4.- c = 170.48

5.- A = 35° 11' 2"

6.- C = 0°

10.- A= 117°16' 47"
B= 26°23' 3"
C= 36°20' 10"

11.- 1614.84 m

12.- 218.39 millas por hora, 229°38' 34"

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

1.- 1

2.- 2

3.- 1

4.- 3

5.- 3

6.- 1

7.- 4

8.- 1

9.- 2

10.- 1

11.- 3

12.- 1

13.- f,a,g,e,d

CAPITULO 6.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

6-1 INTRODUCCIÓN.

En la antigüedad, los matemáticos no consideraban a los números negativos. La razón era simple, puesto que en aquellos tiempos, los únicos números que habían eran los números naturales (enteros positivos) y los usaban para contar sus pertenencias, propiedades, etc. Posteriormente, a través de la idea de dirección nacen los números enteros negativos, Así, después vinieron el nacimiento de los números fraccionarios y los números que no podían ser expresados como una decimal exacta y que su resultado no era un número periódico (números irracionales). Al final todos estos números se unieron para formar el conjunto de "LOS NÚMEROS REALES".

La invención de los números negativos dió lugar a un nuevo problema para los matemáticos antiguos, y era que, había ecuaciones que no podían ser investigadas en el campo de los números reales, tales como por ejemplo, la ecuación: $x^2 + 1 = 0$. Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales ya que, al resolverla, tenemos que:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm \sqrt{-1} \quad ;$$

vemos que, el cuadrado de cualquier número real nunca es negativo, y en nuestro caso si lo es. Incluso el gran matemático René Descartes, dijo que tales raíces eran imaginarias, puesto que habría que considerarlas sobre la escala numérica. Cincuenta años después de la muerte de Descartes, la invención de una nueva clase de números hizo posible trabajar con aquellos números conocidos como "imaginarios".

Por último, al estudiar estos conjuntos de números conjuntamente surgió el estudio de "LOS NÚMEROS COMPLEJOS".

6-2 LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Antes de ver cómo se representan los números complejos, daremos las siguientes definiciones:

Números imaginarios puros. La raíz cuadrada de un número negativo, como por ejemplo $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-9}$; recibe el nombre de número imaginario puro.

La forma de representar a las raíces cuadradas de números negativos, se hace mediante el símbolo i, que significa $\sqrt{-1}$. Así, por definición, tenemos que, en los ejemplos anteriores:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = i\sqrt{3}$$
$$\sqrt{-7} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = i\sqrt{7}$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i$$

Esta forma de adoptar a las raíces cuadradas de números negativos es la normal para expresar a estos números.

La propiedad del símbolo i, es que al elevarla a la segunda, tercera y cuarta potencia, tenemos que:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$i^3 = (\sqrt{-1})^2\sqrt{-1} = (-1)(\sqrt{-1}) = -i$$
$$i^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = (-1)(-1) = 1$$

Si nosotros siguiéramos elevando a otras potencias, se repetirían los mismos valores i, -1, -i, 1.

El operar correctamente con esta forma, a estos números imaginarios, nos evita la posibilidad de cometer ciertos errores comunes. Así,

$$\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = (\sqrt{-1})(\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}) = i\sqrt{36} = 6i,$$

pero $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} \neq \sqrt{36}$;

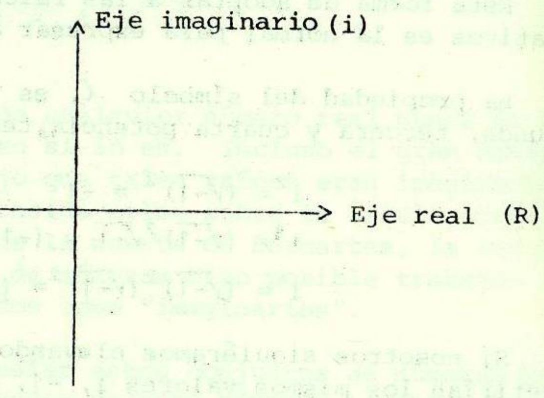
lo correcto es: $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{9} \cdot \sqrt{4}) = i^2\sqrt{36} = -6$

Los números complejos. Un número de la forma a + bi, donde a y b son números reales, recibe el nombre de número complejo; donde el primer término es la *parte real* (*a*), y el segundo término es la *parte imaginaria pura* (*bi*).

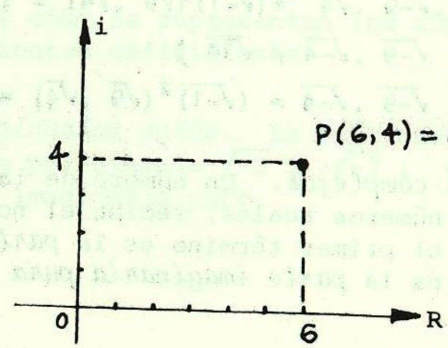
6-3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN NÚMERO COMPLEJO.

La forma de graficar los números complejos es análoga a la que se utiliza para graficar parejas ordenadas (x,y) en un sistema rectangular de coordenadas.

Los números complejos se representan por la pareja ordenada (a,b).



En la figura, el eje horizontal representa a los números reales o eje real; el eje vertical representa a los números imaginarios o eje imaginario y el plano que forman los dos ejes, se le denomina plano complejo.



En la figura anterior, tenemos el punto P que representa la gráfica del número complejo 6 + 4i. En el punto 0 se encuentran las coordenadas (0,0) y representa al número complejo 0 + 0i. Todos los puntos situados en el eje horizontal tienen coordenadas de la forma (a,0) y corresponden a los números reales a + 0i = a; por esta razón al eje horizontal se le llama eje real. Todos los puntos situados sobre el eje vertical, tienen coordenadas de la forma (0,b) y corresponden a los números imaginarios puros 0 + bi = bi.

6-4 RECORDANDO LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Como ya se vió anteriormente en un curso de álgebra las operaciones con los números complejos, veremos en esta sección un repaso general de dichas operaciones con el fin de que el estudiante las recuerde.

Adición. Para sumar dos números complejos, se suman, separadamente, sus partes reales y sus partes imaginarias puras.

EJEMPLO 1.

$$(3+2i)+(5-4i) = (3+5)+(2-4)i$$
$$= 8 - 2i$$

Sustracción. Para restar dos números complejos, se restan, separadamente sus partes reales y sus partes imaginarias puras.

EJEMPLO 2.

$$(8+4i)-(3-2i) = (8-3)+[4-(-2)]\ i$$
$$= 5 + (4+2)i$$
$$= 5 + 6i$$

Multiplicación. Para multiplicar dos números complejos, se efectúa la multiplicación como si fueran dos binomios algebraicos corrientes, y se sustituye el valor de i^2 por su correspondiente que es -1.

EJEMPLO 3.

$$\begin{aligned}(5+2i)(-3-2i) &= (5)(-3)+(5)(-2i)+(2i)(-3)+(2i)(-2i)\\ &= -15 - 10i - 6i - 4i^2\\ &= -15 - 10i - 6i + 4\\ &= -11 - 16i\end{aligned}$$

División. Para dividir dos números complejos, se multiplican el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

EJEMPLO 4.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\\ &= \frac{(1+i)^2}{(1)^2-(i)^2}\\ &= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\\ &= \frac{1+2i-1}{1-(-1)}\\ &= \frac{2i}{2}\\ &= i\end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Realiza las operaciones indicadas, dando la respuesta en su forma más simple.

1.- $3i^8-2i^3-4i^6$

2.- $\sqrt{-4}$

3.- $\sqrt{-11}$

4.- $6i^3+2i^{16}\ \ 6i^{23}$

5.- $(3+4i)+(5-3i)$

6.- $(5+7i)-(6+3i)$

7.- $4i(6i-7)$

8.- $(\sqrt{2}+3i)(\sqrt{2}-3i)$

9.- $(6-2i)+(2+3i)$

10.- $(4-2i)-(2+3i)$

11.- $\dfrac{3-2i}{3-4i}$

12.- $(2-i)^2$

13.- $(2+\sqrt{-5})(3-2\sqrt{-4})$

14.- $(1+2\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3})$

15.- $(2+3i)(3+2i)$

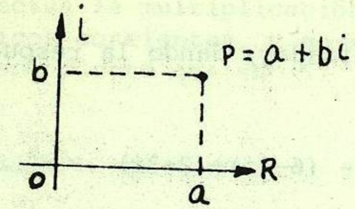
16.- $2i(3+4i)$

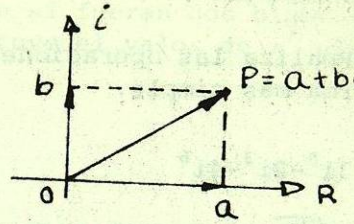
17.- $\dfrac{2+3i}{1+i}$

18.- $(1+i)^2(2+3i)$

6-5 LAS DOS FORMAS DE REPRESENTAR A UN NÚMERO COMPLEJO.

En la sección anterior vimos cómo representar a un número complejo de la forma a+bi. A esta forma de representar al número complejo, recibe el nombre de *forma rectangular*.

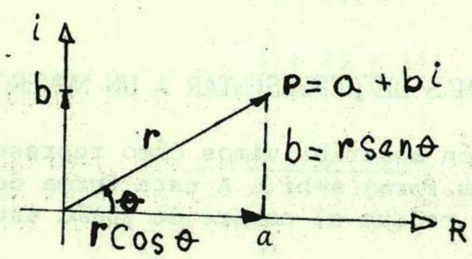




Todo número complejo se puede representar en el plano complejo no solamente mediante un punto P, como lo muestra la figura de la izquierda, sino también mediante un segmento de recta dirigida o vector OP, como lo muestra la figura de la derecha.

Bajo este nuevo sistema, a+bi no representa la longitud del vector, sino indica los dos movimientos rectangulares necesarios para localizar el punto extremo del vector. Así pues, en este sistema, un *número complejo está representado por un vector*, no solamente por la longitud de dicho vector, sino por su longitud y dirección, determinados por los dos movimientos en ángulo recto.

Ahora, consideremos el número complejo a+bi representado por el vector OP.



para determinar la longitud del vector "r", hacemos uso del teorema de Pitágoras, quedándonos:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

También observamos que, por trigonometría, la forma de relacionar los lados a y b y el radio vector , es mediante las funciones seno, coseno y tangente para el ángulo θ.

$$\text{Sen}\theta = b/r, \qquad \text{Cos}\theta = a/r, \qquad \text{Tan}\theta = b/a\ ;$$

entonces, podemos determinar las partes real e imaginaria en términos del radio vector r y θ, quedándonos:

$$a = r\ \text{Cos}\theta, \qquad b = r\ \text{Sen}\ \theta\ ;$$

luego un número complejo de la forma a+bi, lo podemos representar también en otra forma donde intervienen "r" y θ:

$$a+bi = (r\ \text{Cos}\theta) + (r\ \text{Sen}\theta)i$$
$$= r(\text{Cos}\theta + i\ \text{Sen}\theta)$$

La expresión $r(\text{Cos}\theta + i\ \text{Sen}\ \theta)$ se denomina *la forma polar o trigonométrica*, $r = \sqrt{a^2+b^2}$ *es el módulo y* θ *es llamado argumento o fase*, se escoge generalmente, como el menor ángulo positivo tal que, *tan* $\theta = b/a$.

Por consiguiente, conociendo a y b siempre se pueden determinar r y θ y viceversa. Llamaremos a "r" y "θ" *las coordenadas polares* del punto para distinguirlas de las coordenadas rectangulares.

A continuación se resuelven varios problemas para que el estudiante visualice un tanto mejor las dos formas de representar a un número complejo.

EJEMPLO 1.

Expresar el número complejo $1 - i\sqrt{3}$ en forma polar.

SOLUCIÓN:

Nótese que éste es un complejo de la forma a+bi, donde a=1, y b=$-\sqrt{3}$. Ahora, puesto que $r = \sqrt{a^2+b^2}$, tenemos que: