración es independiente de la notación empleada, se tiene la segunda forma de la ley de los cosenos.

Ley de los cosenos 2.

El coseno de un ángulo cualquiera de un triángulo es igual a una fracción cuyo numerador es la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, menos el cuadrado del tercer lado, y cuyo denominador es el doble producto de los lados que forman el ángulo.

El primer miembro de (5) contiene dos de los lados y el ángulo que forman, y permite determinar el tercer lado. La fórmula (6) permite obtener uno de los ángulos cuando se conocen los tres lados. Por tanto, la ley de los cosenos es suficiente para resolver los casos C y D indicados anteriormente.

EJEMPLO 1.

Dados $a = 20$, $b = 30$, $C = 11°$, resolver el triángulo.

SOLUCIÓN:

De acuerdo con la ley de los cosenos, se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$= (20)^2 + (30)^2 - 2\,(20)(30)(\cos 11°)$$

$$= 400 + 900 - 1200\ (0.9816)$$

$$= 122.047$$

Por tanto, $c = 11.0475$

Para obtener los ángulos A y B, emplearemos la segunda forma de la ley de los cosenos y tendremos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{900 + 122.047 + 400}{662.85}$$

$$= 0.9384$$

de donde, $A = 20°12'30''$

además, $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\text{Cos } B = \frac{400 + 122.047 - 900}{441.90}$$

$$= \frac{-377.953}{441.90}$$

$$= -0.8553$$

de donde, $B = 148°47'\ 30''$

El valor de B se obtuvo fundándose en el hecho de que,

$$\cos \text{ ángulo relacionado de } B = 0.8553$$

$$\text{ángulo relacionado de } B = 31°\ 12'30''$$

$$B = 180° - 31°12'\ 30''$$

$$B = 148°47'\ 30''$$

Como comprobación se tiene:

$$A + B + C = 20°12'\ 30'' + 148°47'\ 30'' + 11° = 180°$$

EJEMPLO 2.

Determinar los ángulos del triángulo cuyos lados son: $a= 15$, $b= 20$ y $c= 25$.

SOLUCIÓN:

Empleando la segunda forma de la ley de los cosenos, se tiene:

$$\text{Cos } C = \frac{(15)^2 + (20)^2 - (25)^2}{2(15)(20)}$$

$$= \frac{225 + 400 - 625}{600}$$

$$= 0$$

por tanto, $C = 90°$

además, $$\cos B = \frac{(15)^2 + (25)^2 - (20)^2}{2(15)(25)}$$

$$= \frac{225 + 625 - 400}{750}$$

$$= \frac{450}{750}$$

$$\cos B = 0.6000$$

por tanto, $B = 53°\ 7'\ 48''$

Análogamente,

$$\cos A = \frac{(20)^2 + (25)^2 - (15)^2}{2\ (20(25)}$$

$$= \frac{800}{1000}$$

$$= 0.8000$$

de donde, $A = 36°\ 52'\ 12''$

y como $90° + 53°7'\ 48'' + 36°52'\ 12'' = 180°$, queda comprobada la solución.

AUTOEVALUACION 3.

En los siguientes problemas, calcular la longitud del lado que falta.

1.- $a = 20$, $b = 50$, $C = 60°$

2.- $b = 8$. $c = 12$. $A = 25°$

3.- $a = 200$, $c = 300$, $B = 120°$

4.- $a = 130$, $b = 90.0$, $C = 100°$

5.- Si, a= 12, b= 13, c= 20, hallar A.

6.- Si, a= 500, b= 300, c= 200, hallar C.

7.- Si, a= 24, b= 60, c= 40, hallar B.

8.- Si, a= 12, b= 13, c=20, hallar C.

Determinar los tres ángulos de los triángulos de los problemas 9 y 10.

9.- a= 15, b= 16, c= 7.

10.- a= 600, b= 300, c = 400

11.- Los puntos B y C quedan en los lados opuestos de un pantano. El punto A, accesible a B y a C queda en una orilla. Se mide AB, AC y el ángulo BAC, obteniéndose: AB= 2000 m, AC = 3000 m, y el ángulo BAC = 30°. Calcular la distancia de B a C.

12.- Un piloto viaja con velocidad relativa al aire de 200 millas por hora y rumbo de 225°. El viento sopla proveniente del este a razón de 25 millas por hora. Determinar la velocidad del aeroplano con relación a la Tierra y la dirección del vuelo si no hubiera viento.

5-5 RESOLUCIÓN DE LOS CASOS C Y D POR MEDIO DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Ciertas propiedades de los triángulos semejantes hacen posible la resolución de algunos triángulos por medio de la ley de los cosenos. Debe recordarse que los ángulos de los triángulos semejantes son respectivamente iguales y los lados homólogos son proporcionales.

EJEMPLO 1.

Dados a = 26, c= 39, b= 52, resolver el triángulo ABC.

SOLUCIÓN:

En un triángulo semejante al triángulo dado, $a_1 = 2$, $c_1 = 3$, $b_1 = 4$. Este triángulo se puede resolver fácilmente por la ley de los cosenos y los ángulos que se determinen serán respectivamente iguales a los del triángulo propuesto.

EJEMPLO 2.

Resolver el triángulo ABC, dados A = 42°20', b= 63, c= 105.

SOLUCIÓN:

En un triángulo semejante al triángulo dado, A_1= 42°20', b_1= 3, c_1= 5.

Los elementos a_1, B_1 y C_1 se pueden calcular por la ley de los cosenos y por la ley de los senos.

(Al hallar "a", debe tenerse en cuenta la siguiente advertencia):

Advertencia.

Aunque $B = B_1$ y $C = C_1$, $a = 21a_1$, ya que cada lado del triángulo original se dividió entre 21. Este proceso abreviado, frecuentemente es de gran utilidad, pero debe emplearse con mucho cuidado. Siempre que se aplique debe tenerse presente que se está trabajando con un triángulo semejante al triángulo dado.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

Subraya la respuesta correcta.

1.- Dos senos de dos ángulos de cualesquier triángulo tienen la misma razón que los dos lados opuestos a ellos.

1) Ley de los senos. 2) Seno inverso.
3) Teorema de Pitágoras. 4) Ley de los cosenos.

2.- Sea ABC un triángulo oblicuángulo y se desea conocer $(b^2+c^2-a^2)$. ¿Cuál de los incisos es la respuesta?

1) -2bc Cos A. 2) 2bc Cos A.
3) Sen A. 4) Cos A/2bc.

3.- En dos triángulos semejantes, los lados homólogos son:

1) Proporcionales. 2) Iguales.
3) Perpendiculares. 4) Desiguales.

4.- En cualquier triángulo, a mayor lado se opone:

1) Mayor coseno. 2) Menor seno.
3) Mayor ángulo. 4) Menor ángulo.

5.- Si en un triángulo ABC se conocen los tres lados, ¿qué fórmula se utiliza?

1) Teorema de Pitágoras. 2) Ley de los senos.
3) Ley de los cosenos. 4) Seno inverso.

En los siguientes problemas aplica la ley de los cosenos o bien la de los senos, dependiendo de los datos que se dan.

6.- Si a=10, c=8, A=45°; encuentra Sen C.

1) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 2) $2\sqrt{2}$
3) $\sqrt{2}/5$ 4) Indeterminado.

7.- Dado A= 120°, a= 40, c= 80; resolver el triángulo ABC.

1) B= 24°40' C= 35°20' b= 19.28
2) B= 5°20' C= 54°40' b= 4.3
3) A= 4° 20' B= 55°40' b= 3.48
4) Indeterminado.

8.- Dado A= 24°, c=8 cm, a= 6 cm, resolver el triángulo ABC.

0) B= 18°50' C= 147°10' b= 4.762 cm
1) B= 123° 9' 37" C= 32°50' 29" b= 12.349 cm
2) B= 147°10' C= 18°50' b= 8 cm
3) B= 32°50' C= 123°10' b= 4.762 cm
4) No hay solución para el triángulo.

9.- Un barco zarpa de un muelle y navega 12 millas náuticas hacia el este, después navega en la dirección S 45°E hasta encontrar el punto de cruce con la dirección del muelle formando un ángulo de 30° con ella. ¿A qué distancia está el muelle cuando se encuentra en ese punto?

1) $8\sqrt{2}$ 2) $12\sqrt{2}$
3) $10\sqrt{2}$ 4) 5

10.- Si a=3, b=4, c=2; calcula Cos A.

1) 11/16 2) 15/16
3) 13/16 4) 5/16

11.- Calcula el perímetro del triángulo ABC para el cual a=9, c=6, Cos B= 1/12.

1) $(15+5\sqrt{3})$ 2) $(15+3\sqrt{3})$
3) $(15+6\sqrt{3})$ 4) $21\sqrt{3}$

12.- Si a=4, b=2, c=6; encuentra el coseno del ángulo menor.

1) 1	2) 0
3) 2	4) 5

13.- Relaciona correctamente las columnas:

a) Menor de 90°	______	semi-perímetro del triángulo ABC.
b) (A+B+C)/2	______	ángulo agudo.
c) Mayor de 90°	______	a. Csc A.
d) $b^2+c^2-a^2$	______	un cuarto de circunferencia.
e) 90°	______	2bc Cos A.
f) (a+b+c)/2		
g) b/Sen B		

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO V.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.-	b= 16.81,	c= 22.63,	C= 97°,	Área = 110.45
2.-	a= 0.6933,	c= 0.5912,	C= 53°,	Área = 0.1729
3.-	a= 55.64,	b= 120.58,	B= 73°60',	Área = 3300.2
4.-	a= 0.3314,	c= 0.1485,	A= 41°40',	Área = 0.0211
5.-	a= 115.88,	b= 77.47,	A= 137.50',	Área = 1199.5
6.-	b= 3239.4,	c= 5085.1,	C= 74°20',	Área = 7.628×10^{6}
7.-	a= 0.1048,	b= 0.1065,	B= 80°50',	Área = 2.180×10^{-3}
8.-	b= 542.3,	c= 230.5,	B= 58°10',	Área = 61420.1
9.-	a= 117.7,	c= 75.08,	A= 85°50',	Área =3605.2

10.- 716.03 m, 1074.6 m.

11.- 18.97 m

12.- 669.34 Km

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- Dos.	6.- Ninguna.
2.- Una.	7.- Una.
3.- Una.	8.- Dos.
4.- Ninguna.	9.- Una.
5.- Una.	10.- Una.

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- c = 43.59	7.- B = 137°52' 25"
2.- a = 5.83	8.- C = 106° 11' 29"
3.- b = 435.89	9.- A = 69°, 4' 31" B = 85°4' 58" C = 25°50' 31"

4.- $c = 170.48$

5.- $A = 35° \ 11' \ 2''$

6.- $C = 0°$

10.- $A = 117°16' \ 47''$
$B = 26°23' \ 3''$
$C = 36°20' \ 10''$

11.- 1614.84 m

12.- 218.39 millas por hora, 229°38' 34"

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

1.- 1

2.- 2

3.- 1

4.- 3

5.- 3

6.- 1

7.- 4

8.- 1

9.- 2

10.- 1

11.- 3

12.- 1

13.- f,a,g,e,d

CAPITULO 6.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

6-1 INTRODUCCIÓN.

En la antigüedad, los matemáticos no consideraban a los números negativos. La razón era simple, puesto que en aquellos tiempos, los únicos números que habían eran los números naturales (enteros positivos) y los usaban para contar sus pertenencias, propiedades, etc. Posteriormente, a través de la idea de dirección nacen los números enteros negativos, Así, después vinieron el nacimiento de los números fraccionarios y los números que no podían ser expresados como una decimal exacta y que su resultado no era un número periódico (números irracionales). Al final todos estos números se unieron - para formar el conjunto de "LOS NÚMEROS REALES".